МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 531.384

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ СИСТЕМ НЕКОТОРОГО ВИДА

КАРАПЕТЯН А. В.

Предложен способ исследования устойчивости стационарных движений систем некоторого вида, основанный на методе Рауса – Ляпунова [1], но не требующий в отличие от последнего знания явного вида интегралов уравнений движения, кроме интеграла энергии.

В частности, отмечена возможность применения этого способа к исследованию устойчивости стационарных движений консервативных неголономных систем Чаплыгина в тех случаях, когда отсутствует «диссипативный» эффект [2] неголономных связей и в отличие от [2, 3] вопрос об устойчивости не решается теоремой Ляпунова – Малкина [4].

Полученные результаты иллюстрируются на примере исследования устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости, для которой возможность применения теоремы Рауса – Ляпунова ранее была отмечена в [5].

1. Пусть уравнения движения какой-либо системы можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial q_i^\bullet}=\frac{\partial K}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{k}G_{ij}q_j^\bullet-\frac{\partial W}{\partial q_i}-\sum_{\alpha=k+1}^{m}\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}F_{\alpha i}\qquad (i=1,\ldots,k)$$

$$p_\alpha^\bullet=\sum_{i=1}^{k}F_{\alpha i}q_i^\bullet\qquad(\alpha=k+1,\ldots,m),\qquad K=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}A_{ij}(q)q_i^\bullet q_j^\bullet>0\qquad\forall q^\bullet\neq0 \tag{1.1}$$

$$(A_{ij}=A_{ji}),\quad G_{ij}=G_{ij}(q,q^\bullet,p)=-G_{ji},\quad W=W(q,p),\quad F_{\alpha i}=F_{\alpha i}(q,p)$$

причем функции A_{ij} и W предполагаются два раза, а функции G_{ij} и $F_{\alpha i}$ – один раз непрерывно дифференцируемы по входящим в них переменным.

Уравнения вида (1.1) могут описывать движение голономных систем с квазициклическими по определению [6] координатами, неголономных систем (см. п. 2) с циклическими по определению [2, 3] координатами, а также, быть может, движение каких-либо иных систем.

Например, если консервативная голономная система, функция Лагранжа которой не зависит от последних $m-k$ координат, находится под действием гироскопических сил вида

$$\Gamma_s=\sum_{r=1}^{m}g_{sr}(q)q_r^\bullet\quad(s=1,\ldots,m),\qquad g_{rs}=-g_{sr}\quad(r,s=1,\ldots,m);\qquad g_{\alpha\beta}=0\quad(\alpha,\beta=k+1,\ldots,m)$$

то уравнения движения такой системы можно привести к виду (1.1). При этом q и $q^\bullet$ – позиционные координаты и их скорости соответственно, p – импульсы квазициклических координат, K – часть кинетической энергии исходной системы, отвечающая квадратичной форме скоростей позиционных координат, W – измененная потенциальная энергия, равная сумме потенциальной энергии исходной системы и квадратичной относительно скоростей квазициклических координат части кинетической энергии исходной системы, выраженной через импульсы, G_{ij} и $F_{\alpha i}$ – суммы коэффициентов гироскопических сил Γ_s и гироскопических сил, вызванных наличием билинейной по скоростям позиционных и квазициклических координат формы в кинетической энергии исходной системы.

Очевидно, система (1.1) допускает (стационарные) решения

$$q_i = q_{i0}, \quad q_i^{\cdot} = 0 \quad (i=1,\ldots,k); \quad p_\alpha = p_{\alpha 0} \quad (\alpha = k+1,\ldots,m) \tag{1.2}$$

если m постоянных q_{i0}, $p_{\alpha 0}$ в (1.2) удовлетворяют системе $k<m$ уравнений

$$\frac{DW}{Dq_i} = 0 \qquad \left(\frac{D}{Dq_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{\alpha=k+1}^{m} F_{\alpha i} \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right) \tag{1.3}$$

Теорема. Стационарное движение (1.2) системы (1.1) устойчиво, если все собственные значения матрицы

$$C = \| D^2 W / Dq_i Dq_j \| \tag{1.4}$$

положительны в точке (q_0, p_0) и в некоторой окрестности этой точки выполняются условия

$$DF_{\alpha i}/Dq_j - DF_{\alpha j}/Dq_i = 0 \quad (i, j=1,\ldots,k; \alpha=k+1,\ldots,m) \tag{1.5}$$

и неустойчиво, если определитель матрицы C или все собственные значения матрицы $C - {}^1/_4 G A^{-1} G$ $(G = (G_{ij}),\ A = (A_{ij}))$ отрицательны в точке (q_0, p_0) (как при выполнении в этой точке условий (1.5), так и при их невыполнении; в последнем случае, кроме того, для устойчивости необходимо выполнение $k-1$ условий типа равенств).

Доказательство. Устойчивость. При выполнении условий (1.5) система $k(m-k)$ уравнений

$$\partial p_\alpha / \partial q_i = F_{\alpha i} \quad (i=1,\ldots,k;\ \alpha=k+1,\ldots,m) \tag{1.6}$$

относительно $m-k$ неизвестных функций p_α вполне интегрируема [7] в окрестности точки (q_0, p_0). Следовательно, в этой окрестности существует семейство решений системы (1.6)

$$p_\alpha = \varphi_\alpha(q, \varkappa) \quad (\alpha=k+1,\ldots,m) \tag{1.7}$$

зависящее от $m-k$ произвольных постоянных $\varkappa_{k+1},\ldots,\varkappa_m$, и соотношения (1.7) разрешимы относительно этих постоянных. Последнее означает, что система (1.1) кроме интеграла энергии $K+W=\mathrm{const}$ допускает в окрестности точки (q_0, p_0) $m-k$ интегралов вида

$$\psi_\alpha(q, p) = \varkappa_\alpha \quad (\psi_\alpha(q, \varphi(q, \varkappa)) \equiv \varkappa_\alpha) \tag{1.8}$$

Далее, если все собственные значения матрицы (1.4) (симметричной при условиях (1.5)) положительны в точке (q_0, p_0), то (по непрерывности) они положительны и в окрестности этой точки. Следовательно, функция $W(q, \varphi(q, \varkappa))$ имеет минимум как на невозмущенном, так и на любом достаточно близком к невозмущенному стационарном движении вида (1.2), принадлежащем многообразию (1.3). Отсюда следует, что этим же свойством обладают и функция $W(q, p)$ и (так как $K>0$ $\forall q^{\cdot} \neq 0$) интеграл $K+W=\mathrm{const}$ как при невозмущенных, так и при достаточно близких к невозмущенным значениям постоянных интегралов (1.8). Кроме того, функции (1.7) непрерывны (даже непрерывно дифференцируемы [7]) по входящим в них переменным. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво согласно теореме Рауса — Ляпунова.

Неустойчивость. Рассмотрим характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущенного движения

$$\lambda^{m-k} \det \Delta(\lambda) = 0, \quad \Delta(\lambda) = A_0 \lambda^2 - G_0 \lambda + C_0 \tag{1.9}$$

где здесь и всюду далее нижний нулевой индекс указывает, что соответствующая величина вычисляется на невозмущенном движении.

Очевидно, если $\det C_0<0$ или [8] все собственные значения матрицы $C_0-{}^1/_4 G_0 A_0^{-1} G_0$ отрицательны, то уравнение (1.9) имеет корень в правой полуплоскости и невозмущенное движение неустойчиво, причем как при выполнении, так и при невыполнении условий (1.5). Кроме того, в последнем случае матрица (1.4) не симметрична и для устойчивости необходимо выполнение $k-1$ условий типа равенств. Действительно, в уравнении $\det\Delta(\lambda)=0$ коэффициент при λ^{2k-1} всегда равен нулю, и если хотя бы один коэффициент при нечетной степени λ не равен нулю, то это уравнение имеет корень в правой полуплоскости [8]. Теорема доказана.

Отметим, что полученные условия устойчивости не требуют знания явного вида интегралов (1.8). Условия экстремума интеграла $K+W=\mathrm{const}$ при постоянных значениях интегралов (1.8) также не требуют знания явного вида последних и приводятся к виду (1.3). Условия (1.5) заведомо выполнены, если $k=1$ (имеется всего одна позиционная координата) или все $F_{\alpha i}=0$. В последнем случае уравнения (1.1) имеют вид уравнений движения консервативных голономных систем с циклическими координатами, записанных в переменных Рауса.

2. Покажем теперь, что результаты п. 1 могут быть применены при исследовании устойчивости стационарных движений консервативных неголономных систем Чаплыгина.

Пусть $q_1,\ldots,q_n$ — обобщенные координаты системы, скорости $q_1^\bullet,\ldots,q_n^\bullet$ которых стеснены $n-m$ неинтегрируемыми соотношениями

$$q_\mu^\bullet=\sum_{r=1}^{m} b_{\mu r}(q)\,q_r^\bullet \qquad (\mu=m+1,\ldots,n) \tag{2.1}$$

Известно, что если кинетическая энергия T, силовая функция U и коэффициенты связей $b_{\mu r}$ не зависят от последних $n-m$ координат, то неголономная система называется системой Чаплыгина и ее уравнения движения в форме Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Theta}{\partial q_r^\bullet}=\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_r}+\sum_{p,s=1}^{m}\theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}q_p^\bullet q_s^\bullet \qquad (r=1,\ldots,m) \tag{2.2}$$

$$\nu_{\mu rs}=\frac{\partial b_{\mu r}}{\partial q_s}-\frac{\partial b_{\mu s}}{\partial q_r},\qquad 2\Theta=\sum_{r,s=1}^{m}\tau_{rs}(q)\,q_r^\bullet q_s^\bullet,\qquad \Theta_\mu=\sum_{p=1}^{m}\theta_{\mu p}(q)\,q_p^\bullet$$

можно рассматривать независимо от уравнений связей. Здесь 2Θ и Θ_μ получаются из $2T$ и $\partial T/\partial q_\mu^\bullet$ исключением $q_\mu^\bullet$ при помощи соотношений (2.1).

Предполагается, что кинетическая энергия, силовая функция и коэффициенты связей системы дважды непрерывно дифференцируемы.

Пусть координаты q_α $(\alpha=k+1,\ldots,m)$ циклические в смысле определения [3], т. е.

$$\frac{\partial(\Theta+U)}{\partial q_\alpha}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu p}\nu_{\mu rs}=0,\qquad \sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha\beta}=0 \qquad (p,r,s=1,\ldots,m\ \ \alpha,\beta,\gamma=k+1,\ldots,m)$$

Тогда система может совершать стационарные движения

$$q_i=q_{i0},\quad q_i^\bullet=0 \quad (i=1,\ldots,k),\qquad q_\alpha^\bullet=q_{\alpha 0}^\bullet \quad (\alpha=k+1,\ldots,m) \tag{2.3}$$

причем m постоянных q_{i0}, $\dot q_{\alpha 0}$ в (2.3) удовлетворяют системе $k<m$ уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}+\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \tau_{\alpha\beta}}{\partial q_i}+\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu i\alpha}\right)\dot q_\alpha \dot q_\beta=0 \qquad (2.4)$$

Перейдем от фазовых переменных q_i, $\dot q_i$, $\dot q_\alpha$ системы (2.2) к переменным q_i, $\dot q_i$, p_α, где

$$p_\alpha=\partial\Theta/\partial \dot q_\alpha \quad (\alpha=k+1,\ldots,m) \qquad (2.5)$$

— импульсы циклических координат, и посредством соотношения $R=\Theta+U-\Sigma \dot q_\alpha p_\alpha$, в правой части которого скорости циклических координат исключены с помощью соотношений (2.5), введем функцию Рауса $R=R(q, \dot q, p)$.

Здесь и всюду далее $q=(q_1,\ldots,q_k)$, $p=(p_{k+1},\ldots,p_m)$. Очевидно

$$R=K+L-W,\qquad K=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{k}\left(\tau_{ij}-\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\tau^{\alpha\beta}\tau_{\alpha i}\tau_{\beta j}\right)\dot q_i\dot q_j$$

$$L=\sum_{i=1}^{k}\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\tau^{\alpha\beta}\tau_{\alpha i}p_\beta \dot q_i,\qquad W=-U+\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\tau^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta,$$

$$(\tau^{\alpha\beta})=(\tau_{\alpha\beta})^{-1}\quad (\alpha,\beta=k+1,\ldots,m)$$

В новых переменных уравнения движения системы можно привести к виду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial \dot q_i}=\frac{\partial K}{\partial q_i}+\sum_{j=1}^{k}H_{ij}\dot q_j-\frac{\partial W}{\partial q_i}-\sum_{\alpha=k+1}^{m}\frac{\partial W}{\partial p_\alpha}F_{\alpha i}+\sum_{j=1}^{k}\sum_{\beta=k+1}^{m}H_{ij\beta}\frac{\partial W}{\partial p_\beta}\dot q_j+$$

$$+\sum_{j,h=1}^{k}H_{ijh}\dot q_j\dot q_h-\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\sum_{j,h=1}^{k}\tau^{\alpha\beta}\tau_{\beta i}H_{\alpha jh}\dot q_j\dot q_h \quad (i=1,\ldots,k) \qquad (2.6)$$

$$\dot p_\alpha=\sum_{j=1}^{k}F_{\alpha j}\dot q_j+\sum_{i,j=1}^{k}H_{\alpha ij}\dot q_i\dot q_j \quad (\alpha=k+1,\ldots,m)$$

$$H_{ij}=\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(\tau^{\alpha\beta}\tau_{\beta j})-\frac{\partial}{\partial q_j}(\tau^{\alpha\beta}\tau_{\beta i})\right]p_\alpha-\right.$$

$$\left.-\sum_{\mu=m+1}^{n}\sum_{\gamma=k+1}^{m}\theta_{\mu\gamma}\frac{\partial W}{\partial p_\gamma}\tau^{\alpha\beta}(\tau_{\beta i}\nu_{\mu\alpha j}-\tau_{\beta j}\nu_{\mu\alpha i})\right\}+$$

$$+\sum_{\mu=m+1}^{n}\nu_{\mu ij}\left[\sum_{\beta=k+1}^{m}\theta_{\mu\beta}\frac{\partial W}{\partial p_\beta}+\sum_{h=1}^{k}\left(\theta_{\mu h}-\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\tau^{\alpha\beta}\tau_{\beta h}\theta_{\mu\alpha}\right)\dot q_h\right]=H_{ij}(q,\dot q,p)=-H_{ji}$$

$$H_{ijh}=\sum_{\mu=m+1}^{n}\sum_{\beta,\gamma=k+1}^{m}\nu_{\mu i\beta}\tau^{\beta\gamma}\tau_{\gamma h}\left(-\theta_{\mu j}+\sum_{\alpha,\delta=k+1}^{m}\theta_{\mu\delta}\tau^{\delta\alpha}\tau_{\alpha j}\right)$$

$$H_{ij\beta}=\sum_{\mu=m+1}^{n}\left[\theta_{\mu j}\nu_{\mu i\beta}-\sum_{\alpha,\gamma=k+1}^{m}\tau^{\alpha\gamma}(\tau_{\gamma i}\theta_{\mu j}\nu_{\mu\alpha\beta}+\tau_{\gamma j}\theta_{\mu\alpha}\nu_{\mu i\beta})\right]$$

$$H_{\alpha ij}=\sum_{\mu=m+1}^{n}\left[\theta_{\mu i}\nu_{\mu\alpha j}-\sum_{\beta,\gamma=k+1}^{m}\tau^{\beta\gamma}\tau_{\gamma i}(\theta_{\mu\beta}\nu_{\mu\alpha j}+\theta_{\mu j}\nu_{\mu\alpha\beta})\right]$$

$$F_{\alpha i}=\sum_{\mu=m+1}^{n}\sum_{\gamma=k+1}^{m}(\theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha i}+\theta_{\mu i}\nu_{\mu\alpha\gamma})\frac{\partial W}{\partial p_\gamma}\equiv\sum_{\beta=k+1}^{m}f_{\alpha i\beta}(q)p_\beta$$

$$f_{\alpha i\beta}=\sum_{\mu=m+1}^{n}\sum_{\gamma=k+1}^{m}(\theta_{\mu\gamma}\nu_{\mu\alpha i}+\theta_{\mu i}\nu_{\mu\alpha\gamma})\tau^{\gamma\beta}$$

Если $(H_{ij\beta}+H_{ji\beta})_0\neq 0$, то, несмотря на то, что исходная система консервативна, все корни характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения, кроме $m-k$ нулевых, могут [2] лежать в левой полуплоскости; при этом имеет место [2, 3] особенный случай критического случая нескольких нулевых корней и справедлива теорема Ляпунова — Малкина. Следовательно, в этом случае вопрос об устойчивости стационарных движений консервативных неголономных систем решается исследованием корней характеристического уравнения [2, 3].

Пусть теперь

$$H_{ij\beta}+H_{ji\beta}=0 \qquad (i,\ j=1,\ldots,k;\ \beta=k+1,\ldots,m) \tag{2.7}$$

Покажем, что в этом случае

$$H_{\alpha ij}+H_{\alpha ji}=0,\qquad \sum_{h=1}^{k}H_{ijh}q_h^{\cdot}+\sum_{h=1}^{k}H_{jih}q_h^{\cdot}=0 \qquad (i,j=1,\ldots,k;\ \alpha=k+1,\ldots,m) \tag{2.8}$$

Первая группа равенств в (2.8) следует из (2.7) и очевидных тождеств $H_{ij\beta}+H_{ji\beta}\equiv-(H_{\beta ij}+H_{\beta ji})$. Для доказательства второй группы достаточно показать, что при условиях (2.7) сумма $\Sigma H_{ijh}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}q_h^{\cdot}\equiv 0$ $(i,\ j,\ h=1,\ldots,k)$.

Но из (2.7) следует

$$\sum_{i,j=1}^{k}H_{ij\beta}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}\equiv 0,\qquad \sum_{i,j=1}^{k}\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu j}\nu_{\mu i\beta}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}\equiv$$

$$\equiv\sum_{i,j=1}^{k}\sum_{\alpha,\gamma=k+1}^{m}\sum_{\mu=m+1}^{n}\tau^{\alpha\gamma}(\tau_{\gamma i}\theta_{\mu j}\nu_{\mu\alpha\beta}+\tau_{\gamma j}\theta_{\mu\alpha}\nu_{\mu i\beta})q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}$$

С учетом последних тождеств имеем

$$\sum_{i,j,h=1}^{k}H_{ijh}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}q_h^{\cdot}\equiv\sum_{i,j,h=1}^{k}\sum_{\beta,\gamma=k+1}^{m}\sum_{\mu=m+1}^{n}\tau^{\beta\gamma}\tau_{\gamma h}\nu_{\mu i\beta}\left(\sum_{\alpha,\delta=k+1}^{m}\theta_{\mu\delta}\tau^{\delta\alpha}\tau_{\alpha j}-\theta_{\mu j}\right)q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}q_h^{\cdot}\equiv$$

$$\equiv-\sum_{j=1}^{k}\sum_{\mu=m+1}^{n}\theta_{\mu j}q_j^{\cdot}\sum_{\alpha,\beta=k+1}^{m}\nu_{\mu\alpha\beta}\left(\sum_{i=1}^{k}\sum_{\gamma=k+1}^{m}\tau^{\alpha\gamma}\tau_{\gamma i}q_i^{\cdot}\right)\left(\sum_{h=1}^{k}\sum_{\delta=k+1}^{m}\tau^{\beta\delta}\tau_{\delta h}q_h^{\cdot}\right)+$$

$$+\sum_{i,j,h=1}^{k}q_i^{\cdot}q_j^{\cdot}q_h^{\cdot}\sum_{\beta=k+1}^{m}\sum_{\mu=m+1}^{n}\nu_{\mu i\beta}\sum_{\alpha,\gamma,\delta=k+1}^{m}(\tau^{\beta\gamma}\tau_{\gamma h}\theta_{\mu\delta}\tau^{\delta\alpha}\tau_{\alpha j}-\tau^{\beta\delta}\tau_{\delta h}\theta_{\mu\alpha}\tau^{\alpha\gamma}\tau_{\gamma j})\equiv 0$$

Итак, при условиях (2.7) справедливы соотношения (2.8) и, следовательно, уравнения (2.6) принимают вид (1.1), где

$$G_{ij}=H_{ij}+\sum_{\beta=k+1}^{m}H_{ij\beta}\frac{\partial W}{\partial p_\beta}+\sum_{h=1}^{k}H_{ijh}q_h^{\cdot}=-G_{ji}$$

Таким образом, при условиях (2.7) применимы результаты п. 1 публикуемой работы.

Необходимо отметить следующее.

1. Уравнения стационарных движений (2.4) неголономных систем Чаплыгина в переменных q_i, $q_i^{\cdot}$, p_α принимают вид (1.3).

2. Условия (1.5) в данном случае ($F_{\alpha i}$ линейны по p_β) принимают вид

$$\frac{\partial f_{\alpha i\beta}}{\partial q_j}-\frac{\partial f_{\alpha j\beta}}{\partial q_i}+\sum_{\gamma=k+1}^{m}(f_{\alpha i\gamma}f_{\gamma j\beta}-f_{\alpha j\gamma}f_{\gamma i\beta})=0 \quad (i,j=1,\ldots,k;\ \alpha,\beta=k+1,\ldots,m) \tag{2.9}$$

и не зависят от переменных p_α.

3. Для применения результатов п. 1 к исследованию устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина необязательно переходить к переменным q_i, $q_i^{\cdot}$, p_α. Действительно, при условиях (1.5) положительность всех собственных значений матрицы (1.4) означает положительность всех собственных значений матрицы $\Delta(0)$, где $\Delta(\lambda)$ получается из матрицы характеристического определителя отбрасыванием множителя λ^{m-k}. Следовательно, чтобы воспользоваться результатами п. 1, достаточно (при отсутствии «диссипативного эффекта» связей) проверить условия (2.9) и исследовать матрицу $\Delta(0)$.

4. Для устойчивости стационарных движений консервативных неголономных систем общего вида при отсутствии «диссипативного эффекта» связей необходимо выполнение ряда условий типа равенств, поскольку в общих системах уравнения второй группы системы (1.1) должны содержать уравнения неголономных связей общего вида, для которых условия (1.5) не выполняются (иначе эти связи интегрируемы).

3. Проиллюстрируем полученные результаты на примере исследования устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела, ограниченного поверхностью вращения и находящегося на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. Положение тела будем задавать координатами x и y его центра масс в неподвижной системе координат $Oxyz$ (плоскость Oxy совпадает с опорной плоскостью, ось Oz направлена вертикально вверх) и углами Эйлера θ, φ и ψ, которые составляют главные центральные оси $G\xi$, $G\eta$ и $G\zeta$ инерции тела с осями неподвижной системы координат. Если по оси симметрии тела направить ось $G\zeta$, функция Лагранжа и уравнения связей системы, выражающие условие отсутствия проскальзывания тела в точке его касания с опорной плоскостью, примут вид

$$L=\frac{1}{2}[A+m(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)^2]\theta^{\cdot 2}+\frac{1}{2}C\varphi^{\cdot 2}+\frac{1}{2}(A\sin^2\theta+C\cos^2\theta)\psi^{\cdot 2}+$$

$$+C\cos\theta\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}+\frac{1}{2}m(x^{\cdot 2}+y^{\cdot 2})+mg(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta)$$

$$x^{\cdot}=\alpha_1\theta^{\cdot}+\alpha_2\varphi^{\cdot}+\alpha_3\psi^{\cdot},\quad y^{\cdot}=\beta_1\theta^{\cdot}+\beta_2\varphi^{\cdot}+\beta_3\psi^{\cdot}$$

$$\alpha_1=-(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta)\sin\psi,\quad \alpha_2=\chi\cos\psi$$

$$\alpha_3=(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)\cos\psi,\quad \beta_i=-\partial\alpha_i/\partial\psi \quad (i=1,2,3),\quad \chi=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi$$

Здесь m – масса тела, A – экваториальный, C – осевой центральные моменты инерции, ξ, η, ζ – координаты точки касания тела с плоскостью в системе $G\xi\eta\zeta$. Можно показать, что χ и ζ – функции только одной переменной θ, определяемые по виду уравнения, задающего ограничивающую тело поверхность, и удовлетворяющие соотношению $d\chi/d\theta\sin\theta+d\zeta/d\theta\cos\theta\equiv 0$.

Рассматриваемая система представляет неголономную систему Чаплыгина, и ее движение описывается уравнениями Чаплыгина

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial q_i^{\cdot}}=\frac{\partial L^*}{\partial q_i}+\sum_{j,k=1}^{3}\Gamma_{ijk}q_j^{\cdot}q_k^{\cdot} \quad (i=1,2,3),\quad (q_1=\theta,\ q_2=\varphi;\ q_3=\psi) \tag{3.1}$$

$$\Gamma_{ijk}=m\left[\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\alpha_j}{\partial q_i}\right)\alpha_k+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\beta_j}{\partial q_i}\right)\beta_k\right]$$

$$L^* = \frac{1}{2}[A+m(\chi^2+\zeta^2)]\theta^{\cdot 2} + \frac{1}{2}(C+m\chi^2)\varphi^{\cdot 2} + \frac{1}{2}[A\sin^2\theta + C\cos^2\theta +$$
$$+ m(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)^2]\psi^{\cdot 2} + [C\cos\theta + m\chi(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)]\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot} + mg(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta)$$

Очевидно, функция L^* не зависит от φ и ψ. Непосредственной проверкой убеждаемся, что этим свойством обладают и все коэффициенты Γ_{ijk} ($i, j, k=1, 2, 3$) членов неголономности, а все $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma=2, 3$) равны нулю. Следовательно, координаты φ и ψ циклические в смысле принятого в [2, 3] определения и исходная система может совершать стационарные движения

$$\theta=\theta_0, \quad \theta^{\cdot}=0, \quad \varphi^{\cdot}=\varphi_0^{\cdot}=\Omega, \quad \psi^{\cdot}=\psi_0^{\cdot}=\omega \tag{3.2}$$

если три постоянные θ_0, Ω и ω в (3.2) удовлетворяют одному уравнению

$$(A-C)\sin\theta\cos\theta\omega^2 - C\sin\theta\omega\Omega + mg(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta) =$$
$$= m(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta)[(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)\omega+\chi\Omega]\omega \tag{3.3}$$

При $\omega\neq 0$ решению (3.2) отвечает регулярная прецессия тела. Действительно, при этом одна из точек оси симметрии тела, а именно точка R с координатами (в системе $G\xi\eta\zeta$)

$$(0, 0, \zeta_R), \quad \zeta_R = -\left[\frac{(\chi\cos\theta-\zeta\sin\theta)\omega+\chi\Omega}{\omega\sin\theta}\right]_0$$

неподвижна в пространстве, а тело вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикали, проходящей через точку R, и с постоянной угловой скоростью Ω вокруг собственной оси симметрии. На этом движении центр масс тела описывает окружность радиуса $|\zeta_R\sin\theta_0|$ в плоскости, параллельной опорной плоскости и расположенной на расстоянии $-(\chi\sin\theta+\zeta\cos\theta)_0$ от последней, а точка касания тела с плоскостью описывает две окружности: на опорной плоскости радиуса $|\chi_0\Omega\omega^{-1}|$ и на поверхности тела радиуса $|\chi_0|$. Центры первых двух окружностей лежат на одной вертикали, проходящей через точку R, а центр последней – на оси симметрии тела в точке с координатами $(0, 0, \zeta_0)$.

Поскольку $\Gamma_{121}=\Gamma_{131}=0$, в чем легко убедиться непосредственным вычислением, то в данной задаче «диссипативный эффект» неголономных связей отсутствует и следует воспользоваться результатами пп. 1, 2. Кроме того, очевидно, условия (1.5) или (2.9) в данной задаче заведомо выполнены (имеется всего одна позиционная координата). Следовательно, согласно замечанию 3 (п. 2) стационарное движение (3.2) устойчиво по Ляпунову, если коэффициент a_2 характеристического уравнения $\lambda^2(a_0\lambda^2+a_2)=0$ ($a_0=A+m(\chi_0^2+\zeta_0^2)>0$) линеаризованной по $\theta-\theta_0$, $\theta^{\cdot}$, $\varphi^{\cdot}-\Omega$, $\psi^{\cdot}-\omega$ системы (3.1) больше нуля, и неустойчиво, если $a_2<0$.

Вычисляя a_2 с учетом (3.3), получим условие устойчивости регулярной прецессии тела

$$\{A^{-1}[C\Omega+(C-2A)\omega\cos\theta_0]^2 + A\omega^2\sin^2\theta_0 + mg(r_0-l_0)\} +$$
$$+ m(l_0\sin^2\theta_0 - \zeta_0\cos\theta_0)^2\omega^2 + m(l_0\sin^2\theta_0-\zeta_0\cos\theta_0)(l_0\Omega + l_0\cos\theta_0\omega +$$
$$+\zeta_0\omega)A^{-1}[C\Omega+(C-2A)\omega\cos\theta_0] + m(l_0\Omega+l_0\cos\theta_0\omega +$$
$$+\zeta_0\omega)\zeta_0\omega - mg\omega^{-1}[A(C+ml_0\sin^2\theta_0)+Cm\zeta_0^2]^{-1}Cm\zeta_0(\zeta_0 +$$
$$+l_0\cos\theta_0)[r_0(\omega+\Omega\cos\theta_0)+A^{-1}C\zeta_0(\omega\cos\theta_0+\Omega) - l_0\sin^2\theta_0\omega]>0 \tag{3.4}$$

Здесь $r_0=r(\theta_0)$, $l_0=l(\theta_0)$, $r(\theta)$ – радиус кривизны меридионального сечения поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, $l(\theta)$ – расстояние от этой точки до точки пересечения оси симметрии тела с вертикалью, проходящей через первую точку.

Отметим, что условия существования (3.3) и устойчивости (3.4) регулярной прецессии тела на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости в несколько иной форме и в других переменных получены ранее в [5]. Условия существования и устойчивости регулярной прецессии тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости [9] получаются соответственно из (3.3) отбрасыванием правой части и из (3.4) отбрасыванием всех членов, не содержащихся в фигурных скобках.

При $\omega=0$ уравнение (3.3) означает, что центр масс тела находится на вертикали, проходящей через точку касания тела с опорной плоскостью (Ω произвольно), а решение (3.2) определяет равномерное качение (при $\Omega=0$ – равновесие) тела вдоль неподвижной прямой. Условие устойчивости этого движения, переходящее при $\Omega=0$ в условие устойчивости равновесия, имеет вид

$$[AC+ml_0^2(A\sin^2\theta_0+C\cos^2\theta_0)]^{-1}C(C+$$
$$+ml_0^2[C+ml_0(r_0\cos^2\theta_0+l_0\sin^2\theta_0)]\Omega^2 + mg(r_0-l_0)>0 \tag{3.5}$$

и означает, что если центр масс тела находится ниже центра кривизны меридионального сечения поверхности тела в точке его касания с опорной плоскостью, то качение тела вдоль прямой с произвольной постоянной скоростью (в том числе и равновесие) устойчиво, в противном случае равновесие неустойчиво, а для устойчивости качения необходимо и достаточно, чтобы скорость качения была больше некоторого критического значения, определяемого неравенством (3.5).

Автор благодарит В. В. Румянцева за полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967. 141 с.
2. *Карапетян А. В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 3, с. 418—426.
3. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина. — ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 801—807.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
5. *Миндлин И. М., Пожарицкий Г. К.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого тела вращения на абсолютно шероховатой горизонтальной плоскости. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 742–745.
6. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970. 720 с.
8. *Карапетян А. В.* Об устойчивости неконсервативных систем. — Вестн. Моск. ун-та. Матем., механ., 1975, № 4, с. 109—113.
9. *Карапетян А. В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 3, с. 504—511.

Москва

Поступила в редакцию
7.IV.1981