

УДК 531.55:521.2

ВЛИЯНИЕ ДИССИПАТИВНОГО МАГНИТНОГО МОМЕНТА НА ВРАЩЕНИЕ СПУТНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС

САЗОНОВ В. В., САРЫЧЕВ В. А.

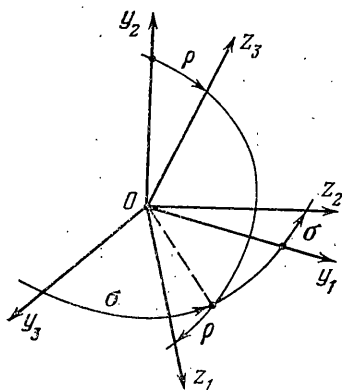
Одним из внешних моментов, разрушающих режим ориентации спутников, стабилизируемых вращением, является диссипативный момент от вихревых токов, наведенных в оболочке спутника магнитным полем Земли. Действие этого момента приводит к уменьшению угловой скорости спутника, которая, если не принять специальных мер, через определенное время окажется меньше предельно допустимого значения. Для поддержания угловой скорости в заданных пределах спутник периодически подкручивают, прикладывая к нему управляющий момент. Таким образом, движение спутника в рассматриваемом режиме ориентации складывается из пассивных участков, на которых управляющего момента нет, и участков раскрутки.

Для оценки экономичности такого режима необходимо уметь вычислять длительность пассивных участков. Это вычисление может быть проведено с использованием усредненных уравнений, описывающих эволюцию быстрого вращения спутника под действием диссипативного магнитного момента. Для осесимметричного спутника такие усредненные уравнения были выведены в [1], некоторые оценки решений этих уравнений получены в [2].

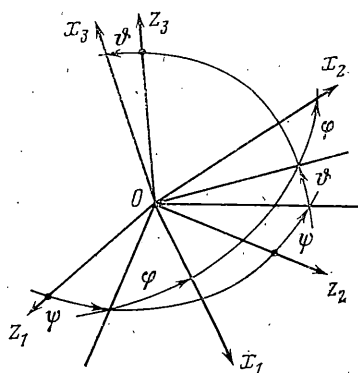
Публикуемая работа посвящена решению аналогичных задач для трехосного спутника. Далее выведены усредненные уравнения, описывающие эволюцию движения Эйлера — Пуансо спутника под действием диссипативного магнитного момента, и получены некоторые неравенства для решений этих уравнений. В ряде случаев такие неравенства позволяют достаточно точно оценить характерные времена торможения спутника без интегрирования усредненных уравнений.

Помимо диссипативного магнитного момента эволюция быстрого вращения спутника существенно зависит от гравитационного момента и регрессии орбиты. Однако, поскольку последние два фактора в первом приближении метода усреднения не влияют на движение спутника относительно вектора его кинетического момента и на абсолютную величину этого вектора [1, 3, 4], они в публикуемой работе не учитываются. Считается, что спутник представляет собой твердое тело, центр масс которого движется по круговой орбите, неподвижной в абсолютном пространстве. Из внешних моментов, действующих на спутник, учитывается только диссипативный магнитный момент от вихревых токов.

1. Для записи уравнений движения спутника относительно центра масс введем три правые декартовы системы координат: $Ox_1x_2x_3$ — система,



Фиг. 1



Фиг. 2

жестко связанная со спутником, точка O — центр масс спутника, оси Ox_1, Ox_2, Ox_3 — главные центральные оси инерции спутника; Oy_1, Oy_2, Oy_3 — система координат, связанная с восходящим узлом орбиты спутника, ось Oy_3 направлена параллельно радиус-вектору восходящего узла орбиты относительно центра Земли, ось Oy_1 параллельна касательной к орбите в узле и направлена в сторону движения спутника; Oz_1, Oz_2, Oz_3 — система координат, связанная с вектором L кинетического момента спутника, вычисленного относительно точки O , ось Oz_3 направлена по L , ось Oz_2 лежит в плоскости Oy_1, Oy_3 .

Положение системы координат Oz_1, Oz_2, Oz_3 относительно системы Oy_1, Oy_2, Oy_3 будем задавать при помощи углов ρ и σ (фиг. 1). Матрица перехода между этими системами координат имеет вид

	z_1	z_2	z_3			
y_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}	$\beta_{11} = \cos \rho \sin \sigma$	$\beta_{12} = \cos \sigma$	$\beta_{13} = \sin \rho \sin \sigma$
y_2	β_{21}	β_{22}	β_{23}	$\beta_{21} = -\sin \rho$	$\beta_{22} = 0$	$\beta_{23} = \cos \rho$
y_3	β_{31}	β_{32}	β_{33}	$\beta_{31} = \cos \rho \cos \sigma$	$\beta_{32} = -\sin \sigma$	$\beta_{33} = \sin \rho \cos \sigma$

Ориентацию системы Ox_1, Ox_2, Ox_3 относительно системы Oz_1, Oz_2, Oz_3 зададим углами Эйлера ψ, ϑ, φ (фиг. 2). Соответствующая матрица перехода имеет вид

	x_1	x_2	x_3	
z_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	$\alpha_{11} = \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi$
z_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	$\alpha_{21} = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi$
z_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	$\alpha_{31} = \sin \vartheta \sin \varphi$
				$\alpha_{12} = -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \quad \alpha_{13} = \sin \psi \sin \vartheta$
				$\alpha_{22} = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi, \quad \alpha_{23} = -\cos \psi \sin \vartheta$
				$\alpha_{32} = \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \alpha_{33} = \cos \vartheta$

Пусть a — некоторый вектор, a_1, a_2, a_3 — его компоненты в какой-либо системе координат. Если эти компоненты указаны в системе Ox_1, Ox_2, Ox_3 , то будем писать $a = (a_1, a_2, a_3)_x$, если они указаны в системе Oy_1, Oy_2, Oy_3 или Oz_1, Oz_2, Oz_3 , то соответственно пишем $a = (a_1, a_2, a_3)_y$ или $a = (a_1, a_2, a_3)_z$.

Введем обозначения: A, B, C — моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 , $L = |L|$, $M = (M_1, M_2, M_3)_z$ — вычисленный относительно точки O главный момент внешних сил, действующих на спутник, t — время. Дифференцирование по t будем обозначать точкой. Запишем уравнения движения спутника относительно центра масс [1, 3, 4]:

$$\begin{aligned} L &= M_3, & \dot{\rho} &= M_1/L, & \dot{\sigma} &= M_2/L \sin \rho \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\dot{\psi} = L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L} \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{M_2}{L} \operatorname{ctg} \rho$$

$$\dot{\vartheta} = L \sin \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) - \frac{M_1 \sin \psi - M_2 \cos \psi}{L}$$

$$\dot{\varphi} = L \cos \vartheta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi}{L \sin \vartheta}$$

В качестве одной из переменных, описывающей движение спутника, будет использоваться величина w , определяемая соотношением

$$w^2 = \frac{B-A}{A} \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi + \frac{B-C}{C} \cos^2 \vartheta \quad (1.2)$$

Дифференциальное уравнение для w имеет вид

$$ww' = \frac{B}{L} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi (M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi) + \\ + \frac{B}{L} \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \sin \vartheta \cos \vartheta (M_1 \sin \psi - M_2 \cos \psi) \quad (1.3)$$

Как указывалось, из внешних моментов, действующих на спутник, будем учитывать только диссипативный магнитный момент от вихревых токов. Этот момент определим формулой [1]:

$$\mathbf{M} = \gamma_1 (\mathbf{H} \times (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\omega})) \quad (1.4)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — абсолютная угловая скорость спутника, $\mathbf{H}$ — вектор напряженности магнитного поля Земли в точке O , γ_1 — положительный коэффициент, зависящий от формы оболочки спутника и ее удельного сопротивления. Магнитное поле $\mathbf{H}$ аппроксимируем полем диполя, магнитный момент которого направлен по оси вращения Земли. Пусть m — абсолютная величина этого магнитного момента, u — аргумент широты спутника, r — радиус орбиты, i — ее наклонение. Тогда компоненты вектора $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)_x$ можно представить в виде

$$H_1 = \frac{m}{r^3} \sin i (1 - 3 \sin^2 u) \\ H_2 = \frac{m}{r^3} \cos i, \quad H_3 = -\frac{3m}{r^3} \sin i \sin u \cos u \quad (1.5)$$

Зависимость аргумента широты от времени задается уравнением $\dot{u} = \omega_0$, где $\omega_0 = \text{const} > 0$ — угловая скорость орбитального движения. Для компонент вектора $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)_x$ имеем выражения

$$\omega_1 = L\alpha_{31}/A, \quad \omega_2 = L\alpha_{32}/B, \quad \omega_3 = L\alpha_{33}/C \quad (1.6)$$

Подстановка соотношений (1.5), (1.6) в (1.4) и затем (1.4) в (1.1) (с необходимыми преобразованиями перехода от одной системы координат к другой) приводит к замкнутой системе уравнений относительно L , ρ , σ , ψ , ϑ , φ .

Будем считать, что параметры полученной системы удовлетворяют соотношению

$$B\omega_0 \gg \gamma_1 (m/r^3)^2 \quad (1.7)$$

Такое предположение позволяет ввести в систему малый параметр и воспользоваться для ее интегрирования схемой метода усреднения, предложенной в [3]:

2. Рассмотрим невозмущенное движение. При $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ система (1.1) принимает вид

$$L' = 0, \quad \rho' = 0, \quad \sigma' = 0 \\ \psi' = L \left(\frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \quad (2.1)$$

$$\vartheta' = L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \\ \varphi' = L \cos \vartheta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) \quad (2.2)$$

В силу первых трех уравнений этой системы $L=\text{const}$, $\rho=\text{const}$, $\sigma=\text{const}$, т. е. вектор $\mathbf{L}$ кинетического момента спутника неподвижен в абсолютном пространстве. Уравнения (2.1), (2.2), в которых L — параметр, описывают движение твердого тела в случае Эйлера — Пуансо. Уравнения (2.2) не содержат ψ и могут быть проинтегрированы независимо. После того как их решение найдено, ψ определяется квадратурой.

Интегрирование системы (2.2) проведем полагая $B > C > A$. Эти соотношения далее всюду считаются выполненными. Нетрудно проверить, что система (2.2) допускает первый интеграл (ср. (1.2)) $w^2 = \text{const}$, позволяющий свести ее интегрирование к квадратуре. Далее ограничимся анализом случая

$$0 \leq w^2 < (B-C)/C \quad (2.3)$$

когда полюды охватывают ось Ox_2 . Замена переменных

$$\sin \vartheta \sin \varphi = -\sqrt{\frac{A}{B-A}} w \cos \alpha, \quad \cos \vartheta = \sqrt{\frac{C}{B-C}} w \sin \alpha$$

приводит уравнения (2.2) к виду

$$\dot{w} = 0, \quad \dot{\alpha} = \Omega \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} \quad (2.4)$$

$$\Omega = \frac{L}{B} \sqrt{\frac{(B-C)(B-A-Aw^2)}{AC}}, \quad k^2 = \frac{B(C-A)w^2}{(B-C)(B-A-Aw^2)}$$

где вследствие (2.3) $k^2 < 1$. Решение уравнения относительно α сводится к обращению эллиптического интеграла первого рода и дает соотношения

$$\sin \vartheta \sin \varphi = -\sqrt{\frac{A}{B-A}} w \operatorname{cn} \tau, \quad \cos \vartheta = \sqrt{\frac{C}{B-C}} w \operatorname{sn} \tau \quad (2.5)$$

Здесь $\operatorname{sn} \tau$ и $\operatorname{cn} \tau$ — эллиптические функции Якоби с модулем k , $\tau = \Omega(t+t_0)$, t_0 — произвольная постоянная. Решение (2.5) — периодическое с периодом $T_1 = 4K/\Omega$, где $K = K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Подставляя (2.5) в уравнение (2.1) и интегрируя его, получаем

$$\psi = \Omega_\psi(t+t_0) + \psi_1(t+t_0) + \text{const}$$

$$\Omega_\psi = \frac{L}{B} \left[1 + \frac{w^2}{2} + O(w^4) \right] \quad (2.6)$$

$$\psi_1(t+T_1/2) = \psi_1(t), \quad \psi_1(t) = O(w^2)$$

При $w=0$ соотношения (2.5), (2.6) принимают вид $\sin \vartheta \sin \varphi = 0$, $\cos \vartheta = 0$, $\psi = Lt/B + \text{const}$ и описывают стационарное вращение спутника вокруг оси Ox_2 .

3. Эволюцию быстрого вращения спутника под действием диссипативного магнитного момента будем описывать переменными L , ρ , σ , w . Переменные L , ρ , σ задают вектор $\mathbf{L}$ в абсолютном пространстве; переменная w характеризует движение спутника относительно этого вектора. Чтобы получить соответствующие эволюционные уравнения, усредним правые части уравнений относительно L , ρ , σ и w в системе (1.1), (1.3) по движению Эйлера — Пуансо и по орбитальному движению.

Пусть, например, уравнение (1.3) имеет вид: $\dot{w} = F(u, \psi, \vartheta, \varphi, L, \rho, \sigma)$. Тогда, если частоты $2\pi/T_1$, Ω_ψ и ω_0 рационально несоизмеримы (нерезонансный случай), эволюционное уравнение для w можно записать следующим образом [3]:

$$\dot{w} = \frac{1}{4\pi^2 T_1} \int_0^{2\pi} du \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{T_1} F[u, \psi, \vartheta(t), \varphi(t), L, \rho, \sigma] dt \quad (3.1)$$

Здесь функции $\vartheta(t)$ и $\varphi(t)$ определены соотношениями (2.5). Аналогично выводятся уравнения для L , ρ и σ ¹. Полученная система описывает изменение переменных L , ρ , σ , w с точностью $\sim \gamma_1 m^2 / B \omega_0 r^6$ на интервале времени длины $\sim Br^6 / \gamma_1 m^2$.

В дальнейшем полагаем, что частоты $2\pi/T_1$, Ω_ψ , ω_0 рационально несоизмеримы, и для сокращения записи будем использовать обозначения

$$\langle f \rangle_u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f du, \quad \langle f \rangle_\psi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\psi, \quad \langle f \rangle_1 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f dt \Big|_{\substack{\vartheta=\vartheta(t) \\ \varphi=\varphi(t)}}$$

$$\langle f \rangle_e = \langle \langle f \rangle_1 \rangle_\psi = \langle \langle f \rangle_\psi \rangle_1$$

$$\langle f \rangle = \langle \langle f \rangle_e \rangle_u, \quad f = f(u, \psi, \vartheta, \varphi, L, \rho, \sigma)$$

Здесь функции $\vartheta(t)$ и $\varphi(t)$ заданы соотношениями (2.5). В новых обозначениях уравнение (3.1) можно записать в виде $w' = \langle F \rangle$.

Перейдем к непосредственному выводу эволюционных уравнений. Для получения уравнений относительно L , ρ , σ вычислим $\langle M_j \rangle$ ($j=1, 2, 3$). Пусть $\mathbf{H} = (H_{z1}, H_{z2}, H_{z3})_z$, $\boldsymbol{\omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)_z$. Тогда $M_j = -\gamma_1 (H_{z1}^2 \delta_{jn} - H_{zj} H_{zn}) \Omega_n$. Здесь и далее (если не оговорено особо) индексы $j, l, n, \dots$ принимают значения 1, 2, 3; по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3; δ_{jn} — символ Кронекера.

Сначала вычислим $\langle M_j \rangle_e$. Имеем

$$\langle M_j \rangle_e = -\gamma_1 (H_{z1}^2 \delta_{jn} - H_{zj} H_{zn}) \langle \Omega_n \rangle_e$$

Поскольку $\Omega_n = \alpha_{nl} \omega_l$ (величины ω_l определены соотношениями (1.6)), то

$$\langle \Omega_n \rangle_e = \frac{L}{A} \langle \alpha_{n1} \alpha_{31} \rangle_e + \frac{L}{B} \langle \alpha_{n2} \alpha_{32} \rangle_e + \frac{L}{C} \langle \alpha_{n3} \alpha_{33} \rangle_e$$

Отсюда, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \langle \alpha_{jl} \alpha_{3n} \rangle_\psi &= 0 \quad (j=1, 2), \quad \langle \alpha_{31}^2 \rangle_e = \langle \sin^2 \varphi \sin^2 \vartheta \rangle_1 = \\ &= \frac{Aw^2}{K(B-A)} \int_0^\pi \sin^2 \tau d\tau = \frac{Aw^2}{B-A} \left(1 - \frac{K-E}{k^2 K} \right) \\ \langle \alpha_{33}^2 \rangle_e &= \langle \cos^2 \vartheta \rangle_1 = \frac{Cw^2}{K(B-C)} \int_0^\pi \sin^2 \tau d\tau = \frac{Cw^2}{B-C} \frac{K-E}{k^2 K} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\langle \alpha_{32}^2 \rangle_e = 1 - \langle \cos^2 \vartheta \rangle_1 - \langle \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \rangle_1$$

где $E = E(k)$ — полный эллиптический интеграл второго рода, получаем

$$\langle \Omega_1 \rangle_e = \langle \Omega_2 \rangle_e = 0, \quad \langle \Omega_3 \rangle_e = L(1+w^2)/B$$

Таким образом

$$\langle M_j \rangle_e = -[\gamma_1 L(1+w^2) (H_{z1}^2 \delta_{j3} - H_{zj} H_{z3})] / B$$

¹ Если учитывается совместное действие на спутник гравитационного и диссипативного магнитного моментов, то для применения к системе (1.1), (1.3) метода усреднения наряду с условием (1.7) необходимо потребовать еще выполнения условия $L \gg B \omega_0$. Для реальных спутников, стабилизируемых вращением, это условие всегда выполнено. В таком случае $\Omega_\psi \gg \omega_0$, $2\pi/T_1 \gg \omega_0$ и способ усреднения (3.1) справедлив, если только две частоты Ω_ψ и $2\pi/T_1$ рационально несоизмеримы [3].

Для компонент H_{zj} имеем выражения $H_{zj} = \beta_{nj} H_n$ (H_n определены соотношениями (1.5)), поэтому

$$\langle M_j \rangle = - \frac{\gamma_1 L (1+w^2)}{B} \beta_{nj} \beta_{l3} \langle H_{zj}^2 \delta_{nl} - H_n H_l \rangle_u$$

Введем обозначения

$$\gamma = \frac{\gamma_1 m^2}{r^6}, \quad c_{jn} = \frac{r^6}{m^2} \langle H_{zj}^2 \delta_{jn} - H_j H_n \rangle_u$$

Легко вычислить

$$c_{11} = 1 + \frac{1}{8} \sin^2 i, \quad c_{22} = \frac{5}{2} \sin^2 i, \quad c_{33} = 1 + \frac{3}{8} \sin^2 i$$

$$c_{12} = c_{21} = \frac{1}{2} \sin i \cos i, \quad c_{13} = c_{31} = c_{23} = c_{32} = 0$$

Теперь можно записать эволюционные уравнения для L , ρ и σ

$$\begin{aligned} \dot{L} &= - \frac{\gamma L (1+w^2)}{B} c_{n1} \beta_{n3} \beta_{l3} \\ \dot{\rho} &= - \frac{\gamma (1+w^2)}{B} c_{n1} \beta_{n1} \beta_{l3} \\ \dot{\sigma} &= - \frac{\gamma (1+w^2)}{B \sin \rho} c_{n1} \beta_{n2} \beta_{l3} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Вычислив среднее значение правой части (1.3), выведем уравнение для w . Сначала проведем усреднение по ψ . Имеем

$$\begin{aligned} M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi &= \gamma_1 [H_{z1} H_{zj} \Omega_j \cos \psi + H_{z2} H_{zj} \Omega_j \sin \psi - \\ &\quad - H_{zj}^2 (\Omega_1 \cos \psi + \Omega_2 \sin \psi)] \\ M_1 \sin \psi - M_2 \cos \psi &= \gamma_1 [H_{z1} H_{zj} \Omega_j \sin \psi - \\ &\quad - H_{z2} H_{zj} \Omega_j \cos \psi - H_{zj}^2 (\Omega_1 \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi)] \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} \langle \Omega_1 \cos \psi \rangle_\psi &= \langle \Omega_2 \sin \psi \rangle_\psi = \frac{1}{2} L \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi (1/A - 1/B) \\ \langle \Omega_1 \sin \psi \rangle_\psi &= - \langle \Omega_2 \cos \psi \rangle_\psi = \frac{1}{2} L \sin \vartheta \cos \vartheta (1/C - \sin^2 \varphi / A - \cos^2 \varphi / B) \\ \langle \Omega_3 \cos \psi \rangle_\psi &= \langle \Omega_3 \sin \psi \rangle_\psi = 0 \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} &\langle M_1 \cos \psi + M_2 \sin \psi \rangle_\psi = \\ &= - \frac{\gamma_1 L}{2} \sin \vartheta \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) (H_{z1}^2 + H_{z2}^2 + 2H_{z3}^2) \\ &\langle M_1 \sin \psi - M_2 \cos \psi \rangle_\psi = \\ &= - \frac{\gamma_1 L}{2} \sin \vartheta \cos \vartheta \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) (H_{z1}^2 + H_{z2}^2 + 2H_{z3}^2) \end{aligned}$$

Уравнение (1.3), правая часть которого усреднена по ψ , имеет вид

$$\begin{aligned} ww \cdot &= - \frac{\gamma_1 B}{2} (H_{z1}^2 + H_{z2}^2 + 2H_{z3}^2) \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \right] \end{aligned}$$

При помощи (1.2) выражение, стоящее в квадратных скобках, можно преобразовать к виду

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} - \frac{2}{C}\right) \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)^2 \cos^2 \vartheta - \frac{w^4}{B^2} - \frac{2w^2}{B} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)$$

и с учетом (3.2) выполнить над этим выражением операцию усреднения. Поскольку

$$\gamma_1 \langle H_{z1}^2 + H_{z2}^2 + 2H_{z3}^2 \rangle_u = \gamma (c_0 - c_{jn} \beta_{j3} \beta_{n3})$$

где $c_0 = c_{jj} = 2 + 3 \sin^2 i$, окончательное уравнение, описывающее вековое изменение w , имеет вид

$$w' = -\frac{\gamma w}{2} (c_0 - c_{jn} \beta_{j3} \beta_{n3}) \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) \frac{K-E}{k^2 K} - \frac{w^2}{B} \right] \quad (3.4)$$

В уравнениях (3.3), (3.4) коэффициенты β_{jn} суть тригонометрические функции ρ и σ , а комбинация $(K-E)/k^2 K$ выражается через w^2 при помощи четвертого соотношения (2.4). Таким образом, эти уравнения образуют замкнутую систему. Если вместо переменных L , ρ , σ ввести переменные $L_j = L \beta_{j3}$, представляющие собой компоненты вектора L в системе $Oy_1 y_2 y_3$, то уравнения (3.3), (3.4) перейдут в уравнения

$$\begin{aligned} L_1' &= -[\gamma(1+w^2)(c_{11}L_1 + c_{12}L_2)]/B \\ L_2' &= -[\gamma(1+w^2)(c_{12}L_1 + c_{22}L_2)]/B \\ L_3' &= -[\gamma(1+w^2)c_{33}L_3]/B \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$w' = -\frac{\gamma w}{2} \left(c_0 - \frac{c_{jn} L_j L_n}{L^2} \right) \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) \frac{K-E}{k^2 K} - \frac{w^2}{B} \right]$$

Системы (3.3), (3.4) и (3.5) — искомые системы эволюционных уравнений.

4. Приведем оценки решений усредненных уравнений. Пусть μ_1 и μ_2 — соответственно минимальное и максимальное собственные числа матрицы $\|c_{jn}\|$. Явные выражения для μ_1 и μ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 1/2 (1 + 2^{1/8} \sin^2 i - \sqrt{1 - 15/4 \sin^2 i + 2^{297/64} \sin^4 i}) \\ \mu_2 &= 1/2 (1 + 2^{1/8} \sin^2 i + \sqrt{1 - 15/4 \sin^2 i + 2^{297/64} \sin^4 i}) \end{aligned}$$

причем $\mu_1 \geq 0$. Поскольку $\mu_1 \leq c_{jn} \beta_{j3} \beta_{n3} \leq \mu_2$, из первого уравнения (3.3) следуют неравенства

$$-\frac{\gamma \mu_2 L (1+w^2)}{B} \leq L' \leq -\frac{\gamma \mu_1 L (1+w^2)}{B} \quad (4.1)$$

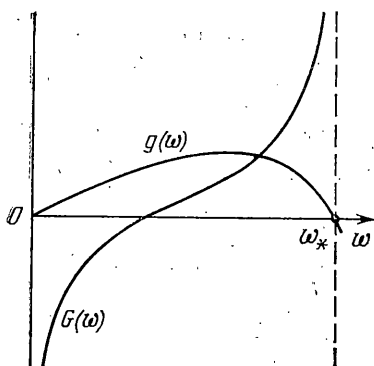
Аналогично из (3.4) получаем

$$-\lambda_1 g(w) \leq w' \leq -\lambda_2 g(w) \quad (4.2)$$

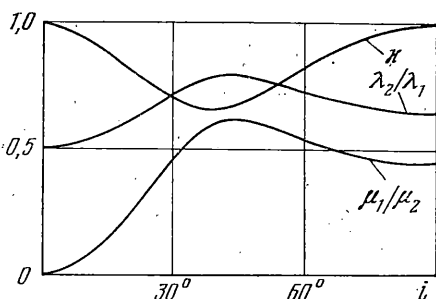
$$g(w) = Bw \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right) \frac{K-E}{k^2 K} - \frac{w^2}{B} \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{\gamma(c_0 - \mu_1)}{2B}, \quad \lambda_2 = \frac{\gamma(c_0 - \mu_2)}{2B}, \quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1$$

Так как при изменении k от 0 до 1 выражение $(K-E)/k^2 K$ монотонно возрастает от $1/2$ до 1, график функции $g(w)$ на отрезке $0 \leq w \leq w_*$ — $[(B-C)/C]^{1/2}$ имеет вид, указанный на фиг. 3. Пусть $G(w)$ — какая-либо



Фиг. 3



Фиг. 4

первообразная функции $1/g(w)$. На интервале $0 < w < w_*$ функция $G(w)$ монотонно возрастает, причем если $w \rightarrow +0$, то $G(w) \rightarrow -\infty$. Примерный вид функции $G(w)$ приведен на фиг. 3.

Пусть $w(t)$ — зависимость от t переменной w для какого-либо решения системы (3.3), (3.4), $w(t_0) = w_0$, $0 < w_0 < w_*$. Тогда в силу (4.2) при $t \geq t_0$ имеем

$$-\lambda_1(t-t_0) \leq \int_{w_0}^{w(t)} \frac{dx}{g(x)} \leq -\lambda_2(t-t_0)$$

и, следовательно

$$G(w_0) - \lambda_1(t-t_0) \leq G[w(t)] \leq G(w_0) - \lambda_2(t-t_0) \quad (4.3)$$

Отсюда находим, что если $t \rightarrow +\infty$, то $G[w(t)] \rightarrow -\infty$, и в силу свойств функции $G(w)$ $w(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Пусть $w = p(s, w_0)$ — корень уравнения $G(w) = G(w_0) - s$ ($0 < w_0 < w_*$, $s \geq 0$), лежащий в интервале $0 \leq w \leq w_0$. Перечисленные условия определяют функцию $p(s, w_0)$ единственным образом. Эта функция монотонно убывает с ростом s , причем $p(0, w_0) = w_0$, и если $s \rightarrow +\infty$, то $p(s, w_0) \rightarrow 0$. При помощи функции $p(s, w_0)$ (4.3) в эквивалентной форме можно записать в виде

$$p[\lambda_1(t-t_0), w_0] \leq w(t) \leq p[\lambda_2(t-t_0), w_0] \quad (4.4)$$

При $w \ll w_*$ ($k \ll 1$) имеем

$$g(w) = \frac{w}{2} \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right), \quad G(w) = 2 \ln w / \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right)$$

$$p(s, w_0) = w_0 \exp \left[-\frac{s}{2} \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right) \right]$$

Таким образом, если $w_0 \ll w_*$, то

$$\begin{aligned} w_0 \exp \left[-\frac{\lambda_1(t-t_0)}{2} \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right) \right] &\leq w(t) \leq \\ &\leq w_0 \exp \left[-\frac{\lambda_2(t-t_0)}{2} \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Характерное время τ_w , за которое $w(t)$ уменьшится в e раз, оценивается неравенствами

$$\tau_w' \leq \tau_w \leq \tau_w''$$

$$\tau_w' = 2/\lambda_1 \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right), \quad \tau_w'' = 2/\lambda_2 \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right)$$

Зависимость отношения $\tau_w'/\tau_w''=\lambda_2/\lambda_1$ от i приведена на фиг. 4. Максимум этого отношения достигается при $i\approx 42^\circ$ и равен 0,8. В худшем случае при $i=0$ имеем $\lambda_2/\lambda_1=0,5$, на полярной орбите ($i=90^\circ$) $\lambda_2/\lambda_1=0,645$. Отношение λ_2/λ_1 характеризует также качество оценок (4.4). А именно, пусть N — любое положительное число. Тогда время τ , за которое $w(t)$ уменьшится в N раз, оценивается неравенствами $\tau'\leq\tau\leq\tau''$, где (ср. (4.4)) $p(\lambda_1\tau', w_0)=1/N$, $p(\lambda_2\tau'', w_0)=1/N$. Очевидно, что $\tau'/\tau''=\lambda_2/\lambda_1$.

Рассмотрим теперь неравенства (4.1). Пусть $L(t)$ — зависимость от t переменной L в каком-либо решении системы (3.3), (3.4), $L(t_0)=L_0>0$. В силу (4.4) из (4.1) следует, что

$$\begin{aligned} L_0 \exp \left\{ -\frac{\gamma\mu_2}{B} \int_{t_0}^t \{1+p^2[\lambda_2(t'-t_0), w_0]\} dt' \right\} &\leq L(t) \leq \\ &\leq L_0 \exp \left\{ -\frac{\gamma\mu_1}{B} \int_{t_0}^t \{1+p^2[\lambda_1(t'-t_0), w_0]\} dt' \right\} \leq \\ &\leq L_0 \exp \left[-\frac{\gamma\mu_1(t-t_0)}{B} \right]. \end{aligned}$$

Если $w_0 \ll w_*$, то, пренебрегая слагаемым p^2 в подынтегральном выражении оценки $L(t)$ снизу, получаем

$$L_0 \exp \left[-\frac{\gamma\mu_2(t-t_0)}{B} \right] \leq L(t) \leq L_0 \exp \left[-\frac{\gamma\mu_1(t-t_0)}{B} \right] \quad (4.6)$$

Характерное время τ_L , за которое $L(t)$ уменьшится в e раз, можно в данном случае оценить неравенствами $\tau_L' \leq \tau_L \leq \tau_L''$, $\tau_L' = B/\gamma\mu_2$, $\tau_L'' = B/\gamma\mu_1$. Заметим, что оценка $\tau_L \leq \tau_L''$ справедлива при любом w_0 .

Зависимость отношения $\tau_L'/\tau_L''=\mu_1/\mu_2$ от i представлена на фиг. 4. Максимум этого отношения достигается в точке $i\approx 43,5^\circ$ и равен 0,627; при $i=90^\circ$ имеем $\mu_1/\mu_2=0,45$. Сравнение графиков функций λ_2/λ_1 и μ_1/μ_2 на фиг. 4 показывает, что разброс в оценках времени τ_L больше разброса в оценках времени τ_w .

Рассмотрим отношение

$$\tau_w''/\tau_L' = 4\mu_2/(c_0 - \mu_2) \left(\frac{B}{A} + \frac{B}{C} - 2 \right)$$

График функции $\kappa(i) = \mu_2/(c_0 - \mu_2)$ приведен на фиг. 4. Максимум $\kappa(i)$ равен единице и достигается в точках $i=0$ и $i=90^\circ$, минимум равен 0,658 и достигается при $i\approx 37,8^\circ$. Если $(B/A + B/C) \gg 2$ (т. е. $B \approx C$ и $B/A \gg 1$ — спутник близок к динамически симметричному и вытянут вдоль оси Ox_1), то $\tau_L' \gg \tau_w''$. В этом случае в процессе торможения быстрого вращения спутника можно выделить два этапа. На первом этапе длительностью τ_w движение спутника по Эйлеру — Пуансо переходит в квазистационарное вращение вокруг оси максимального момента инерции (оси Ox_2). Величина кинетического момента спутника при этом меняется мало. На втором этапе длительностью τ_L происходит гашение угловой скорости квазистационарного вращения.

Как показывает проведенный анализ, при $i=40 \div 50^\circ$, $B/A \geq 20$ и $w_0 \ll w_*$ неравенства (4.5), (4.6) позволяют достаточно точно оценить характерные времена торможения быстрого вращения спутника под действием диссипативного магнитного момента. Например, для спутника с параметрами $i=50^\circ$, $C/B=0,97$, $A/B=0,05$ имеем $\tau_w'/\tau_w''=0,775$, $\tau_L'/\tau_L''=0,602$, $\tau_w''/\tau_L'=0,146$.

При выводе уравнений (3.3), (3.4) предполагалось, что частоты $2\pi/T_1$, Ω_Φ , ω_0 рационально несоизмеримы. В процессе же эволюции движения

спутника это условие может нарушаться. Тем не менее, как показало сравнение результатов численного интегрирования полных и усредненных уравнений, система (3.3), (3.4) оказалась довольно точной. Заметим, что если $w_0 \ll w_*$, то $\Omega_\psi = L/B$, $2\pi/T_1 = LB^{-1}[(B-A)(B-C)/AC]^{1/2}$ и условие рациональной несоизмеримости частот Ω_ψ , $2\pi/T_1$ и ω_0 легко проверяется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
2. Сарычев В. А., Сазонов В. В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника. — Космич. исследования, 1982, т. 20, вып. 2, с. 297—300.
3. Черноусько Ф. Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. — ПММ, 1963, т. 27, вып. 3, с. 474—483.
4. Белецкий В. В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.VII.1981