

УДК 531.44

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С НЕИДЕАЛЬНЫМИ УДЕРЖИВАЮЩИМИ СВЯЗЯМИ

СМИРНОВ Ю. П.

Введены многоиндексные обозначения нормальных реакций, позволяющие записать уравнения движения в единой форме, учитывающей все возможные варианты опирания тел механической системы.

Выбор истинного варианта опирания и соответствующих ему обобщенных сил трения производится посредством функции переключения, зависящей от знаков нормальных реакций.

1. В системах, связи которых можно считать идеальными, подробности их конструктивной реализации не входят в уравнения движения. При наличии трения конструкция связей может заметно влиять на движение.

Удерживающие связи дают возможность соприкасающимся телам различным образом опираться одному на другое, однако во всех известных формах уравнений для систем с трением [1–10] предполагается какой-либо один вариант опирания тел системы¹. Поэтому участки движения с различными вариантами опирания должны «припасовываться» один к другому.

Дадим общий метод составления уравнений с трением, охватывающих все варианты соприкосновения тел системы. Этот метод основывается на применении функции переключения, которая строится из сигнатур нормальных реакций для каждого варианта опирания.

Рассмотрим для простоты голономную систему с n степенями свободы, состоящую из абсолютно твердых тел, контакт между которыми имеет место в отдельных точках или приводится к точечному. В кинематических парах отсутствуют зазоры и лишние связи. Число избыточных координат, на которые наложим условия связи простейшего вида, возьмем равным числу реакций m , подлежащих определению. Каждому варианту опирания ставится в соответствие своя система нормальных реакций со стороны опорных поверхностей, а затем записываются уравнения движения и соотношения для реакций, причем в обозначениях реакций должен содержаться номер варианта s . Общее число возможных вариантов полного опирания (т. е. вариантов со всеми положительными реакциями) равно s_0 .

Соотношения для обобщенных реакций [7, 10]:

$$\begin{aligned} \lambda_{n+r}^s = & - \sum_{\sigma=1}^n A_{n+r,\sigma}^0 \sum_{\rho=1}^n \sum_{\theta=1}^n \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \rho \theta \end{matrix} \right\}^0 q_{\rho} \cdot q_{\theta} + \sum_{\sigma=1}^n A_{n+r,\sigma}^0 \sum_{\rho=1}^n (A_{\sigma\rho}^{-1})^0 Q_{\rho}^{0s} + \\ & + \sum_{\rho=1}^n \sum_{\theta=1}^n [\rho, \theta; n+r]^0 q_{\rho} \cdot q_{\theta} - Q_{n+r} \quad (r=1, \dots, m) \end{aligned}$$

¹ См. также: Смирнов Ю. П. О составлении уравнений движения механических систем с трением. Тула, 1975. — 25 с. Деп. в ВИНТИ 21.4.75; № 1143–75; О парадоксах Пэнлевэ. Тула, 1975. — 15 с. Деп. в ВИНТИ 22.9.75; № 2708–75; Об уравнениях динамики систем с кулоновым трением. Тула, 1977. — 14 с. Деп. в ВИНТИ 12.8.77; № 3230–77.

приводятся к виду

$$\sum_{i=1}^m N_i^s a_{ij}^s = b_j \quad (1.1)$$

Линейные комбинации нормальных реакций N входят в обобщенные реакции λ , а также и в обобщенные силы Q через силы трения. Из них строятся коэффициенты a_{ij}^s , содержащие в себе конструктивные характеристики удерживающих связей системы для каждого варианта опирания. Величины b_j зависят от заданных и инерционных сил. Последние строятся известным образом из инерционных коэффициентов A и символов Кристоффеля [7].

Для каждого варианта полного опирания вычисляются нормальные реакции, а реализуемый вариант отбирается посредством функции переключения

$$F(s) = \prod_{i=1}^m \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} N_i^s}{2} \right)$$

Для реализованного варианта полного опирания компонента функции переключения равна единице, компоненты же функции переключения для всех других вариантов равны нулю.

При переходе от одного варианта к другому в случае, например, непрерывных заданных сил в некоторые мгновения возможно обращение k нормальных реакций в нуль. Тогда имеют место переходные варианты, причем окажется, что для некоторых s (общим числом 2^k) функция переключения равна 2^{-k} .

Сумма же всех компонент функции переключения при отсутствии самоторможения всегда равна единице

$$\sum_{s=1}^{s_0} F(s) = 1 \quad (1.2)$$

Силы трения войдут в обобщенные силы следующим образом:

$$Q_j = - \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{i=1}^m f_i^s N_i^s \frac{V_{ix}^s \alpha_{ij}^1 + V_{iy}^s \alpha_{ij}^2}{V (V_{ix}^s)^2 + (V_{iy}^s)^2} \prod_{l=1}^m \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} N_l^s}{2} \right) \quad (1.3)$$

Здесь U_{ix}^s , U_{iy}^s , f_i^s — соответственно относительные скорости в точках соприкосновения тел и коэффициенты трения. Коэффициенты α_{ij}^k связывают вариации декартовых и обобщенных координат.

В программу вычисления сил трения должна быть включена подпрограмма генерации вариантов опирания. Нормальные реакции для каждого варианта вычисляются на ЦВМ по формулам (1.1), а соотношение (1.3) автоматически выбирает истинный вариант опирания и однозначно вычисляет силы трения при отсутствии самоторможения.

2. Дальнейшее рассмотрение удобно проиллюстрировать примерами.

1. Движение материальной точки стеснено двумя параллельными плоскостями с различной шероховатостью. На точку действует заданная сила F с нормальной к связи компонентой F_z .

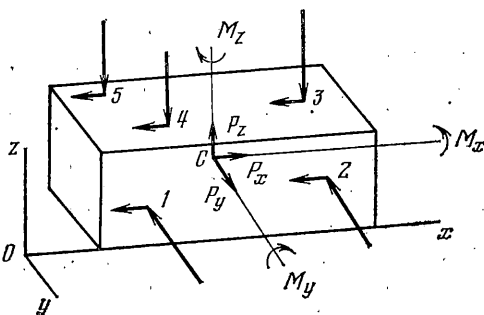
Модуль силы трения запишется выражением

$$\Phi = \left(f_2 \frac{1 + \operatorname{sgn} F_z}{2} - f_1 \frac{1 - \operatorname{sgn} F_z}{2} \right) F_z$$

2. Рассматривается абсолютно твердая четырехгранная призма, движущаяся в абсолютно жестких направляющих со сколь угодно малыми зазорами. Вследствие действия прямо приложенных и инерционных сил призма как-то опирается на направляющие и на гранях ее развиваются нормальные давления, которые могут быть приведены к некоторым центрам; положение последних на гранях призмы считаем фиксированным. Эти центры приведения назовем точками опирания.

На каждой грани может быть не более трех точек опирания, а на двух гранях с общим ребром имеется пять точек опирания (фиг. 1).

Предполагается, что на противоположных гранях имеются соответствующие точки-антиподы. Таким образом, имеется всего пять пар точек и в каждой паре возможны три варианта опирания: прижата одна точка, прижата другая точка, обе точки разгружены. Следовательно, для пространственной нагрузки возможны $3^5=243$ варианта опирания призмы; из них в каждый момент реализуются только те, для которых все реакции одновременно неотрицательны. Среди 243 всевозможных вариантов есть $2^5=32$ варианта полного опирания призмы, когда в каждой из пяти пар точек опирания одна точка обязательно нагружена. Все прочие варианты можно рассматривать как разные частные случаи вариантов полного опирания.



Фиг. 1

Структура уравнений, определяющих реакции, одинакова для каждого варианта, разница будет лишь в направлении нормальных реакций, в координатах точек опирания и, возможно, в коэффициентах трения.

Дополним расчетную схему следующими положениями (фиг. 1). Считая призму прямоугольной, свяжем с образующей призматической поверхности координатную ось x , ось y направим горизонтально, ось z — вертикально. Считаем, что на гранях, перпендикулярных к оси y , имеется по две пары точек опирания с номерами 1 и 2, а на гранях нормальных к оси z — три пары точек опирания с номерами 3, 4, 5.

Заданные активные и инерционные силы, действующие на призму, приведем к центру масс призмы с компонентами главного вектора P_x, P_y, P_z и главного момента M_x, M_y, M_z .

Нормальная реакция в любой точке опирания зависит от варианта опирания в каждой паре точек, поэтому введем для нормальных реакций обозначение N_{ijklms} . Индекс s здесь обозначает номер пары точек и пробегает значения от 1 до 5, если это особо не оговорено. Индекс i соответствует варианту опирания для первой пары точек, j — для второй, k — для третьей, l — для четвертой и m — для пятой. Индексы i, j, k, l, m принимают значения 1 и 2, причем единица соответствует граням, на которых нормаль совпадает с положительным направлением координатной оси, а двойка — противоположным граням.

Координаты точек опирания a_{ps}, b_{ps}, c_{ps} есть расстояния, отмеряемые от центра масс призмы вдоль координатных осей x, y и z соответственно. Здесь индекс p зависит от индекса s ; а именно: $p=i$ при $s=1, p=j$ при $s=2, p=k$ при $s=3, p=l$ при $s=4, p=m$ при $s=5$.

Каждой точке опирания может соответствовать свое значение коэффициента трения f_{ps} .

Уравнения (1.1) примут вид уравнений равновесия, два из которых есть уравнения проекций сил на оси y и z ; остальные — уравнения моментов вокруг осей, проходящих через центр масс призмы и направленных

параллельно осям координат

$$\begin{aligned}
 & (-1)^i N_{ijklm1} + (-1)^j N_{ijklm2} + P_y = 0 \\
 & (-1)^k N_{ijklm3} + (-1)^l N_{ijklm4} + (-1)^m N_{ijklm5} + P_z = 0 \\
 & \sum_{s=1}^2 (-1)^p c_{ps} N_{ijklms} - \sum_{s=3}^5 (-1)^p b_{ps} N_{ijklms} - M_x = 0 \\
 & \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=1}^5 f_{ps} c_{ps} N_{ijklms} + \sum_{s=3}^5 (-1)^p a_{ps} N_{ijklms} - M_y = 0 \\
 & \sum_{s=1}^2 (-1)^p a_{ps} N_{ijklms} + \operatorname{sgn} x \cdot \sum_{s=3}^5 f_{ps} b_{ps} N_{ijklms} + M_z = 0.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Для определения варианта опирания следует вычислить $32 \times 5 = 160$ значений реакций. Численный отбор вариантов можно производить при помощи ступенчатой функции переключения

$$F(i, j, k, l, m) = \prod_{s=1}^5 \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} N_{ijklms}}{2} \right)$$

которая равна единице в реализованном варианте полного опирания и нулю, если хотя бы одна из сигнатур отрицательна.

Если значение силы трения для каждого варианта $\sum f_{ps} N_{ijklms}$ ($s=1, 2, 3, \dots, 5$) перемножить с функцией переключения и взять сумму всех вариантов, то получим выражение модуля истинной силы трения

$$\Phi = \sum_{i,j,k,l,m=1}^2 \sum_{s=1}^5 \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} N_{ijklms}}{2} \right) \sum_{s=1}^5 f_{ps} N_{ijklms} \tag{2.2}$$

При этом равенство (1.2) имеет вид

$$\sum_{i,j,k,l,m=1}^2 \prod_{s=1}^5 \left(\frac{1 + \operatorname{sgn} N_{ijklms}}{2} \right) = 1 \tag{2.3}$$

Проведем анализ полученных соотношений. Рассмотрим опирание призмы на n опор ($n \leq 5$). Легко видеть, что число вариантов опирания на n опор определяется числом сочетаний из пяти по n , помноженным на 2^n вариантов опирания внутри каждого такого сочетания, т. е. определяется выражением $C_5^n \times 2^n$.

Число ненулевых компонент функции переключения F есть 2^{5-n} , а значение каждой компоненты равно 2^{n-5} , что подтверждает справедливость равенств (1.2) и (2.3) и при неполном опирании.

Формула (2.2) дает возможность определять силу трения и при неполном опирании. Величина Φ состоит из 2^{5-n} групп положительных слагаемых по n в каждой группе.

Если $n=5$, то имеют место варианты полного опирания, а при $n=0$ — отсутствие опирания вообще вследствие отсутствия нагрузки на призму (при этом, возможно, $P_x \neq 0$).

Легко проверить, что общее число всех вариантов $\sum C_5^n \times 2^n = 243$ ($n=0, 1, 2, \dots, 5$). Варианты неполного опирания реализуются в некоторые моменты при непрерывно меняющейся нагрузке на призму и служат переходными состояниями между различными вариантами полного опирания.

Если призма и прикладываемые силы симметричны относительно плоскости, проходящей через центр масс и параллельной координатной плоскости XOZ , то расчетная схема оказывается плоской, а формулы для определения модуля силы трения получаются весьма простыми:

$$\begin{aligned}\Delta_{ij} &= a_{j2} - a_{i1} + [f_{j2} b_{j2} (-1)^j - f_{i1} b_{i1} (-1)^i] \operatorname{sgn} x^* \\ N_{ij1} &= (-1)^i \{M_z - P_y [a_{j2} + (-1)^j f_{j2} b_{j2} \operatorname{sgn} x^*]\} \Delta_{ij}^{-1} \\ N_{ij2} &= (-1)^j \{-M_z + P_y [a_{i1} + (-1)^i f_{i1} b_{i1} \operatorname{sgn} x^*]\} \Delta_{ij}^{-1} \\ \Phi &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (1 + \operatorname{sgn} N_{ij1}) (1 + \operatorname{sgn} N_{ij2}) (f_{i1} N_{ij1} + f_{j2} N_{ij2})\end{aligned}$$

В этом случае имеем четыре варианта полного опирания, четыре варианта опирания на одну опору и один вариант без опирания при отсутствии нагрузки (кроме P_x). Всего имеем $3^2=9$ вариантов опирания.

Если некоторые опорные точки фиксируются на направляющих призмах, то они перемещаются относительно призмы. В этом случае с изменением x продольные координаты опорных точек также изменяются $a_{ps} = a_{ps}^0 + x$, начиная с некоторых начальных значений a_{ps}^0 .

Если движение призмы начинается из состояния покоя, то вместо знака x^* следует взять знак P_x . И если при этом окажется, что $|P_x| \leq \Phi$, то призма будет оставаться в покое.

3. Рассмотрим плоский маятник с трением в шарнире. Распределенные силы в шарнире приведем к его центру $\Phi = fN$ и $M = f_1 r N$. Здесь Φ — модуль главного вектора сил трения скольжения, M — модуль главного момента трения скольжения, r — радиус шарнира, f — коэффициент трения скольжения, f_1 — приведенный коэффициент трения, зависящий от размеров площадки контакта звеньев и распределения давления.

В шарнирах без зазоров неизвестны величина и направление равнодействующей сил нормальных давлений звеньев N , поэтому соотношения для реакций получаются нелинейными [10, 11]. Можно, однако, получить линейные уравнения для реакций, если приближенно заменить цапфу правильным n -угольником, вписанным в окружность, радиус которой меньше радиуса r на сколь угодно малую величину (фиг. 2).

Тогда в общем случае опирание имеет место только по двум соседним вершинам. Запишем уравнение движения маятника для любого из n вариантов полного опирания и n переходных вариантов

$$\varphi_i'' = -[Pl \sin \varphi + f_1 r (N_i + N_{i+1}) \operatorname{sgn} \varphi] I^{-1}$$

и подставим ускорение в уравнения движения центра масс

$$\begin{aligned}N_i (\cos \alpha_i - f \sin \alpha_i \operatorname{sgn} \varphi) + N_{i+1} (\cos \alpha_{i+1} - f \sin \alpha_{i+1} \operatorname{sgn} \varphi) &= \\ = P + ml \{ \varphi'' \cos \varphi - I^{-1} [Pl \sin \varphi + f_1 r (N_i + N_{i+1}) \operatorname{sgn} \varphi] \sin \varphi \} \\ N_i (\sin \alpha_i + f \cos \alpha_i \operatorname{sgn} \varphi) + N_{i+1} (\sin \alpha_{i+1} + f \cos \alpha_{i+1} \operatorname{sgn} \varphi) &= \\ = ml \{ \varphi'' \sin \varphi + I^{-1} [Pl \sin \varphi + f_1 r (N_i + N_{i+1}) \operatorname{sgn} \varphi] \cos \varphi \} \quad (2.4) \\ \alpha_i = \varphi + 2\pi i/n, \quad \alpha_{i+1} = \varphi + 2\pi (i+1)/n\end{aligned}$$

(P, I — вес маятника и момент инерции его вокруг центра шарнира). Найденные отсюда реакции для каждого варианта опирания подставим в уравнение движения маятника

$$I\varphi'' = -Pl \sin \varphi - \frac{r}{4} f_1 \operatorname{sgn} \varphi \sum_{i=1}^n (1 + \operatorname{sgn} N_i) (1 + \operatorname{sgn} N_{i+1}) (N_i + N_{i+1})$$

и из него получим ускорение реализуемого варианта.

Точность этой модели возрастает с увеличением числа сторон n многоугольника.

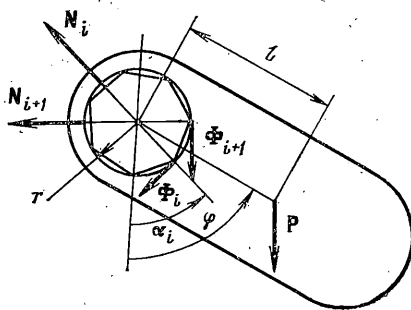
Определитель системы (2.4)

$$\Delta_i = 2\sqrt{1+f^2} \left[\sqrt{1+f^2} \cos \frac{\pi}{n} - f_1 r m l I^{-1} \sin \left(\frac{2\pi i}{n} + \frac{2\pi}{n} + \text{Arctg } f \text{sgn } \dot{\varphi} \right) \right] \sin \frac{\pi}{n}$$

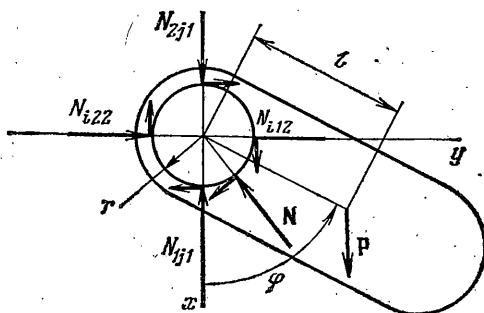
зависит от трения и может менять знак при условии

$$1+f^2 < f_1^2 r^2 m^2 l^2 I^{-2} \quad (2.5)$$

Замечание. Линейные алгебраические уравнения для определения реакций в шаровом шарнире без зазора можно получить заменив шар мно-



Фиг. 2



Фиг. 3

гогранником с треугольными гранями и считая, что в общем случае опирание имеет место по трем вершинам одного из треугольников.

4. Изменим третий пример в части, касающейся представления опорных реакций, для чего разложим неизвестную реакцию N по координатным направлениям и приложим составляющие N_{ij1} , N_{ij2} к фиктивным точкам на пересечении окружности шарнира с координатными осями (фиг. 3). Индекс i соответствует первой паре точек опирания (на оси x), j — второй (на оси y).

Для сохранения эквивалентности такого представления исходной системе сил модуль момента трения определим формулой $M = f_1 r (N_{ij1}^2 + N_{ij2}^2)^{1/2}$. Неизвестные реакции и угловое ускорение найдем из системы уравнений движения маятника

$$\begin{aligned} -ml(\ddot{\varphi}_{ij} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) &= P + (-1)^i N_{ij1} - (-1)^j f N_{ij2} \text{sgn } \dot{\varphi} \\ ml(\ddot{\varphi}_{ij} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) &= (-1)^j N_{ij2} + (-1)^i f N_{ij1} \text{sgn } \dot{\varphi} \\ I\ddot{\varphi}_{ij} &= -Pl \sin \varphi - f_1 r (N_{ij1}^2 + N_{ij2}^2)^{1/2} \text{sgn } \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Эта система уравнений нелинейна, решение ее последовательными приближениями можно начать полагая, например, $f_1 = 0$.

3. Поскольку рассматриваются численные методы, нет необходимости исключать из уравнений движения обобщенные ускорения и приводить систему уравнений для вычисления реакций к виду (1.1). Это уменьшит работу, связанную с составлением уравнений. ЦВМ будет вычислять (с учетом вариантов различного опирания звеньев) ускорения и реакции из общей системы соотношений, полученных в результате расчленения механической системы. Уравнения (2.6), например, записаны рекомендованным здесь образом.

Число вариантов опирания в системе равно произведению числа вариантов в каждой кинематической паре.

В механических системах, где опирание звеньев можно привести к двухсторонней схеме (примеры 1, 2, 4), число вариантов полного опирания и общее число всех вариантов с учетом переходных состояний определяется соответственно формулами $s_0 = 2^{st-n}$, $S = 3^{st-n}$, где t — число подвижных звеньев, n — число степеней свободы.

В системах, где опирание не приведено или не может быть приведено к двухсторонней схеме (пример 3, треугольная призма), количество вариантов опирания может быть еще большим.

Определяя силы трения, нет нужды решать систему (1.1) для каждого варианта опирания. Вычисления можно прекратить, как только будет выполнено равенство (1.2) (или (2.3) в примере 2), если, конечно, есть уверенность в отсутствии самоторможения.

В системах с двухсторонней схемой опирания звеньев можно, задавшись любой комбинацией индексов (а каждый индекс соответствует какой-нибудь паре опорных точек), изменить индексы, соответствующие номерам реакций с неположительными значениями. Таким путем вариант полного опирания может быть найден со второй попытки. Если k реакций окажутся строго равными нулю, то потребуются провести 2^k вычислений, так как соответствующие компоненты функции переключения будут равны 2^{-k} .

Определение варианта опирания можно производить не прибегая к помощи функции переключения. Решая систему (1.1) для каждой возможной комбинации индексов, можно найти реализуемый вариант по условию одновременной неотрицательности нормальных реакций.

Для систем с двухсторонней схемой опирания звеньев реализуемый вариант опирания может быть найден не более чем за две попытки, если после первой попытки изменить индексы, соответствующие номерам реакций с отрицательными значениями.

Этот способ вычисления сил трения, по-видимому, проще для программирования, чем способ, основанный на использовании функции переключения.

Если задаваемые силы в системе непрерывны, знаки относительных скоростей не меняются и самоторможение отсутствует, то можно показать, что, несмотря на различие в коэффициентах трения на разных поверхностях, реализующих связи, силы трения также изменяются непрерывно при смене варианта опирания.

Численный анализ частных примеров показал, что в реализуемом варианте опирания звеньев механической системы алгебраическая сумма нормальных реакций имеет максимум. Наличие отрицательных нормальных реакций в нереализованных вариантах опирания подтверждает свойство максимума, но не доказывает его.

Это свойство, по-видимому, универсально и имеет место как в системах с идеальными связями, так и в системах с сухим трением при отсутствии самоторможения.

Обнаружено также, что обобщенные ускорения достигают экстремальных значений в реализуемом варианте опирания: это может быть минимум или максимум в зависимости от знаков обобщенных сил и скоростей.

Известно, что учет трения может приводить к противоречиям [2]. При произвольных значениях величин a_{ij}^s , входящих в уравнения (1.1), возможны две ситуации.

1. Определитель системы (1.1) не равен нулю ни в одном из вариантов опирания, а также не меняет своего знака ни в одном из вариантов с обращением всех коэффициентов трения в нуль. При этих условиях нет самоторможения, опирание однозначно определено и имеет место равенство (1.2).

2. Определитель системы (1.1) равен нулю для некоторых комбинаций

индексов или меняет знак при обращении всех коэффициентов трения в нуль. Это есть необходимое условие самоторможения. Рассмотрим данную ситуацию подробнее.

Пусть известны инерционные и активные силы, действующие в системе, т. е. известны правые части b_i в уравнениях (1.1). И пусть они не равны нулю все одновременно. Тогда они определяют какой-то вариант опирания.

Меняя какие-либо параметры, от которых зависят величины a_{ij} , устремим $\det \|a_{ij}\|$ к нулю для этого варианта. При этом реакции N_i устремятся в бесконечность. Очевидно, что имеет место самоторможение.

Если изменять и дальше параметры в том же направлении, то определитель поменяет знак и реакции сделаются отрицательными. Это и подавно будет означать самоторможение, только реализуется оно с меньшими значениями коэффициентов трения: как раз с такими, при которых реакции бесконечны.

Поэтому, если нет ни одного варианта опирания со всеми неотрицательными реакциями или реакции для какого-либо варианта уходят в бесконечность, то это свидетельствует о самоторможении.

Может случиться, что будет иметь место одновременно несколько вариантов опирания со всеми положительными реакциями (парадокс неоднозначности). Если при этом для одного из этих вариантов определитель не поменяет знака с обращением всех коэффициентов трения в нуль, то реализуется именно этот вариант опирания и система движется с непрерывным изменением скоростей. Если же ни один из соответствующих определителей не сохраняет знак, то имеет место самоторможение.

Учет трения в шарнирах и подшипниках без зазоров приводит к нелинейным уравнениям (пример 4). Сходимость процесса итераций в таких системах ухудшается с приближением к самоторможению. Если итерации расходятся в некоторых вариантах опирания, то для решения вопроса о самоторможении следует перейти к линейной схеме опирания с последовательным перебором вариантов (пример 3).

Касаясь приведенных здесь примеров, заметим, что самоторможение призмы сопровождается ее перекосом и может иметь место при реальных величинах коэффициентов трения, если продольные размеры призмы значительно меньше поперечных.

Необходимое условие самоторможения маятника в обоих примерах одинаково и обобщает неравенство (2.5) $1 + f^2 \leq f_1^2 r^2 m^2 l^2 I^{-2}$.

Утверждения п. 3 получены при анализе частных примеров, доказательства их в общем виде не имеется.

Структура уравнений, описывающих непрерывное движение, в точности сохраняется и для импульсных воздействий. Они позволяют находить импульсы нормальных реакций, импульсы трения и изменения обобщенных скоростей для реализуемого в момент удара варианта опирания. При этом считается, что после прекращения действия первоначальных импульсов нагруженные опорные точки отскакивают от опорных поверхностей с импульсами реакций, умноженными на соответствующие коэффициенты восстановления, которые трактуются как отношения импульсов разгрузки к импульсам нагрузки. Эти новые импульсы уже рассматриваются как задаваемые, и они приведут к нагружению других опорных точек и к новому изменению обобщенных скоростей. Вычисления многократно повторяются, пока модули изменений скоростей не станут меньше наперед заданных значений. Изменения скоростей при этом суммируются.

Автор искренне благодарен Л. А. Толоконникову за большую помощь в работе и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Appell P.* Extension des equations de Lagrange au cas du frottement de glissement, C. r. Acad. Sci. Paris, CXIV, 1892, v. 114, p. 331–334.
2. *Паньлеев П.* Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
3. *Кузнецов Б. Г.* Обобщенные виртуальные перемещения. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 4, с. 672–680.
4. *Четаев Н. Г.* О некоторых связях с трением. — ПММ, 1960, т. 24, вып. 1, с. 35–38.
5. *Румянцев В. В.* О движении некоторых систем с неидеальными связями. — Вестн. МГУ, 1961, № 5, с. 67–76.
6. *Румянцев В. В.* О системах с трением. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 6, с. 969–977.
7. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
8. *Пожарицкий Г. К.* Распространение принципа Гаусса на системы с сухим трением. — ПММ, 1961, т. 25, вып. 3, с. 391–406.
9. *Смирнов Ю. П.* Об уравнениях движения механических систем с сухим трением: Сб. научн. метод. статей по теор. механ. М.: Высш. школа, 1977, вып. 8, с. 39–44.
10. *Смирнов Ю. П.* Об уравнениях динамики систем с трением: Сб. научн. метод. статей по теор. механ. М.: Высш. школа, 1981, вып. 11, с. 184–188.
11. *Смирнов Ю. П.* О движении плоского физического маятника с трением в шарнире. — Проблемы механики управляемого движения: Межвузовский сб. научн. тр. Пермь: Пермский ун-т, 1982, с. 161–170.

Тула

Поступила в редакцию
27.III.1981