

УДК 531.8

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ДВУЗВЕННИКА С ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

МИХАЙЛОВ С. А.

Исследуются малые собственные колебания механической системы, представляющей собой упругий невесомый двузвенник с материальной точкой на одном из его концов. Другой конец двузвенника жестко закреплен. Двузвенник состоит из двух упругих стержней одинаковой длины и различной жесткости. Конфигурация двузвенника (угол между звеньями) может быть произвольной.

Данная модель возникает при исследовании динамики антропоморфного манипуляционного робота. При значительных длинах звеньев и большой массе перемещаемого груза существенное влияние на точность выполняемых манипулятором операций оказывает упругая податливость его звеньев. Для антропоморфного манипулятора основной вклад в упругие отклонения дают два наиболее протяженных звена (плечо и локоть). Вклад остальных звеньев менее существен. Рассматриваемая модель невесомого упругого двузвенника позволяет оценить низшие частоты колебаний реального манипулятора при различных конфигурациях.

В публикуемой работе определены собственные частоты, формы и главные координаты упругих пространственных колебаний в квазистатическом приближении. Аналогичная задача рассматривалась в [1, 2] для звеньев одинаковой жесткости при некоторых конфигурациях двузвенника. Динамика плоских управляемых движений упругого манипулятора исследована в [3].

1. Рассмотрим двузвенник, состоящий из упругих прямолинейных стержней OO_1 и O_1O_2 , жестко соединенных в точке O_1 (фиг. 1, где показана недеформированная конфигурация двузвенника). На конце второго звена в точке O_2 укреплен точечная масса m . Конец первого звена — точка O — жестко заделан. Угол φ отсчитывается от продолжения оси первого звена ко второму звену против часовой стрелки и может принимать произвольные значения, но в силу симметрии задачи можно считать $0 \leq \varphi \leq \pi$. Сечения стержней предполагаются круговыми или кольцевыми, жесткости — различными, что обусловлено как различием материалов, из которых изготовлены звенья, так и различной величиной моментов инерции поперечных сечений. Стержни OO_1 и O_1O_2 могут совершать поперечные и крутильные колебания малой амплитуды. Продольными упругими смещениями пренебрегаем по сравнению с поперечными смещениями. Предполагается, что величина точечной массы намного больше массы двузвенника. При этом предположении частоты собственных колебаний двузвенника, отвечающие упругим волнам в стержнях, будут много больше частот, обусловленных наличием массы. Для расчета низших собственных частот двузвенник можно считать невесомым.

2. Обозначим $\mathbf{u}_i(s)$ вектор упругого смещения точек оси i -го стержня, $\varphi_i(s)$ — угол поворота сечения i -го стержня вокруг его оси; аргумент s — длина стержня, отсчитанная от его левого конца, $0 \leq s \leq l$ (где l — длина звена), длины звеньев предполагаются равными; индекс $i=1$ всюду относится к звену OO_1 , $i=2$ — к звену O_1O_2 .

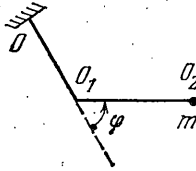
Запишем потенциальную энергию упругого двузвенника

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 \left\{ \frac{E_i I_i}{2} \int_0^l [\mathbf{u}_i''(s)]^2 ds + \frac{c_i}{2} \int_0^l [\varphi_i'(s)]^2 ds \right\} \quad (2.1)$$

Штрихами обозначены производные по s , E_i — модуль Юнга материала i -го стержня, I_i — момент инерции поперечного сечения i -го стержня относительно диаметра сечения, c_i — жесткость на кручение i -го звена ($i=1, 2$). Функции $u_i(s)$, $\varphi_i(s)$ в квазистатическом приближении удовлетворяют уравнениям и граничным условиям

$$\begin{aligned} u_i^{IV}(s) &= 0, \quad \varphi_i''(s) = 0 \\ u_i(0) &= u_i'(0) = \varphi_i(0) = 0 \quad (i=1, 2) \\ u_1(l) &= r_1, \quad u_1'(l) = \theta_1 \times k_1 \\ u_2(l) &= r_2 - r_1 - \theta_1 \times k_2 l, \quad u_2''(l) = 0 \\ \varphi_1(l) &= \theta_1 \cdot k_1, \quad \varphi_2'(l) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь k_i — вектор, направленный по оси i -го звена при недеформированной конфигурации двузвенника, r_i — вектор смещения точки O_i ($i=1, 2$); θ_1 — вектор упругого поворота конца первого звена.



Фиг. 1

Граничные условия (2.2) соответствуют жесткой заделке левых концов каждого из стержней. На правом конце стержня OO_1 заданы векторы упругого смещения r_1 и поворота θ_1 . На правом конце звена O_1O_2 изгибающий момент равен нулю, что соответствует точечной массе, укрепленной в точке O_2 , и задан вектор упругого смещения конца стержня.

Решение краевой задачи (2.2)

$$\begin{aligned} u_1(s) &= (3r_1 - l\theta_1 \times k_1) (s/l)^2 + (l\theta_1 \times k_1 - 2r_1) (s/l)^3 \\ u_2(s) &= 1/2 (r_2 - r_1 - l\theta_1 \times k_2) (3 - [s/l]) (s/l)^2 \\ \varphi_1(s) &= \theta_1 \cdot k_1 (s/l), \quad \varphi_2(s) = 0 \end{aligned}$$

подставим в выражение (2.1) и получим потенциальную энергию упругого двузвенника

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{2E_1 I_1}{l^3} [3r_1^2 - 3r_1 \cdot (\theta_1 \times k_1) + l^2 (\theta_1 \times k_1)^2] + \frac{c_1}{2l} (\theta_1 \cdot k_1)^2 + \\ &+ \frac{3E_2 I_2}{2l^3} (r_2 - r_1 - l\theta_1 \times k_2)^2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

которая в форме (2.3) является функцией трех векторов: r_1 , r_2 , θ_1 ; ее можно записать как функцию одного вектора r_2 , исключив r_1 и θ_1 .

Введем декартову систему координат O_2XYZ . Она ориентирована следующим образом относительно недеформированного двузвенника OO_1O_2 : ось O_2X перпендикулярна плоскости OO_1O_2 , ось O_2Y направлена по продолжению оси второго стержня O_1O_2 , ось O_2Z дополняет систему координат до правой ортогональной тройки. Спроектируем векторы r_1 , θ_1 , k_1 , r_2 , k_2 на оси системы координат O_2XYZ и введем обозначения: $r_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$, $\theta_1 = [\alpha, \beta, \gamma]^T$, $k_1 = [0, \cos \varphi, -\sin \varphi]^T$, $r_2 = [x, y, z]^T$, $k_2 = [0, 1, 0]^T$ (индекс T означает транспонирование).

Исключим r_1 и θ_1 из (2.3), используя условия

$$\partial \Pi / \partial x_1 = 0, \quad \partial \Pi / \partial \theta_1 = 0 \quad (2.4)$$

$$r_1 \cdot k_1 = 0, \quad (r_2 - r_1) \cdot k_2 = 0 \quad (2.5)$$

Условия (2.4) показывают, что равновесные значения x_1, θ_1 доставляют минимум потенциальной энергии двузвенника. Равенства (2.5) есть условия нерастяжимости первого и второго стержней.

Выпишем в компонентах равенства (2.4), (2.5):

$$y_1 \cos \varphi - z_1 \sin \varphi = 0, y - y_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} 2E_1 I_1 l^{-2} [2l\alpha - 3(z_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi)] + 3E_2 I_2 l^{-2} (l\alpha - z + z_1) &= 0 \\ 2E_1 I_1 [2x_1 + l(\beta \sin \varphi + \gamma \cos \varphi)] - E_2 I_2 (x - x_1 + \gamma l) &= 0 \\ 2E_1 I_1 \{3x_1 \sin \varphi + 2l[\beta - \cos \varphi (\beta \cos \varphi - \gamma \sin \varphi)]\} + \\ + c_1 l (\beta \cos \varphi - \gamma \sin \varphi) \cos \varphi &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} 2E_1 I_1 \{3x_1 \cos \varphi + 2l[\gamma + \sin \varphi (\beta \cos \varphi - \gamma \sin \varphi)]\} - \\ - c_1 l \sin \varphi (\beta \cos \varphi - \gamma \sin \varphi) + 3E_2 I_2 (\gamma l + x - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Система равенств (2.4), (2.5) разделилась на две независимые части (2.6), (2.7). В систему линейных уравнений (2.6) входят переменные, описывающие деформацию двузвенника в плоскости OO_1O_2 недеформированного двузвенника. В систему (2.7) входят компоненты векторов $\mathbf{r}_1, \theta_1, \mathbf{r}_2$, описывающие деформацию двузвенника в направлении, перпендикулярном плоскости OO_1O_2 .

Выразив $x_1, y_1, z_1, \alpha, \beta, \gamma$ из равенств (2.6), (2.7) через x, y, z и подставив в выражение (2.3), после преобразований получим потенциальную энергию упругого двузвенника в виде положительно-определенной квадратичной формы от вектора \mathbf{r}_2 (индекс 2 в дальнейшем всюду опускаем):

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (C\mathbf{r}, \mathbf{r}), \mathbf{r} = [x, y, z]^T, C = k \{c_{ij}\} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.8) \\ c_{11} &= (4\xi + 3) (3\xi\zeta^{-1} \sin^2 \varphi + \xi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi + 1)^{-1} \\ c_{12} &= c_{21} = c_{13} = c_{31} = 0 \\ c_{22} &= 4(3 + \xi + 3 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) / \sin^2 \varphi \\ c_{23} &= c_{32} = -2(3 + 2 \cos \varphi) / \sin \varphi, c_{33} = 4 \\ k &= 3E_1 I_1 / l^3 (4\xi + 3), \xi = E_1 I_1 / E_2 I_2, \zeta = c_1 / E_2 I_2 \end{aligned}$$

Заметим, что $I = \pi(\rho_2^4 - \rho_1^4) / 4$, $c = \pi E(\rho_2^4 - \rho_1^4) / 4(1 + \nu)$ для стержня кольцевого сечения с внешним радиусом ρ_2 и внутренним радиусом ρ_1 (ν — коэффициент Пуассона).

Кинетическая энергия системы есть кинетическая энергия материальной точки массы m :

$$T = \frac{1}{2} (A\dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{r}}), \dot{\mathbf{r}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T, A = mE \quad (2.9)$$

где E — единичная матрица размерности 3×3 .

3. Составим уравнения Лагранжа с функцией Лагранжа $L = T - \Pi$, определенной в (2.8), (2.9), и получим систему трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

$$A\mathbf{r}'' + C\mathbf{r} = 0 \quad (3.1)$$

Запишем частное решение системы (3.1) (ω — частота, \mathbf{b} — амплитудный вектор, ψ — начальная фаза):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{b} \sin(\omega t + \psi) \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в (3.1), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно \mathbf{b} :

$$(C - \omega^2 A)\mathbf{b} = 0 \quad (3.3)$$

Приравняв нулю определитель этой системы, составим характеристическое уравнение

$$(c_{11} - m\omega^2) [m^2 \omega^4 - (c_{22} + c_{33}) m\omega^2 + c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32}] = 0 \quad (3.4)$$

из которого определим частоты малых колебаний

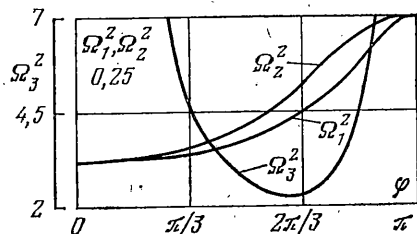
$$\omega_1^2 = \frac{3E_1 I_1}{l^3 m} [3\xi\zeta^{-1} \sin^2 \varphi + \xi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos \varphi + 1]^{-1} \quad (3.5)$$

$$\omega_{2,3}^2 = \frac{6E_1 I_1}{l^3 m} \{ \xi + 4 + 3 \cos \varphi \pm [P + (3 + 2 \cos \varphi)^2 \sin^2 \varphi]^{1/2} \}^{-1}$$

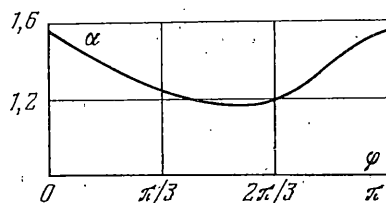
$$P = (3 + \xi + 3 \cos \varphi + \cos 2\varphi)^2$$

Спектр частот разделился на две части: колебания в плоскости недеформированного двузвенника с частотами ω_2 , ω_3 и колебания с частотой ω_1 в направлении, перпендикулярном этой плоскости.

Квадраты безразмерных частот $\Omega_i^2 = \omega_i^2 l^3 m / 3E_1 I_1$ ($i=1, 2, 3$), вычисленные по формулам (3.5), представлены на фиг. 2 в зависимости от



Фиг. 2



Фиг. 3

угла φ . Здесь параметры, входящие в выражение (3.5), равны: $\xi=1$, что соответствует звеньям одинаковой жесткости, $\nu=1/3$, $\zeta=3/4$.

Подставив ω_i ($i=1, 2, 3$) из (3.5) в (3.3), определим собственные векторы \mathbf{b}_i ($i=1, 2, 3$) и запишем общее решение системы дифференциальных уравнений (3.1):

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^3 a_i \mathbf{b}_i \sin(\omega_i t + \psi_i)$$

где a_i , ψ_i — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Собственные векторы \mathbf{b}_i ($i=1, 2, 3$) удобно представить в виде

$$N(\alpha) = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\alpha = -\text{sgn}(\sin \varphi) \arccos \{ (Q + 2 + \xi + 3 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi) / 2Q \}^{1/2}$$

$$Q = \{ 4(\xi + 3) \cos^2 \varphi + 6(\xi + 4) \cos \varphi + 13 + \xi^2 + 4\xi \}^{1/2}$$

Векторы \mathbf{b}_i есть столбцы матрицы $N(\alpha)$. Система нормальных координат представляет собой декартову систему, повернутую на угол α вокруг оси $O_2 X$. Зависимость угла α от конфигурации двузвенника для $\xi=1$, $\zeta=3/4$ представлена на фиг. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1967. 552 с.
3. Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноушко Ф. Л. Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями. — Изв. АН СССР, МТТ, 1981, вып. 3, с. 118–124.

Москва

Поступила в редакцию
18.V.1981