МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1983

УДК 531.36

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ И ВРАЩЕНИЙ В ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ЗЕВИН А. А.

Рассматриваются колебания и вращения в нелинейных системах с одной степенью свободы, возбуждаемые периодическим изменением жесткости и инерции. Степень нелинейности и величины параметрических воздействий не ограничиваются, малыми предполагаются лишь диссипативные силы.

В отличие от известных исследований [1–4 и др.], посвященных разработке и применению приближенных методов анализа параметрически возбуждаемых систем, публикуемые результаты имеют качественный характер. Найдены достаточные условия устойчивости основных параметрических колебаний и вращений, проверяемые непосредственно по виду возмущающих воздействий и упругих характеристик системы; некоторые условия устойчивости включают также амплитуду колебаний. Полученные результаты основаны на установленной в работе связи между решениями уравнения движения и соответствующего уравнения в вариациях, позволившей использовать известные критерии устойчивости уравнения Хилла (для анализа вынужденных колебаний аналогичный подход применен в [5]). В качестве примера рассмотрены колебания и вращения маятника с вибрирующей точкой подвеса и маятника с периодически изменяющейся длиной.

1. Параметрические колебания обычно возбуждаются периодическим изменением жесткости или (и) инерции системы. При совместном действии указанных факторов уравнение движения нелинейной слабо диссипативной системы может быть записано в виде

$$[(b(\omega t+\alpha)+c)x^{\boldsymbol{\cdot}}]^{\boldsymbol{\cdot}}+\mu\varphi(x,\ x^{\boldsymbol{\cdot}})+a(\omega t+\alpha)g(x)+f(x)=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $f(x)$ и $g(x)$ — соответственно постоянная и переменная составляющие упругой характеристики системы, c — постоянная составляющая массы или момента инерции, $b(s)+c>0$, $a(s)$, $b(s)$ — 2π-периодические функции с нулевыми средними значениями, $\mu\varphi(x,\ x^{\boldsymbol{\cdot}})$ — диссипативная сила $(\mu>0,\ (\partial\varphi/\partial x^{\boldsymbol{\cdot}})\geqslant0)$, μ — малый параметр. При $b=0$ уравнение (1.1) описывает колебания системы с периодически изменяющейся жесткостью при $a=0$ — с периодически изменяющейся инерцией.

При $\mu=0$ уравнение (1.1) принимает вид

$$[(b(\omega t+\alpha)+c)x^{\boldsymbol{\cdot}}]^{\boldsymbol{\cdot}}+a(\omega t+\alpha)g(x)+f(x)=0 \qquad (1.2)$$

Пусть $x(t)$ — некоторое T-периодическое решение (1.2). Предполагая функции $g(x)$, $f(x)$ дифференцируемыми, запишем соответствующее уравнение в вариациях

$$[(b(\omega t+\alpha)+c)y^{\boldsymbol{\cdot}}]^{\boldsymbol{\cdot}}+p(t)y=0$$

$$p(t)=a(\omega t+\alpha)g_x(x(t))+f_x(x(t)),\quad g_x=\frac{dg}{dx},\quad f_x=\frac{df}{dx} \qquad (1.3)$$

Заменой $u=y(b+c)^{1/2}$ уравнение (1.3) сводится к уравнению Хилла

$$
\begin{gathered}
u^{\cdot\cdot}+r(t)u=0; \\
r=\frac{p}{b+c}-\frac{1}{4}\left(\frac{b^{\cdot}}{b+c}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{b^{\cdot}}{b+c}\right)^{\cdot}
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

Если (1.4) не имеет T-периодических решений, то в соответствии с теоремой Пуанкаре существует единственное T-периодическое решение $x(t, \mu)$ уравнения (1.1), такое, что $x(t, 0)=x(t)$ [6]. Так как $\mu(\partial\varphi/\partial x^{\cdot})\geqslant 0$, $b+c>0$, то, используя формулу Лиувилля, найдем, что свободный член соответствующего характеристического уравнения равен

$$
B=\exp\left(-\mu\int_0^T (b+c)^{-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x^{\cdot}}\,dt\right)<1
$$

Как известно, решение $x(t)$ устойчиво в первом приближении, если мультипликаторы ρ_1, ρ_2 уравнения (1.4) комплексны. Ввиду непрерывности $x(t, \mu)$ при достаточно малых μ соответствующие мультипликаторы $\rho_1(\mu)$, $\rho_2(\mu)$ также комплексны. Так как $\rho_1(\mu)\rho_2(\mu)=B<1$, то $|\rho_1(\mu)|=|\rho_2(\mu)|<1$ и, следовательно, решение $x(t, \mu)$ асимптотически устойчиво. Таким образом, устойчивость в первом приближении решения $x(t)$ эквивалентна при малых μ асимптотической устойчивости решения $x(t, \mu)$. Очевидно, что если $x(t)$ неустойчиво, то при малых μ $x(t, \mu)$ также неустойчиво.

Если x — угловая координата, то в системе (1.1) кроме колебательных возможны периодические вращательные движения — им отвечают решения вида $x^{\cdot}(t)=x^{\cdot}(t+T)$, $x(t+T)=x(t)+2\pi n$, где n — некоторое целое число. Так как здесь $f(x+2\pi)=f(x)$, $g(x+2\pi)=g(x)$, то коэффициент $r(t)$ соответствующего уравнения (1.4) также T-периодический.

В дальнейшем под устойчивостью колебательного или вращательного решения $x(t)$ будем понимать устойчивость в первом приближении, т. е. устойчивость тривиального решения уравнения Хилла (1.4), при исследовании которой будут использованы известные условия устойчивости.

Пусть λ_{2i}^-, λ_{2i}^+ и λ_{2i+1}^-, λ_{2i+1}^+ $(i=0, 1, 2, \ldots, \lambda_k^-\leqslant\lambda_k^+<\lambda_{k+1}^-)$ — собственные значения краевых задач для уравнения

$$
u^{\cdot\cdot}+\lambda r(t)u=0, \qquad r(t)=r(t+\theta) \tag{1.5}
$$

соответственно с периодическими $(u(-\theta/2)=u(\theta/2),\ u^{\cdot}(-\theta/2)=u^{\cdot}(\theta/2))$ и антипериодическими $(u(-\theta/2)=-u(\theta/2),\ u^{\cdot}(-\theta/2)=-u^{\cdot}(\theta/2))$ краевыми условиями. Тогда тривиальное решение уравнения (1.4) (последнему отвечает $\lambda=1$) устойчиво, если для какого-либо k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ выполняется неравенство $\lambda_k^+<1<\lambda_{k+1}^-$, и неустойчиво при $\lambda_k^-<1<\lambda_k^+$ [7].

Возможность эффективного использования указанных условий устойчивости базируется на установленном ниже соотношении (3.2), связывающем решения уравнений (1.2) и (1.3).

2. Рассмотрим периодические колебательные движения и предположим, что имеют место условия

$$
\begin{gathered}
f(x)=-f(-x), \qquad g(x)=-g(-x), \qquad a(\omega t)=\Sigma\, a_k\cos k\omega t, \\
b(\omega t)=\Sigma\, b_k\cos k\omega t \qquad {\scriptstyle (k=1,3,5,\ldots)} \\
\frac{da(\omega t)}{dt}\leqslant 0, \qquad \frac{db(\omega t)}{dt}\leqslant 0 \text{ при } 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{\omega} \\
g>0, \quad ag+f>0 \quad \text{при} \quad x>0
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Физически эти условия означают, что упругие характеристики и возмущающие воздействия симметричны, причем последние монотонно изменяются между экстремальными значениями; при любых t суммарная сила направлена к положению равновесия.

Пусть $x(t, A, \omega)$ $(x(0, A, \omega)=A>0, x^{\cdot}(0, A, \omega)=0)$ — решение уравнения (1.2) при $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$. В силу (1.2) и условий (2.1) $x^{\cdot}(t, A, \omega)<0$ при $0\leqslant x<A$, поэтому для любого A найдется такое $\omega(A)$, что

$$x(\pi/\omega, A, \omega)=0 \tag{2.2}$$

Ввиду симметрии системы соответствующее решение $x(t, A, \omega)$ периодично с периодом $T=4\pi/\omega$, симметрично и монотонно изменяется между экстремальными значениями A и $-A$, т. е.

$$x(t)=x(-t)=-x(t+T/2), \quad x^{\cdot}(t)<0 \text{ на } (0, T/2) \tag{2.3}$$

Таким образом, период колебаний равен удвоенному периоду возмущающего воздействия, т. е. имеет место основной параметрический резонанс.

Решение, удовлетворяющее условиям (2.3) при $\alpha=0$, обозначим $x_1(t)$, при $\alpha=\pi - x_2(t)$. Исследуем сначала поведение соответствующих амплитудно-частотных характеристик $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$.

Предположим, что для всех x и s

$$a(s)g_x(x)+f_x(x)\leqslant \frac{1}{x}[a(s)g(x)+f(x)] \tag{2.4}$$

или

$$a(s)g_x(x)+f_x(x)\geqslant \frac{1}{x}[a(s)g(x)+f(x)] \tag{2.5}$$

В случае $g(x)=x$ условия (2.4) или (2.5) выполняются, если любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает график $f(x)$ при $x>0$ не более чем в одной точке. В частности, если $f(x)$ вогнута или выпукла при $x>0$ (т. е. упругая характеристика является мягкой или жесткой), то выполняются условия (2.4) или (2.5) соответственно. Тот же смысл имеют условия (2.4), (2.5) при $g(x)=f(x)$ (здесь в силу (2.1) $|a|<1$).

Амплитудно-частотные характеристики $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ определяются неявным образом уравнением (2.2), откуда

$$\frac{dA}{d\omega}=-\frac{x_\omega}{x_A}, \quad x_\omega=\frac{\partial x(\pi/\omega, A, \omega)}{\partial\omega}, \quad x_A=\frac{\partial x(\pi/\omega, A, \omega)}{\partial A} \tag{2.6}$$

Запишем (1.2) в виде

$$[(b(\omega t+\alpha)+c)x^{\cdot}]^{\cdot}+\beta(t)x=0 \tag{2.7}$$

$$\beta(t)=\frac{1}{x(t)}[a(\omega t+\alpha)g(x(t))+f(x(t))]$$

Как известно, функция $y_1(t)=\partial x(t, A, \omega)/\partial A$ удовлетворяет уравнению (1.3), причем $y_1(0)=1$, $y_1^{\cdot}(0)=0$. При условии (2.4) $\beta(t)\geqslant p(t)$, поэтому первый нуль $y_1(t)$ лежит справа от нуля соответствующего решения $x(t)$ уравнения (2.7), удовлетворяющего условию $x^{\cdot}(0)=0$. Следовательно, для решений (2.3) $x_A=y_1(\pi/\omega)>0$.

Выражение x_ω для случая $b=0$ получено в [8]. При $b\neq0$ аналогично найдем

$$x_\omega=-\frac{2}{\omega^2}\int_0^\pi \left[(b(s+\alpha)+c)x^{\cdot}\left(\frac{s}{\omega}\right)\right]^{\cdot} y\left(\frac{\pi}{\omega}\ \frac{s}{\omega}\right)ds \tag{2.8}$$

где $x(t)$ — рассматриваемое периодическое решение, $y(t, s)$ — решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условиям $y(s, s)=0$, $y^{\cdot}(s, s)=1$.

Так как нули любых двух решений уравнения Штурма перемежаются [9] и $y_1(t)>0$ на $[0, \pi/\omega]$, то $y(\pi/\omega, s/\omega)>0$ при $0\leqslant s<\pi$. В силу (1.2) и последнего условия (2.1) $[(b(s+\alpha)+c)x^{\cdot}(s/\omega)]^{\cdot}<0$ при $0\leqslant s<\pi$, поэтому $x_\omega>0$. Таким образом, при условии (2.4) $dA/d\omega<0$, т. е. амплитудно-частотные характеристики $A_1(\omega)$ и $A_2(\omega)$ монотонно убывают.

Пусть Δ — минимальное расстояние между соседними нулями решений уравнения (1.3). Так как Δ уменьшается при возрастании p и убывании $b+c$ [9], то при условии

$$\frac{1}{c-b(0)}[a(s)g_x(x)+f_x(x)]\leqslant\omega^2 \qquad 0\leqslant s\leqslant 2\pi, \quad |x|\leqslant A \tag{2.9}$$

имеем $\Delta>\pi/\omega$, $y(\pi/\omega, s/\omega)>0$ при $0\leqslant s<\pi$ и в силу (2.8) $x_\omega>0$.

При условии (2.5) $\beta(t)\leqslant p(t)$, поэтому $y_1(t)$ имеет хотя бы один нуль на $(0, \pi/\omega)$, откуда с учетом неравенства $\Delta>\pi/\omega$ найдем $x_A<0$. Таким образом, в системе (1.2), (2.5), (2.9) $dA/d\omega>0$, т. е. амплитудно-частотные характеристики $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ монотонно возрастают.

Отметим, что условие (2.9) включает амплитуду колебаний. Ниже показано, что для решения $x_1(t)$ неравенство $y(\pi/\omega, s/\omega)>0$ при $0\leqslant s<\pi$ всегда выполняется, поэтому $A_1(\omega)$ возрастает независимо от условия (2.9).

Аналогично [8] можно доказать, что если $g_x(x)\geqslant 0$, то $A_1(\omega)$ расположена справа, $A_2(\omega)$ — слева от амплитудно-частотной характеристики свободных колебаний $A_0(\omega)$ $(b=a=0)$. Поэтому $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ при условии (2.4) имеют вид, представленный на фиг. 1, при условии (2.5) — на фиг. 2.

3. Исследуем устойчивость решений $x_1(t)$, $x_2(t)$. Прежде всего отметим, что в силу (2.1), (2.3) в (1.4) $\theta=2\pi/\omega$, $r(t)=r(-t)$, поэтому собственные функции указанных краевых задач являются либо четными, либо нечетными. Одному из значений λ_1^-, λ_1^+, которое обозначим λ_r, отвечает четная собственная функция $u_r(t)$, другому (λ_H) — нечетная функция $u_H(t)$; при этом $u_r(-\pi/\omega)=u_r(\pi/\omega)=0$, $u_r(t)\neq 0$ на $(-\pi/\omega, \pi/\omega)$, $u_H^{\cdot}(-\pi/\omega)=u_H^{\cdot}(\pi/\omega)=0$, $u_H(t)\neq 0$ на $(0, \pi/\omega]$.

Теорема 1. В системе (1.2), (2.4) решение $x_2(t)$ неустойчиво, решение $x_1(t)$ устойчиво при условии

$$a(s)g_x(x)+f_x(x)\geqslant 0 \text{ при } 0\leqslant s\leqslant 2\pi, \quad |x|\leqslant A \tag{3.1}$$

Доказательство. Показано, что при условии (2.4) решение $y_1(t)$ $(y_1^{\cdot}(0)=0)$ уравнения (1.3) и, следовательно, соответствующее решение $u_1(t)$ уравнения (1.4) сохраняет знак на $[-\pi/\omega, \pi/\omega]$. Так как $u_1(t)=u_1(-t)$, то $\lambda_r>1$ при $x=x_1(t)$ и $x=x_2(t)$.

Умножим (1.2) на $y^{\cdot}(t)$, (1.3) на $x^{\cdot}(t)$ и просуммируем. Результат можно представить в виде

$$\{[b(\omega t+\alpha)+c]x^{\cdot}(t)y^{\cdot}(t)\}^{\cdot}+\{[a(\omega t+\alpha)g(x)+f(x)]y(t)\}^{\cdot}+ \\ +b^{\cdot}(\omega t+\alpha)x^{\cdot}(t)y^{\cdot}(t)-a^{\cdot}(\omega t+\alpha)g(x)y(t)=0$$

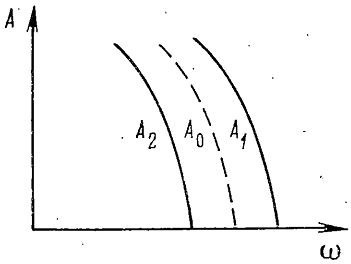
откуда

$$[b(\omega t+\alpha)+c]x^{\cdot}(t)y^{\cdot}(t)|_{t_0}^{t_1}=-[a(\omega t+\alpha)g(x(t))+f(x(t))]y(t)|_{t_0}^{t_1}+ \\ +\int_{t_0}^{t_1}[a^{\cdot}(\omega t+\alpha)g(x(t))y(t)-b^{\cdot}(\omega t+\alpha)x^{\cdot}(t)y^{\cdot}(t)]dt \tag{3.2}$$

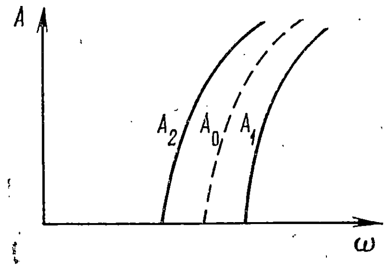
Пусть $y_2(t)$ — нечетное решение уравнения (1.3) $(y_2(0)=0, y_2^{\cdot}(0)>0)$. Положив в (3.2) $t_0=0$, $\alpha=0$, $y=y_2(t)$, $x=x_1(t)$ и учитывая, что $x^{\cdot}(0)=0$, $b^{\cdot}(\omega t)\leqslant 0$, $a^{\cdot}(\omega t)\leqslant 0$, $x_1^{\cdot}(t)<0$, $x_1(t)>0$, $g(x_1(t))>0$, $a(\omega t)g(x_1(t))+$

$+f(x_1(t))>0$ при $0<t<\pi/\omega$, $b(\omega t)+c>0$, найдем, что $y_2(t)>0$, $y_2^{\boldsymbol\cdot}(t)>0$ на $(0, \pi/\omega]$, так как при $y_2^{\boldsymbol\cdot}(t)=0$ левая часть (3.2) равна нулю, правая — отрицательна. Поэтому для соответствующего решения $u_2(t)$ уравнения (1.4) $u_2^{\boldsymbol\cdot}(\pi/\omega)=y_2^{\boldsymbol\cdot}(\pi/\omega)[b(\pi)+c]^{1/2}>0$, следовательно, $\lambda_H>1$. Итак, $\lambda_1^-=$ $=\min(\lambda_r, \lambda_H)>1$.

Так как при условии (3.1) решения уравнений (1.3), (1.4) осциллируют, а значению λ_0^+ отвечает неосциллирующая собственная функция [7], то $\lambda_0^+<1$. Таким образом, для решения $x_1(t)$ выполняется условие устойчивости $\lambda_0^+<1<\lambda_1^-$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Положив в (3.2) $t_0=0$, $\alpha=\pi$, $x=x_2(t)$, $y=y_2(t)$, аналогично найдем, что $y_2^{\boldsymbol\cdot}(\pi/\omega)<0$, $u_2^{\boldsymbol\cdot}(\pi/\omega)<0$, откуда $\lambda_H<1$. Таким образом, здесь $\lambda_1^-<1<\lambda_1^+$, т. е. решение $x_2(t)$ неустойчиво.

Теорема 2. В системе (1.2), (2.5) решение $x_1(t)$ неустойчиво, решение $x_2(t)$ при условии (2.9) устойчиво.

Доказательство. Показано, что при условии (2.5) решение $y_1(t)$ имеет нуль на $(0, \pi/\omega)$, следовательно, здесь $\lambda_r<1$ при $x=x_1(t)$ и $x=x_2(t)$.

При доказательстве теоремы 1 без использования (2.4) установлено, что $\lambda_H>1$ для решения $x_1(t)$, т. е. для него выполняется условие неустойчивости $\lambda_1^-<1<\lambda_1^+=\max(\lambda_r, \lambda_H)$.

При условии (2.9) $y_2(t)>0$ на $(0, \pi/\omega]$, поэтому полученное при доказательстве теоремы 1 неравенство $\lambda_H<1$ для решения $x_2(t)$ сохраняется. Собственная функция, отвечающая собственному значению λ_2^-, имеет период $2\pi/\omega$ и осциллирует, следовательно, при $\lambda=\lambda_2^-$ минимальное расстояние между нулями решений (1.5) $\Delta\leqslant\pi/\omega$. Как отмечалось, $\Delta>\pi/\omega$ при $\lambda=1$ и условии (2.9), поэтому $\lambda_2^->1$. Таким образом, для решения $x_2(t)$ выполняется условие устойчивости $\lambda_1^+<1<\lambda_2^-$.

Если условие (2.4) или (2.5) не выполняется, то амплитудно-частотные характеристики $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, вообще говоря, не являются монотонными. Как видно из полученных результатов, $\lambda_r>1$ при $dA/d\omega<0$ и $\lambda_r<1$ при $dA/d\omega>0$. Поэтому в теоремах 1, 2 условия (2.4), (2.5) могут быть заменены условиями $dA/d\omega<0$ и $dA/d\omega>0$ соответственно. Это позволяет определять устойчивость решений $x_1(t)$, $x_2(t)$ по найденным характеристикам $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$.

Условие (3.1), обеспечивающее осцилляцию решений уравнения (1.4), при $b=0$ может быть заменено [7] более слабым условием

$$\int_0^{\pi/\omega}[a(\omega t)g_x(x(t))+f_x(x(t))]dt\geqslant 0 \tag{3.3}$$

требующим, однако, отыскания решения $x_1(t)$.

4. Перейдем к исследованию вращательных движений в системе с угловой координатой. Так как здесь функции $f(x)$ и $g(x)$ 2π-периодичны, то в условиях (2.1) $x>0$ следует заменить на $0<x<\pi$.

Будем рассматривать решения

$$x^{\cdot}(t+T)=x^{\cdot}(t)>0, \quad x(t+T)=x(t)+2\pi$$
$$x(0)=0, \quad T=2\pi/\omega \tag{4.1}$$

отвечающие вращениям с периодом, равным периоду возмущающего воздействия, и средней угловой скоростью ω.

Покажем, что при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$ для любого ω уравнение (1.2) имеет решение (4.1). Пусть $x(t, \omega, x_\pi^{\cdot})$ — решение (1.2), удовлетворяющее условиям $x(\pi/\omega, \omega, x_\pi^{\cdot})=\pi$, $x^{\cdot}(\pi/\omega, \omega, x_\pi^{\cdot})=x_\pi^{\cdot}>0$, $v(x, \omega, x_\pi^{\cdot})$ — соответствующая фазовая траектория ($v(\pi, \omega, x_\pi^{\cdot})=x_\pi^{\cdot}$). Так как $ag+f>0$ при $0<x<\pi$, $b+c>0$, то в силу (1.2) $v(x, \omega, x_\pi^{\cdot})>0$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$. Поэтому $x(t, \omega, x_\pi^{\cdot})=0$ при некотором $t=t_*$, причем

$$t_*(\omega, x_\pi^{\cdot})=\frac{\pi}{\omega}-\int\limits_0^\pi \frac{dx}{v(x,\omega,x_\pi^{\cdot})} \tag{4.2}$$

Очевидно, что $v(x, \omega, x_\pi^{\cdot})\to\infty$, $t_*(\omega, x_\pi^{\cdot})\to\pi/\omega$ при $x_\pi^{\cdot}\to\infty$; так как $x=\pi$, $x^{\cdot}=0$ — особая точка уравнения (1.2), то $t_*(\omega, x_\pi^{\cdot})\to-\infty$ при $x_\pi^{\cdot}\to0$. Следовательно, для любого ω найдется такое $x_\pi^{\cdot}$, что $t_*=0$. Если при этом $\alpha=0$ или $\alpha=\pi$, то $v(-x, \omega, x_\pi^{\cdot})=v(x, \omega, x_\pi^{\cdot})=v(x+2\pi, \omega, x_\pi^{\cdot})$ и соответствующее решение $x(t, \omega, x_\pi^{\cdot})$ имеет вид (4.1).

Решения, удовлетворяющие условиям (4.1) при $\alpha=0$ и $\alpha=\pi$, обозначим $x_{1b}(t)$ и $x_{2b}(t)$ соответственно. Для таких решений в (1.4) $r(t)=r(-t)$, $\theta=2\pi/\omega$.

Теорема 3. В системе (1.2), (2.1) решение $x_{2b}(t)$ неустойчиво, решение $x_{1b}(t)$ устойчиво при условии

$$\frac{1}{c-b(0)}\max_{x,s}[a(s)g_x(x)+f_x(x)]\leqslant\frac{\omega^2}{4} \tag{4.3}$$

Доказательство. Из последнего условия (2.1) следует, что при малых t $p(t)>0$, откуда в силу (1.3) $y_1^{\cdot}(t)<0$, где $y_1(0)=1$, $y_1^{\cdot}(0)=0$. При условии (4.3) $\Delta>(2\pi/\omega)$, поэтому $y_1(t)>0$ на $[0, \pi/\omega]$ и $\lambda_1^->1$. Положив в (3.2) $t_0=0$, $\alpha=0$, $x=x_{1b}(t)$, $y=y_1(t)$ и учитывая условия (2.1), найдем, что $y_1^{\cdot}(t)<0$ на $(0, \pi/\omega]$ и, следовательно, в (1.5) $u_1^{\cdot}(\pi/\omega)<0$ при $\lambda=1$. Так как при $\lambda=\lambda_0^+$ соответствующая собственная функция удовлетворяет условиям $u^{\cdot}(-\pi/\omega)=u^{\cdot}(\pi/\omega)=0$, то $\lambda_0^+<1$. Таким образом, для решения $x_{1b}(t)$ выполняется условие устойчивости $\lambda_0^+<1<\lambda_1^-$.

Так как $ag+f<0$ при $\pi<x<2\pi$, то $p(t)<0$ и $y_3^{\cdot}(t)>0$ при малых $t-\pi/\omega>0$, где $y_3(\pi/\omega)=1$, $y_3^{\cdot}(\pi/\omega)=0$. Положив в (3.2) $t_0=\pi/\omega$, $\alpha=\pi$, $x=x_{2b}(t)$, $y=y_3(t)$ и учитывая, что $\pi\leqslant x_{2b}(t)\leqslant2\pi$ при $\pi/\omega\leqslant t\leqslant2\pi/\omega$, аналогично найдем $y_3^{\cdot}(2\pi/\omega)>0$, $u_3^{\cdot}(2\pi/\omega)>0$. Поэтому здесь $\lambda_0^+>1$, т. е. для решения $x_{2b}(t)$ выполняется условие неустойчивости $\lambda_0^-=0<1<\lambda_0^+$.

Отметим, что при отсутствии инерционного параметрического воздействия ($b=0$) теорема остается справедливой, если условие $ag(x)+f(x)>0$ на $(0, \pi)$ не выполняется. Действительно, положив в (3.2) $\alpha=0$, $x=x_{1b}(t)$, $t_0=0$, $t_1=\pi/\omega$, $y=y_1(t)$, найдем $y_1^{\cdot}(\pi/\omega)<0$, откуда, как показано выше, следует устойчивость $x_{1b}(t)$. Неустойчивость $x_{2b}(t)$ доказывается аналогично. Однако существование $x_{1b}(t)$, $x_{2b}(t)$ нуждается здесь в обосновании. Можно, в частности, показать, что такие решения заведомо существуют, если $\omega\geqslant(0{,}5M\pi)^{1/2}$, где $M=\max\limits_{s,\,x}[a(s)g(x)+f(x)]c^{-1}$.

5. Проиллюстрируем применение полученных результатов к анализу конкретных систем.

Физический маятник, горизонтальная ось которого совершает вертикальные колебания с частотой ω и амплитудой A, описывается уравнением

$$Ix^{\cdot\cdot}+mgL\sin x+mLA\omega^2\sin x\cos(\omega t+\alpha)=0 \tag{5.1}$$

где x — угловое отклонение маятника от вертикали, g — ускорение свободного падения, m, I, L — соответственно масса, момент инерции и длина маятника.

Уравнение (5.1) принадлежит к типу (1.2), где следует считать $f(x) = mgL\sin x$, $g(x)=mLA\omega^2 \sin x$, $a(\omega t)=\cos \omega t$, $c=I$, $b=0$. При $g \geqslant A\omega^2$ и $0<x<\pi$ выполняются условия (2.1), (2.4), поэтому амплитудно-частотные характеристики $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$ рассмотренных периодических колебаний $x_1(t)$, $x_2(t)$ имеют вид, представленный на фиг. 1, причем $A_1(\omega) \to \pi$, $A_2(\omega) \to \pi$ при $\omega \to 0$.

В соответствии с теоремой 1 для любого ω решение $x_2(t)$ неустойчиво, решение $x_1(t)$ устойчиво при условии (3.1), т. е. при $A_1 \leqslant \pi/2$. При $A_1 > \pi/2$ достаточным условием устойчивости служит неравенство (3.3).

При $g \geqslant A\omega^2$ уравнение (5.1) имеет решения $x_{1b}(t)$, $x_{2b}(t)$, отвечающие вращательным движениям маятника. В соответствии с теоремой 3 $x_{2b}(t)$ неустойчиво, $x_{1b}(t)$ устойчиво при условии (4.3), которое принимает вид $mgL+mLA\omega^2 \leqslant 0{,}25I\omega^2$. Так как здесь инерционный коэффициент постоянен, то указанные результаты остаются в силе и при $g<A\omega^2$, если только решения $x_{1b}(t)$, $x_{2b}(t)$ существуют. Последнее заведомо имеет место при $\omega \geqslant [0{,}5\pi(mgL+mLA\omega^2)]^{1/2} I^{-1}$.

Отметим, что выполненный анализ устойчивости решений $x_{1b}(t)$, $x_{2b}(t)$ обобщает аналогичные результаты, полученные в [1, 10] асимптотическими методами в предположении о близости движения маятника к равномерному вращению.

В качестве примера системы с одновременно изменяющейся инерцией и жесткостью рассмотрим математический маятник переменной длины (маятник Эйнштейна [3]). Соответствующее уравнение движения

$$[L^2(t)\dot{x}]^{\boldsymbol{\cdot}}+gL(t)\sin x=0 \qquad (5.2)$$

также относится к типу (1.2). Если $L(t)=L(-t)=-L(t+\pi/\omega)$, причем $L(t)$ монотонно изменяется между экстремальными значениями, то условия (2.1), (2.4) выполняются. Поэтому полученные выше результаты, относящиеся к колебательным решениям системы (5.1), справедливы и для данной системы.

Вращательные движения $x_{1b}(t)$, $x_{2b}(t)$ существуют здесь при любом ω. Вращение $x_{2b}(t)$ неустойчиво, $x_{1b}(t)$ устойчиво при $4L_{\max}g \leqslant \omega^2 L^2_{\min}$, где $L_{\max}$ и $L_{\min}$ — максимальная и минимальная длины маятника.

Заметим, что в отличие от колебательных движений устойчивым является такое вращение маятника, при котором в момент прохождения нижнего положения равновесия его длина максимальна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике: Сб. тр. ин-та строит. механ. АН УССР, Киев, 1950, № 4, с. 9—34.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
3. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
4. *Шмидт Г.* Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
5. *Зевин А. А.* Устойчивость периодических колебаний в системах с мягкой и жесткой нелинейностью.— ПММ, 1980, вып. 44, № 4, с. 640—649.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
8. *Зевин А. А.* Исследование амплитудно-частотных характеристик гармонических колебаний в нелинейных системах второго порядка при силовом и параметрическом возбуждении.– Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 29–38.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
10. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
12.X.1981