

УДК 531.384

## О КАЧЕНИИ ЭЛЛИпсоИДА ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

МАРКЕЕВ А. П.

Задача о движении тяжелого твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости, касаясь ее одной своей точкой, проинтегрирована при произвольных начальных условиях только в некоторых частных случаях. Точные решения известны для однородного шара [1, 2], круглого диска [3–7], тела вращения [3] и неоднородного шара, центр тяжести которого совпадает с его геометрическим центром [8]. Для трехосного эллипсоида задача сведена к квадратурам в частном случае, когда точка касания эллипсоида и плоскости описывает на поверхности эллипсоида одно из его главных сечений [7]. В публикуемой работе движение эллипсоида исследуется методом усреднения. Предполагается, что движение происходит в поле тяжести, эллипсоид однороден и имеет почти сферическую поверхность. Показано, что в первом приближении по малому параметру, характеризующему различие в длинах полуосей эллипсоида, движение относительно центра тяжести складывается из движения Эйлера — Пуансо (с измененным масштабом времени, зависящим от начальных условий) вокруг вектора кинетического момента и прецессионного движения самого этого вектора вокруг вертикали. Подробно рассмотрены важнейшие частные случаи движения. Дан анализ следов точки касания на поверхности эллипсоида и на плоскости качения.

1. Пусть твердое тело под действием силы тяжести движется без скольжения по горизонтальной плоскости. Поверхность, ограничивающая твердое тело, предполагается выпуклой, так что имеется только одна точка соприкосновения твердого тела и плоскости и в этой точке поверхность, ограничивающая твердое тело, имеет вполне определенную касательную плоскость. Тем самым исключаются поверхности, имеющие заострения, ребра и т. п.

Задача о движении твердого тела по плоскости состоит в том, чтобы по заданному начальному кинематическому состоянию тела найти в зависимости от времени его положение в пространстве и реакцию плоскости. Для полного уяснения геометрической картины движения целесообразно также найти след точки касания на плоскости и на поверхности, ограничивающей тело.

Подчеркнем, что нахождение реакции плоскости должно быть необходимой составной частью решения задачи. Во-первых, при обращении нормальной реакции в нуль тело может оторваться от плоскости, а во-вторых, не всегда при заданном коэффициенте трения в точке касания твердого тела и плоскости может быть развита сила трения, достаточно большая для того, чтобы удержать тело от проскальзывания.

Движение твердого тела будем рассматривать по отношению к неподвижной системе координат  $OXYZ$  с началом  $O$  в некоторой точке горизонтальной плоскости и осью  $OZ$ , направленной вертикально вверх. Единичный вектор этой оси обозначим  $-n$ . Если  $P$  — точка касания поверхности твердого тела и плоскости, то  $n$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности твердого тела, построенный в точке  $P$ . С твердым телом свяжем систему координат  $Sx_1x_2x_3$  с началом в его центре тяжести и осями, направленными по главным центральным осям инерции тела. Пусть уравнение поверхности, ограничивающей тело, записано в виде  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  и

$$n = \text{grad } f / |\text{grad } f| \quad (1.1)$$

Следуя [9, 10], введем двенадцать неизвестных функций времени  $t$ : три координаты  $x_c, y_c, z_c$  центра тяжести и три угла (например, углы Эйлера), определяющих ориентацию тела относительно абсолютного пространства; три компоненты  $x_1, x_2, x_3$  радиус-вектора  $\mathbf{r}$  точки соприкосновения тела и плоскости относительно центра тяжести; три компоненты реакции плоскости  $\mathbf{R}$ .

Пусть  $\boldsymbol{\omega}$  — мгновенная угловая скорость тела,  $\mathbf{v}_c$  — скорость его центра тяжести,  $\mathbf{G}$  — кинетический момент тела относительно центра тяжести,  $g$  — ускорение свободного падения, массу тела примем единичной.

Составим следующие двенадцать уравнений: шесть уравнений, выражающих теоремы об изменении количества движения и кинетического момента

$$\mathbf{v}_c \cdot + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_c = g\mathbf{n} + \mathbf{R} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{G} \cdot + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{G} = \mathbf{M} \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$  — момент реакции плоскости относительно центра тяжести; три уравнения — условие отсутствия скольжения

$$\mathbf{v}_c + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (1.4)$$

уравнение поверхности, ограничивающей тело

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad (1.5)$$

два скалярных уравнения относительно  $x_1, x_2, x_3$ , к которым в силу очевидного геометрического тождества  $\mathbf{n}^2 = 1$  сводится векторное уравнение Пуассона

$$\mathbf{n} \cdot + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.6)$$

показывающее, что вектор  $\mathbf{n}$  определяет неизменное направление в абсолютном пространстве.

Если решение системы уравнений (1.2) — (1.6) найдено, то для завершения решения задачи о движении твердого тела по плоскости остается только найти углы, определяющие ориентацию тела относительно абсолютного пространства и уравнение следа точки касания на неподвижной плоскости, что можно сделать опираясь на кинематические уравнения Эйлера и геометрические соотношения между неподвижной и связанной системами координат.

Из (1.2) и (1.4) найдем выражение для реакции плоскости

$$\mathbf{R} = -[\mathbf{g}\mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \cdot \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \cdot + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \quad (1.7)$$

Подставив выражение (1.7) в формулу для момента  $\mathbf{M}$ , получим замкнутую систему уравнений (1.3), (1.6), не содержащую реакцию плоскости.

Пусть  $A_i$  — моменты инерции тела относительно осей  $Cx_i$  ( $i=1, 2, 3$ ), а  $\omega_i$  — проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  на эти оси. Тогда проекции  $G_i$  вектора  $\mathbf{G}$  на оси  $Cx_i$  равны  $A_i \omega_i$  и уравнения (1.3) и (1.6) представляют собой систему шести дифференциальных уравнений относительно  $\omega_i$  и координат  $x_i$  точки касания твердого тела и плоскости, через которые из (1.1) и (1.5) выражаются компоненты вектора  $\mathbf{n}$ , входящего в уравнения (1.6). Исследование системы уравнений (1.3) и (1.6) — основная и наиболее трудная часть решения задачи о движении без скольжения тяжелого твердого тела по горизонтальной плоскости. Соотношение (1.7) может служить для определения реакции плоскости.

2. Если твердое тело представляет собой однородный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 + x_3^2/a_3^2 = 1 \quad (2.1)$$

то система уравнений (1.3) и (1.6) в скалярной форме запишется так:

$$A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 = g a_1^2 (a_3^2 - a_2^2) x_2 x_3 / \Delta + \quad (2.2)$$

$$+ (x_1 \dot{+} \omega_2 x_3 - \omega_3 x_2) (\omega \cdot r) - \omega_1 \dot{r}^2 + x_1 (\omega \cdot r) - \omega_1 (r \cdot r) \\ x_1 \dot{=} \omega_3 x_2 - \omega_2 x_3 + (a_1^2 - a_3^2) (x_1^2 - a_1^2) \omega_2 x_3 / (a_1^2 a_3^2) + \quad (2.3)$$

$$+ (a_2^2 - a_1^2) (x_1^2 - a_1^2) \omega_3 x_2 / (a_2^2 a_1^2) + (a_3^2 - a_2^2) x_1 x_2 x_3 \omega_1 / (a_3^2 a_2^2)$$

Следует добавить еще четыре уравнения, получающиеся из (2.2) и (2.3) при помощи циклической перестановки индексов (1 2 3). В (2.2) введено обозначение  $\Delta = (a_2^4 a_3^4 x_1^2 + a_3^4 a_1^4 x_2^2 + a_1^4 a_2^4 x_3^2)^{1/2}$ , моменты инерции  $A_i$  вычисляются по формулам

$$A_1 = 1/5 (a_2^2 + a_3^2), \quad A_2 = 1/5 (a_3^2 + a_1^2), \quad A_3 = 1/5 (a_1^2 + a_2^2)$$

Уравнения (2.3) зависимы в силу тождества (2.1).

Пусть поверхность эллипсоида мало отличается от сферы радиуса  $a$ . Положим  $\varepsilon = \max_{i,j} \{|a_i - a_j|/a\}$  и исследуем движение эллипсоида при малых значениях  $\varepsilon$ . Сделав в (2.1) – (2.3) замену переменных

$$x_i = a y_i \quad (2.4)$$

и отбросив члены выше первого порядка малости по  $\varepsilon$ , получим следующую систему уравнений:

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \quad (2.5)$$

$$A_1 \dot{\omega}_1 + 5/7 f_1 = 0 \quad (2.6)$$

$$y_1 \dot{=} \omega_3 y_2 - \omega_2 y_3 + g_1 \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$f_1 = (A_3 - A_2) [\omega_2 \omega_3 y_1^2 + 2\omega_1^2 y_2 y_3 + 2\omega_1 (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3) y_1 y_2 y_3 + \\ + 2g y_2 y_3 / a + 2\omega_2 \omega_3] + (A_1 - A_3) [\omega_3 \omega_1 y_1 y_2 + 2\omega_2 \omega_1 y_1 y_3 + \\ + 2\omega_2 (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3) (y_1^2 - 1) y_3] + (A_2 - A_1) [\omega_1 \omega_2 y_1 y_3 + 2\omega_3 \omega_1 y_1 y_2 + \\ + 2\omega_3 (\omega_1 y_1 + \omega_2 y_2 + \omega_3 y_3) (y_1^2 - 1) y_2] \quad (2.8)$$

$$g_1 = [2(a_3 - a_2) y_1 y_2 y_3 \omega_1 + (a_1 - a_3) (2y_1^2 - 1) y_3 \omega_2 + (a_2 - a_1) (2y_1^2 - 1) y_2 \omega_3] / a$$

К уравнениям (2.6) и (2.7) следует добавить еще по два аналогичных уравнения, получающихся из (2.6) и (2.7) при помощи циклической перестановки индексов (1 2 3).

При  $\varepsilon = 0$  уравнения (2.5) – (2.7) описывают движение шара. Решение задачи о катании шара по горизонтальной плоскости хорошо известно [10]. Есть частное решение – чистое вращение, для которого центр шара неподвижен, а сам шар вращается вокруг вертикали с постоянной угловой скоростью. Это частное решение существует и для произвольного однородного эллипсоида. В общем случае катания шара вектор  $\omega$  постоянен по величине и направлению; центр тяжести движется равномерно и прямолинейно в направлении, перпендикулярном  $\omega$ ; нормальная реакция плоскости равна весу шара, а сила трения равна нулю; след точки касания на плоскости – прямая линия, а на поверхности шара – окружность, плоскость которой перпендикулярна  $\omega$  и отстоит от центра шара на постоянном расстоянии. При  $\varepsilon \neq 0$  это движение шара примем за порождающее и возмущенное движение будем исследовать методом усреднения [11].

Для эффективного проведения исследования решающее значение имеет выбор переменных, в которых записаны уравнения возмущенного движения. Величины  $\omega_i$  в (2.6), (2.7) имеют ясный механический смысл и являются медленными переменными. Величины же  $y_i$  в невозмущенном движении – довольно громоздкие функции времени и, кроме того, все они являются быстрыми переменными. Введем в системе уравнений (2.6), (2.7)

вместо  $y_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) новые переменные  $\zeta, \rho, \gamma$  при помощи следующих двух замен переменных.

Во-первых, введем переменные  $\xi, \eta, \zeta$  по формулам

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \beta & \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} / \omega, \quad \cos \alpha = \omega_3 / \omega, \quad \sin \beta = \omega_2 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \quad (2.11)$$

$$\cos \beta = \omega_1 / \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}, \quad \omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$$

Замена переменных (2.10) осуществляет переход от системы координат  $Cy_1y_2y_3$  к системе координат  $C\xi\eta\zeta$ . Ось  $C\zeta$  направлена параллельно вектору  $\omega$ , ось  $C\xi$  перпендикулярна плоскости  $Cy_1\zeta$ , а ось  $C\eta$  составляет тупой угол с осью  $Cy_1$ . Величины  $\alpha$  и  $\beta$  — углы между вектором  $\omega$  и осью  $Cy_3$  и проекцией  $\omega$  на плоскость  $Cy_1y_2$  и осью  $Cy_1$  соответственно.

Во-вторых, вместо переменных  $\xi, \eta$  введем переменные  $\rho, \gamma$  по формулам

$$\xi = \rho \sin \gamma, \quad \eta = \rho \cos \gamma \quad (2.12)$$

Новые переменные имеют ясный механический и геометрический смысл. В невозмущенном движении  $\zeta, \rho$  и  $\gamma$  постоянны,  $\rho$  — радиус окружности — следа точки касания на поверхности шара,  $|\zeta|$  — расстояние от плоскости этой окружности до центра шара,  $\gamma$  — угол между радиус-вектором точки касания относительно центра окружности — следа и фиксированным в ее плоскости направлением, причем  $\dot{\gamma}$  — угловая скорость  $\omega$  движения точки касания  $P$  по ее следу.

Уравнение (2.5) в новых переменных запишется так:

$$\zeta^2 + \rho^2 = 1 \quad (2.13)$$

Из (2.7) после замены переменных по формулам (2.10) — (2.12) получаем в первом приближении

$$\begin{aligned} \dot{\zeta} = & [(a_3 - a_2) \omega_3 \omega_2 y_1 + (a_1 - a_3) \omega_1 \omega_3 y_2 + (a_2 - a_1) \omega_2 \omega_1 y_3] h_1 + \\ & + [(a_3 - a_2) \omega_1 y_2 y_3 + (a_1 - a_3) \omega_2 y_3 y_1 + (a_2 - a_1) \omega_3 y_1 y_2] h_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\dot{\gamma} = \omega - \frac{\cos \gamma F_1 + \sin \gamma F_2}{\omega \rho}, \quad h_1 = \frac{14 - 15 \zeta^2}{7 \omega a} \quad (2.15)$$

$$h_2 = 2 \zeta [2 - 5 \zeta^2 - 5g / (\omega^2 a)] / 7a$$

$$F_1 = \omega_1 (\operatorname{ctg} \alpha \eta + \xi) \sin \beta - \omega_2 (\operatorname{ctg} \alpha \eta + \xi) \cos \beta - \omega \sin \beta g_1 + \omega \cos \beta g_2$$

$$F_2 = \omega_1 (\operatorname{ctg} \alpha \sin \beta \xi - \cos \alpha \cos \beta \zeta) - \omega_2 (\operatorname{ctg} \alpha \cos \beta \xi + \cos \alpha \sin \beta \zeta) + \\ + \omega_3 (\sin \alpha \zeta + \omega \cos \alpha \cos \beta g_1 + \omega \cos \alpha \sin \beta g_2 - \omega \sin \alpha g_3)$$

В (2.14), (2.15) величины  $y_i, \xi, \eta, \alpha, \beta$  должны быть выражены через  $\omega_i, \zeta, \rho, \gamma$  по формулам (2.10) — (2.12).

Система дифференциальных уравнений возмущенного движения (2.6), (2.14), (2.15) имеет форму, удобную для применения метода усреднения. В ней четыре переменных  $\zeta, \omega_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) медленные и одна  $\gamma$  — быстрая.

При нахождении следа точки касания  $P$  на плоскости потребуются угол  $\delta$  между касательной к следу точки  $P$  на плоскости и осью  $OX$  неподвижной системы координат. Этот угол в силу отсутствия скольжения равен углу между вектором скорости  $v$  перемещения точки  $P$  по ее следу на поверхности эллипсоида и осью  $OX$ . В невозмущенном движении угол  $\delta$  постоянен, а в возмущенном он будет медленно эволюционировать. Согласно [7]

$$\dot{\delta} = \omega_b - k_g v \quad (2.16)$$

где  $\omega_s = -(\omega \cdot n)$  — угловая скорость вращения эллипсоида,  $k_g$  — геодезическая кривизна следа точки  $P$  на его поверхности.

Пусть  $w$  — вектор ускорения точки  $P$  при ее перемещении по следу на эллипсоиде,  $k$  — кривизна, а  $Q$  — центр кривизны этого следа, вычисленные для точки касания. Тогда [12]:

$$PQ = \frac{v^2}{(v \times w)^2} (v \times w) \times v, \quad k = \frac{w \sin(v, w)}{v^2}, \quad k_g = k \sin(PQ, n)$$

Опираясь на (1.1), (2.4), (2.4), (2.7), из (2.16) получаем с точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$

$$\begin{aligned} \delta^* = & [(a_1 - a_3) \omega_3 \omega_1 y_2^* + (a_2 - a_1) \omega_1 \omega_2 y_3^* + (a_3 - a_2) \omega_2 \omega_3 y_1^*] / (\omega^2 \rho^2 a) + \\ & + \zeta [(a_1 - a_3) (y_1^* y_3^* + y_1 y_3^*) \omega_2 + (a_2 - a_1) (y_2^* y_1^* + y_2 y_1^*) \omega_3 + \\ & + (a_3 - a_2) (y_3^* y_2^* + y_3 y_2^*) \omega_1] / (\omega \rho^2 a) + [(\omega_1 - \omega \zeta y_1) g_1^* + \\ & + (\omega_2 - \omega \zeta y_2) g_2^* + (\omega_3 - \omega \zeta y_3) g_3^* + \omega_1^* (\omega_2 y_3 - \omega_3 y_2) + \\ & + \omega_2^* (\omega_3 y_1 - \omega_1 y_3) + \omega_3^* (\omega_1 y_2 - \omega_2 y_1)] / (\omega^2 \rho^2). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Здесь  $\omega_i^*$  должны быть определены из (2.6), а  $g_i$  — из (2.9). Если затем  $y_i$  выразить через  $\zeta$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$  согласно (2.10) — (2.12), то правая часть уравнения (2.17) будет функцией переменных  $\omega_i$ ,  $\zeta$ ,  $\rho$ ,  $\gamma$ , причем по углу  $\gamma$  она будет  $2\pi$ -периодической.

3. Для получения решения в первом приближении надо усреднить по  $\gamma$  функции  $f_i$  в (2.6) и правую часть уравнения (2.14). Система уравнений первого приближения будет такой:

$$\begin{aligned} A_1 \omega_1^* + {}^{1/4} F(\rho, \omega) (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ A_2 \omega_2^* + {}^{1/4} F(\rho, \omega) (A_1 - A_3) \omega_3 \omega_1 &= 0 \\ A_3 \omega_3^* + {}^{1/4} F(\rho, \omega) (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \\ \zeta^* &= 0, \quad \gamma^* = \omega \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$F(\rho, \omega) = 10\rho^4 - 5(6\sigma + 5)\rho^2 + 4(5\sigma + 6), \quad \sigma = g / (\omega^2 a)$$

Величины  $\zeta$  и  $\rho$  связаны соотношением (2.13).

Усреднив правую часть уравнения (2.17), получим

$$\delta^* = 5\sigma \zeta [(a_2 + a_3 - 2a_1) \omega_1^2 + (a_3 + a_1 - 2a_2) \omega_2^2 + (a_1 + a_2 - 2a_3) \omega_3^2] / (7\omega a) \quad (3.2)$$

Решение усредненных уравнений (3.1), (3.2) аппроксимирует точное решение на интервале времени порядка  $\varepsilon^{-1}$  с погрешностью порядка  $\varepsilon$  для переменных  $\omega_i$ ,  $\zeta$ ,  $\delta$  и с погрешностью порядка единицы для  $\gamma$ .

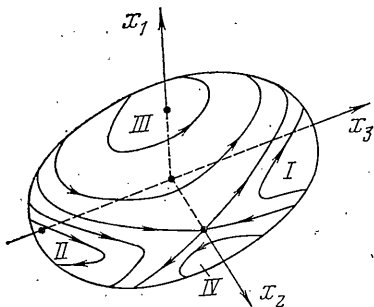
Согласно (3.1) и (2.13), величины  $\zeta$  и  $\rho$  в первом приближении постоянны. Далее, из (3.1) следует, что производная  $\dot{\omega}$  равна нулю с погрешностью порядка  $\varepsilon^2$ . Поэтому, замечая еще, что в (3.1) функция  $F(\rho, \omega)$  умножается на разности моментов инерции, которые сами являются величинами первого порядка малости, можно, не увеличивая погрешности аппроксимации точных решений приближенными, в функции  $F(\rho, \omega)$  положить величину  $\omega$  равной  $\omega_0$ . Здесь и в дальнейшем индексом нуль обозначаются начальные значения соответствующих переменных.

Функция  $F(\rho_0, \omega_0)$  обращается в нуль, если между  $\omega_0$  и  $\rho_0$  существует соотношение

$$\omega_0^2 = 10(3\rho_0^2 - 2)g / [(10\rho_0^4 - 25\rho_0^2 + 24)a] \quad (3.3)$$

что возможно, если одновременно  $\rho_0 > \sqrt{2/3}$  и  $\omega_0 < {}^{1/3} \sqrt{10g/a}$ . При выполнении равенства (3.3) вектор  $\omega$  будет в первом приближении постоянен относительно эллипсоида (и относительно абсолютного пространства).

Пусть  $F(\rho_0, \omega_0) \neq 0$ . Опираясь на интерпретацию Пуансо [13], можно дать следующее геометрическое представление движения, описываемого усредненной системой уравнений. Пусть векторы  $\omega$  и  $G$  отложены от центра тяжести эллипсоида. При движении по плоскости эллипсоид совершает относительно вектора  $G$  движение Эйлера — Пуансо, в котором «временем» является величина  $^{1/14}F(\rho_0, \omega_0)t$ . Вектор  $G$  имеет постоянную длину и, как показывают не приводящиеся здесь для краткости вычисления, медленно прецессирует вокруг вертикали, оставаясь от нее на неизменном угловом расстоянии  $\mu$ , определяемом начальными условиями. Угловая скорость прецессии равна  $\rho^2 \delta^* / (\sin^2 \mu)$ , где  $\delta^*$  определяется из (3.2); когда  $\delta^* = 0$ , т. е. когда след точки касания  $P$  на



Фиг. 1

плоскости — прямая линия, вектор  $G$  движется поступательно со скоростью центра тяжести.

Вместе с вектором  $G$  движется воображаемая плоскость (плоскость Пуансо), перпендикулярная  $G$  и отстоящая от центра тяжести на постоянном расстоянии  $\sqrt{2T/G}$  ( $T$  — кинетическая энергия движения эллипсоида относительно центра тяжести). Воображаемая поверхность  $A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2 = 1$  (эллипсоид инерции) катится по этой плоскости без скольжения. Направление  $\omega$  описывает на эллипсоиде инерции полодии, а на плоскости Пуансо — герполодии.

Из (2.4), (2.10) и (2.11) следует, что точка  $P$  соприкосновения нашего реального эллипсоида и горизонтальной плоскости в каждый момент времени находится в плоскости, задаваемой уравнением

$$x_1 \omega_1 / (a_1 \omega_0) + x_2 \omega_2 / (a_2 \omega_0) + x_3 \omega_3 / (a_3 \omega_0) = \xi_0 \quad (3.4)$$

Если пренебречь величинами порядка  $\epsilon$ , то можно утверждать, что эта плоскость находится на постоянном расстоянии  $|\xi_0|a$  от центра тяжести эллипсоида и медленно эволюционирует оставаясь перпендикулярной вектору  $\omega$  и тем самым отслеживая движение  $\omega$  по конусу полодии.

4. Остановимся подробнее на анализе движения, описываемого усредненной системой уравнений (3.1), (3.2).

Пусть  $a_1 < a_2 < a_3$ . Тогда  $A_1 > A_2 > A_3$  и выполняются неравенства  $2TA_1 \geq G^2 \geq 2TA_3$ . На фиг. 1 представлена картина расположения полодий на эллипсоиде инерции [13, 14]. Все полодии разбиваются плоскостями

$$x_1 = \pm (A_3(A_2 - A_3) / [A_1(A_1 - A_2)])^{1/2} x_3 \quad (4.1)$$

проходящими через среднюю ось эллипсоида на четыре области. Для полодий в областях I, II и III, IV выполняются неравенства  $2TA_2 > G^2 \geq 2TA_3$  и  $2TA_1 \geq G^2 > 2TA_2$  соответственно. В сечениях (4.1), соответствующих равенству  $G^2 = 2TA_2$ , получаются распадающиеся полодии — дуги эллипсов. Эти полодии являются сепаратрисами, разделяющими области с отличающимся характером поведения полодий. В вершинах эллипсоида инерции полодии вырождаются в точки, соответствующие перманентным вращениям эллипсоида (2.1) вокруг его главных осей, причем вращения вокруг наибольшей и наименьшей из осей устойчивы, а вращения вокруг средней оси неустойчивы. При построении на фиг. 1 принято, что  $F(\rho_0, \omega_0) > 0$ ; если  $F(\rho_0, \omega_0) < 0$ , то направление движения вектора  $\omega$ , показанное на фиг. 1 стрелками, изменится на обратное.

Рассмотрим движение эллипсоида (2.1) для случая, соответствующего расположению полодий в области I (движение для остальных областей рассматривается аналогично). Решение уравнений (3.1) таково [6, 14]:

$$\omega_1 = \mp \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{cn} \tau, \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\frac{G^2 - 2TA_3}{A_2(A_2 - A_3)}} \operatorname{sn} \tau, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2TA_1 - G^2}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{dn} \tau$$

$$\tau = \frac{1}{14} \sqrt{\frac{(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)}{A_1 A_2 A_3}} F(\rho_0, \omega_0)(t - t_0)$$

Модуль эллиптических функций, входящих в (4.2), определяется по формуле

$$k^2 = (A_1 - A_2)(G^2 - 2TA_3) / [(A_2 - A_3)(2TA_1 - G^2)]$$

В (4.2) одновременно берутся либо только верхние, либо только нижние знаки.

Уравнения движения точки касания  $P$  по поверхности эллипсоида (2.1) определяются по формулам (2.4), (2.10), (2.11), в которые надо вместо  $\omega_i$  подставить их выражения (4.2). Геометрический характер следа точки  $P$  на поверхности эллипсоида удобнее, однако, получить геометрическим же способом, основанном на замечании в конце п. 3.

Находя след и место его расположения на поверхности эллипсоида с погрешностью порядка  $\varepsilon$ , можно принять эллипсоид (2.1) за шар радиуса  $a$ . На фиг. 2 изображено сечение шара плоскостью, проходящей через отложенный от его центра вектор  $\omega$  и ось  $Cx_3$ . Угол  $\alpha$  в соответствии с (2.11) и (4.2) удовлетворяет соотношению

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{2TA_1 - G^2}{\omega_0^2 A_3 (A_1 - A_3)} (1 - k^2 \sin^2 \tau)} \quad (4.3)$$

При перемещении вектора  $\omega$  по конусу полюдии угол  $\alpha$  медленно изменяется между своими минимальным и максимальным значениями  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые достигаются при прохождении  $\omega$  в плоскостях  $Cx_1x_3$  и  $Cx_2x_3$  соответственно (фиг. 1), причем согласно (4.3)

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{1 - \frac{2TA_1 - G^2}{\omega_0^2 A_3 (A_1 - A_3)}}, \quad \sin \alpha_2 = \sqrt{1 - \frac{2TA_1 - G^2}{\omega_0^2 A_3 (A_1 - A_3)} (1 - k^2)}$$

На фиг. 2 показано также сечение шара радиуса  $|\xi_0|a$  с центром в точке  $C$ . Во время движения эллипсоида плоскость (3.4) касается этого шара. На фиг. 2 отрезок  $MN$  есть проекция линии пересечения эллипсоида и плоскости (3.4). При движении эллипсоида точка  $P$  быстро перемещается по следу на его поверхности, а проекция точки  $P$  быстро движется по отрезку  $MN$  (на фиг. 2 от  $M$  к  $N$ ). Сам же отрезок  $MN$  медленно прецессирует вокруг оси  $Cx_3$ , так как, перемещаясь по конусу полюдии, вектор  $\omega$  медленно вращается вокруг  $Cx_3$ . Одновременно отрезок  $MN$ , из-за изменения угла  $\alpha$ , медленно колеблется относительно прецессирующей вместе с  $MN$  оси, перпендикулярной плоскости фиг. 2 и проходящей через точку  $C$ .

Из сказанного следует, что точка касания  $P$  будет находиться в полосе поверхности эллипсоида, заключенной между двумя граничными кривыми, показанными на фиг. 3. Минимальная и максимальная ширина полосы, в которой расположен след точки касания  $P$  эллипсоида и плоскости, достигаются в плоскостях  $Cx_1x_3$  и  $Cx_2x_3$  и равны соответственно  $2\rho_0 a \sin \alpha_1$  и  $2\rho_0 a \sin \alpha_2$ . Точки нижней (при меньших значениях  $x_3$  на фиг. 3) границы полосы, отвечающие ее минимальной и максимальной ширине, отстоят от главного сечения эллипсоида  $Cx_1x_2$  на расстояниях  $(\rho_0 \sin \alpha_1 + |\xi_0| \cos \alpha_1)a$  и  $(\rho_0 \sin \alpha_2 + |\xi_0| \cos \alpha_2)a$  соответственно. При движении эллипсоида точка  $P$  быстро перемещается в заштрихованной на фиг. 3 полосе, попеременно касаясь то одной, то другой граничной кривой. За время порядка  $\varepsilon^{-1}$  указанная полоса будет заполнена густой сетью, описанной следом точки  $P$  на поверхности эллипсоида.

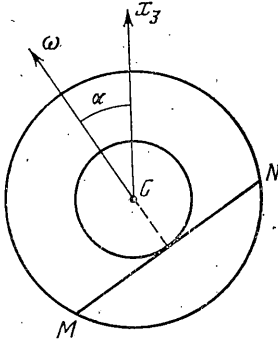
Найдем теперь след точки  $P$  на горизонтальной плоскости. Для этого перейдем сначала в уравнении (3.2) к новой независимой переменной — длине дуги  $s$  следа точки  $P$  на плоскости (или на эллипсоиде, что то же

самое, так как скольжение отсутствует). Тогда, учитывая, что скорость  $s$  точки  $P$  по ее следу с погрешностью порядка  $\varepsilon$  равна  $\rho_0 a \omega_0$ , подставляя  $\omega_0$  из (4.2) в (3.2) и производя преобразования выражений, содержащих эллиптические функции, получаем в первом приближении

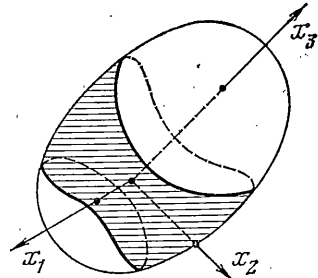
$$d\delta/ds = 5\sigma\kappa / (7\rho_0\omega_0^2 a^2) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \kappa = \zeta_0 \{ & (\omega_{10}^2 + (a_3 - a_2) / (a_3 - a_1) \omega_{20}^2) + \\ & + (a_1 + a_2 - 2a_3) [\omega_{30}^2 + (a_2 - a_1) / (a_3 - a_1) \omega_{20}^2] \} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.4) видно, что если  $\kappa = 0$ , то следом точки касания на плоскости будет прямая линия. Согласно (4.5), это возможно, когда  $\zeta_0 = 0$  (например, когда эллипсоид при движении по плоскости касается ее своим главным сечением), а также, когда между длинами полуосей эллипсоида и началь-



Фиг. 2



Фиг. 3

ными значениями  $\omega_{10}$  существует соотношение, обращающее в нуль фигурную скобку в (4.5).

Пусть  $\kappa \neq 0$ . Обозначим через  $X$  и  $Y$  координаты точки  $P$  на неподвижной плоскости  $OXY$ . Тогда

$$dX/ds = \cos \delta, \quad dY/ds = \sin \delta \quad (4.6)$$

Из (4.4), полагая без ограничения общности  $\delta_0 = 0$ , получаем

$$\delta = 5\sigma\kappa s / (7\rho_0\omega_0^2 a^2) \quad (4.7)$$

Подставив (4.7) в (4.6), произведя интегрирование и исключение параметра  $s$ , получим, что след точки  $P$  на плоскости лежит на окружности

$$(X - X_0)^2 + \left( Y - Y_0 - \frac{7\rho_0\omega_0^2 a^2}{5\sigma\kappa} \right)^2 = \left( \frac{7\rho_0\omega_0^2 a^2}{5\sigma\kappa} \right)^2 \quad (4.8)$$

При положительном  $\kappa$  движение точки  $P$  по окружности (4.8) происходит против часовой стрелки, а при отрицательном — по часовой.

В частном случае, соответствующем перманентному вращению вокруг оси  $Cx_3$ :

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30} \quad (4.9)$$

И, согласно (3.4), следом точки касания на поверхности эллипсоида будет эллипс, лежащий в сечении эллипсоида (2.1) плоскостью  $x_3 = \zeta_0 a_3$ . Далее, из (4.9) и (4.5) — (4.8) получаем, что если  $\zeta_0(a_1 + a_2 - 2a_3) = 0$ , то следом точки касания на плоскости будет прямая линия, а если  $\zeta_0(a_1 + a_2 - 2a_3) \neq 0$  — окружность радиуса  $7\rho_0\omega_0^2 a^2 / [5\sigma |\zeta_0(a_1 + a_2 - 2a_3)|]$ . Движение точки касания по этой окружности происходит против часовой стрелки при положительной величине  $\zeta_0(a_1 + a_2 - 2a_3)$  и по часовой — при отрицательной.

5. Пусть эллипсоид (2.1) будет эллипсоидом вращения ( $a_1 = a_2$ ). Тогда в первом приближении его движение относительно центра тяжести будет



регулярной прецессией. Угол  $\alpha$  между вектором  $\omega$  и осью  $Cx_3$  постоянен

$$\alpha = \alpha_0 = \arccos(\omega_{30}/\omega_0) \quad (5.1)$$

Полодии представляют собой окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси  $Cx_3$ ; любая ось, лежащая в плоскости  $x_3=0$ , является осью перманентных вращений.

Аналогично п. 4 можно провести анализ следа точки касания эллипсоида (2.1) и горизонтальной плоскости, по которой он катится. На эллипсоиде след будет заключен в полосу, которая в отличие от общего случая несимметричного эллипсоида будет иметь постоянную ширину, равную (с погрешностью порядка  $\varepsilon$ )  $2\rho_0 a \sin \alpha_0$ .

Из (4.5), (4.7) получаем при  $a_1 = a_2$

$$\delta = 5\sigma \zeta_0 (a_3 - a_2) (3 \sin^2 \alpha_0 - 2) s / (7\rho_0 a^2) \quad (5.2)$$

Отсюда следует, что след точки касания на плоскости  $OXY$  будет прямой линией не только при  $\zeta_0 = 0$  или  $a_3 = a_2$ , но и в случае, когда  $\sin \alpha_0 = \sqrt{2/3}$ , который полностью определяется начальной ориентацией вектора  $\omega$  относительно эллипсоида. Во всех остальных случаях следом точки касания на плоскости будет окружность радиуса  $7\rho_0 a^2 / [5\sigma |\zeta_0 (a_3 - a_2) (3 \sin^2 \alpha_0 - 2)|]$ . Направление движения точки касания по этой окружности ясно из (5.2).

6. Осталось еще рассмотреть движение, соответствующее распадающейся полодии. Для определенности рассмотрим полодию, начинающуюся вблизи вершины эллипсоида инерции на положительной полуоси  $Cx_2$  и расположенную в области  $x_1 > 0$  (фиг. 1). Решение системы (3.1) выражается через гиперболические функции [6, 14]:

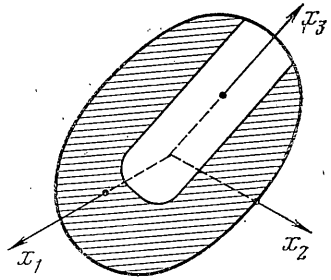
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T(A_2 - A_3)}{A_1(A_1 - A_3)}} \operatorname{sch} \tau, \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{2T}{A_2}} \operatorname{th} \tau, \quad \omega_3 = \sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)}{A_3(A_1 - A_3)}} \operatorname{sch} \tau \quad (6.1)$$

$$\tau = \frac{1}{14} \sqrt{\frac{2T(A_1 - A_2)(A_2 - A_3)}{A_1 A_2 A_3}} F(\rho_0, \omega_0)(t - t_0)$$

При движении эллипсоида (2.1) по плоскости направление вектора  $\omega$  асимптотически приближается к отрицательному направлению его средней оси. В пределе эллипсоид вращается вокруг оси  $Cx_2$  с угловой скоростью  $(2T/A_2)^{1/2}$ , что соответствует его качению, при котором он касается горизонтальной плоскости сечением, перпендикулярным оси  $Cx_2$  и отстоящим от центра эллипсоида на расстоянии  $|\zeta_0| a_2$ .

Расположение траектории точки касания  $P$  на поверхности эллипсоида (2.1) опять можно найти геометрическим путем, как эволюцию со временем пересечения эллипсоида (2.1) и плоскости (3.4). При этом существенно то, что в отличие от всех рассмотренных выше случаев полодия не охватывает ось  $Cx_3$  и с погрешностью порядка  $\varepsilon$  плоскость (3.4) перпендикулярна плоскости, в которой находится рассматриваемая полодия. След точки касания густой сетью заполняет показанную на фиг. 4 штриховкой часть поверхности эллипсоида; в незаштрихованную часть точка касания  $P$  не попадает. Эта часть поверхности выделяется линиями пересечения эллипсоида с плоскостями  $x_2 = \pm |\zeta_0| a$  и прямым круговым цилиндром с радиусом основания  $|\zeta_0| a$  и осью, перпендикулярной плоскости, в которой лежит рассматриваемая нами полодия — сепаратриса на эллипсоиде инерции.

Следует отметить, что для заполнения всей заштрихованной части поверхности эллипсоида требуется бесконечное время, за время же порядка  $\varepsilon^{-1}$  точка касания  $P$  проходит только по части поверхности.



Фиг. 4

Чтобы найти след точки  $P$  на плоскости, подставим (6.1) в (3.2). После преобразования выражений, содержащих гиперболические функции, и перехода к переменной  $s$  получаем в первом приближении

$$d\delta/ds = 5\zeta_0(a_3 + a_1 - 2a_2) / (7\rho_0 a^2) \quad (6.2)$$

Если  $\zeta_0(a_3 + a_1 - 2a_2) = 0$ , то след на плоскости — прямая линия, если же  $\zeta_0(a_3 + a_1 - 2a_2) \neq 0$ , то — окружность радиуса  $7\rho_0 a^2 / [5\sigma |\zeta_0(a_3 + a_1 - 2a_2)|]$ .

7. Все предыдущее исследование проводилось в предположении, что  $F(\rho_0, \omega_0) \neq 0$ . Если же  $F(\rho_0, \omega_0) = 0$ , то, как отмечалось в п. 3, вектор  $\omega$  мгновенной угловой скорости эллипсоида постоянен. Следом точки касания на эллипсоиде будет эллипс, являющийся пересечением поверхности эллипсоида и плоскости (3.4), в уравнении которой  $\omega_i = \omega_{i0}$ . Таким образом, при  $F(\rho_0, \omega_0) = 0$ , как и в случае шара, эллипсоид катится по плоскости, касаясь ее сечением, ориентация которого относительно эллипсоида произвольна. Но след точки касания на плоскости не обязательно будет прямой линией. След будет прямой линией или окружностью в зависимости от того, обращается или не обращается в нуль правая часть уравнения (3.2), если в ней положить  $\omega_i = \omega_{i0}$ . Еще одно существенное отличие состоит в том, что для эллипсоида величины  $\rho_0$  и  $\omega_0$  не являются независимыми: они должны удовлетворять соотношению (3.3).

Отметим, что ориентация эллипсоида относительно абсолютного пространства определяется по движению Эйлера — Пуансо известным способом [6, 14], поэтому на этом вопросе здесь не останавливаемся.

Реакция плоскости вычисляется по формуле (1.7). Нормальная реакция с погрешностью порядка  $\varepsilon$  равна весу эллипсоида, а сила трения имеет величину порядка  $\varepsilon$ . Для заданной величины  $\omega_0$  и достаточно малого отличия эллипсоида от шара подскока эллипсоида над плоскостью не будет и не требуется больших коэффициентов трения для обеспечения его качения по плоскости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Euler J. A. Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent. — Mem. Acad. Roy. Sci. Berlin, 1758, B. 12, S. 165—234.
2. Coriolis G. Théorie mathématique des effets du jeu de billard. Paris: Carilian-Goeury, 1835. 174 p. — Рус. перев.: М.: Гостехиздат, 1956. 235 с.
3. Чаплыгин С. А. О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. — Тр. отд. физ. наук Об-ва любителей естествознания, антропологии и этнографии, 1897, т. 9, вып. 1, с. 10—16.
4. Korteweg D. Über eine ziemliche verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problems der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung und insbesondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage. — Nieuw Archief vor Wiskunde, 1899, B. 4, S. 130—155.
5. Appell P. Sur l'intégration des équations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arête circulaire sur un plan horizontal; cas particulier du cerceau. — Rend. del Circolo mathém. di Palermo, 1900, t. 14, p. 1—6.
6. Appell P. Traité de Mécanique rationnelle. T. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1953. 575 p. — Рус. перев.: М.: Физматгиз, 1960. 487 с.
7. Воронец П. В. Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости. К.: Тип. Ун-та Св. Владимира, 1903. 152 с.
8. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости. — Матем. сб., 1903, т. 24, вып. 1, с. 139—168.
9. Routh E. J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London: Macmillan, 1884. 343 p.
10. Levi-Civita T., Amaldi U. Lezioni di meccanica razionale. V. 2, pt 2. Bologna: Zanichelli, 1927. 671 p. — Рус. перев.: М.: Изд-во иностр. лит., 1951. 555 с.
11. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. 379 с.
12. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гостехиздат, 1956. 420 с.
13. Жуковский Н. Е. Динамика твердого тела. Собр. соч. Т. 1. М. — Л.: Гостехтеориздат, 1948. 484 с.
14. Magnus K. Kreisel. Theorie und Anwendungen. B.: Springer, 1971. 493 p. — Рус. перев.: М.: Мир, 1974. 526 с.

Москва

Поступила в редакцию  
14.IV.1981