МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 531.383

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОМАЯТНИКОВЫХ СИСТЕМ В ПАРАМЕТРАХ РОДРИГА — ГАМИЛЬТОНА

ЧЕЛНОКОВ Ю. Н.

Получены в параметрах Родрига – Гамильтона матричные и кватернионные уравнения возмущенного движения достаточно широкого класса гиромаятниковых систем. Уравнения имеют близкую к симметричной структуру, в них бо́льшая часть членов линейная относительно параметров Родрига – Гамильтона λ_i и их первых производных по времени $\lambda_i^{\bullet}$. Содержащаяся в уравнениях движения гиросистемы нелинейность носит общий для всех уравнений движения характер: она обусловливается некоторой нелинейно-зависящей от λ_i и $\lambda_i^{\bullet}$ скалярной функцией, входящей в каждое из уравнений движения системы в виде множителя при соответствующей переменной.

К рассматриваемому классу гиромаятниковых систем относятся физический маятник с подвижной точкой опоры [1–3], платформа азимутально свободной системы инерциальной навигации [2, 4], двухроторная маятниковая гирорама [5, 6], тяжелый симметричный гироскоп по Лагранжу [7].

Публикуемая работа развивает и обобщает исследования [8–11] в части получения уравнений движения гиромаятниковых систем в параметрах Родрига – Гамильтона.

1. Рассмотрим движение гиромаятниковой системы, предполагая, что Земля является шаром с радиальным распределением плотности, а точка подвеса системы движется по поверхности невращающейся сферы радиуса R, концентрической с земным шаром. В качестве инерциальной примем систему координат $\xi\eta\zeta$ с началом в центре Земли и осями, неизменно ориентированными по неподвижным звездам. Уравнения движения гиромаятниковой системы будем составлять в параметрах Родрига — Гамильтона относительно системы координат $\xi^*\eta^*\zeta^*$ с началом в точке подвеса и осями, параллельными одноименным осям системы координат $\xi\eta\zeta$. Введем в рассмотрение правый ортогональный трехгранник $x^\circ y^\circ z^\circ$ с началом в точке подвеса системы и осью z°, направленной по геоцентрической вертикали от центра Земли. Положение осей x°, y° в азимуте будем считать пока произвольным. Введем также правый ортогональный трехгранник xyz с началом в точке подвеса системы и осью z, направленной вверх по прямой, соединяющей центр масс системы с точкой подвеса. Оси x и y в общем случае могут быть не связаны с гиромаятниковой системой.

Уравнения идеальной работы произвольной невозмущаемой гиромаятниковой системы в рамках прецессионной теории, как показано в [12–14], совпадают с уравнениями движения материальной точки по сфере постоянного радиуса. Уравнения колебаний произвольной невозмущаемой гиромаятниковой системы около положения относительного равновесия (уравнения ошибок) получены в [15]. Другая форма уравнений ошибок приведена в [16]. Для получения уравнений возмущенного движения произвольной гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона в качестве исходных используем следующие уравнения:

$$p^{\bullet}-arq=M_x/k,\quad q^{\bullet}+arp=M_y/k \tag{1.1}$$

Здесь p, q, r — проекции вектора ω абсолютной угловой скорости трехграника xyz на его оси, M_x и M_y — проекции на оси x и y главного момента внешних сил, действующих на гиромаятниковую систему, относительно точки подвеса системы, a и k — некоторые величины, зависящие от параметров системы, а также в общем случае от времени.

При $a=1$ уравнения (1.1) совпадают с уравнениями, рассмотренными в [16].

Уравнения (1.1) в зависимости от конкретной схемы гиромаятниковой системы дополняются уравнением связи, накладывающим ограничение либо на компоненту p абсолютной угловой скорости трехгранника xyz, либо на компоненту r. Так, в пространственном гирогоризонткомпасе [2, 17] реализуется равенство $p=0$, а для других гиромаятниковых систем [5, 6, 11, 14, 16] величина r является либо функцией времени, либо функцией времени и каких-либо других параметров.

Будем считать, что подвес гиромаятниковой системы является идеальным, а центр масс системы расположен на отрицательной части оси z и отстоит от точки подвеса на расстоянии l. Тогда величины M_x и M_y имеют вид [2, 17]:

$$M_x=l(-mw_y+F_y), \quad M_y=-l(-mw_x+F_x) \tag{1.2}$$

Здесь m — масса гиромаятниковой системы, w_x, w_y и F_x, F_y — проекции на оси x, y абсолютного ускорения $\mathbf{w}$ точки подвеса системы и силы тяготения $\mathbf{F}$.

Введем обозначения: λ_i $(i=0, 1, 2, 3)$ — параметры Родрига — Гамильтона, характеризующие ориентацию трехгранника xyz относительно трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$, a_{kj} $(k, j=1, 2, 3)$ — направляющие косинусы углов между осями трехгранников xyz и $x^\circ y^\circ z^\circ$, p_0, q_0, r_0 — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}_0$ абсолютной угловой скорости трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ на его оси.

Связь направляющих косинусов a_{kj} с параметрами Родрига — Гамильтона λ_i устанавливается матричным равенством [18]:

$$\| a_{kj} \| = \begin{Vmatrix} \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_1\lambda_2+\lambda_0\lambda_3) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) \\ 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_2\lambda_3+\lambda_0\lambda_1) \\ 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2 \end{Vmatrix} \tag{1.3}$$

Эта же связь может быть представлена в виде [19]:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} = M^*N \tag{1.4}$$

Здесь и далее звездочка означает транспонирование, M и N — кватернионные матрицы, имеющие вид [19, 20]:

$$M=\begin{Vmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_0 & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix}, \quad N=\begin{Vmatrix} \lambda_0 & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_0 \end{Vmatrix} \tag{1.5}$$

Проекции p, q, r и p_0, q_0, r_0 векторов $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\omega}_0$ связаны с параметрами λ_i и их производными матричным кинематическим уравнением

$$\|0\ p\ q\ r\|^*=2M^*\|\dot\lambda_0\ \dot\lambda_1\ \dot\lambda_2\ \dot\lambda_3\|^*+M^*N\|0\ p_0\ q_0\ r_0\|^* \tag{1.6}$$

Формулы (1.2) представим в виде

$$\begin{gathered} M_x=-lm[a_{21}w_1+a_{22}w_2+a_{23}(w_3+g)] \\ M_y=lm[a_{11}w_1+a_{12}w_2+a_{13}(w_3+g)], \quad g=F/m \end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь w_j $(j=1, 2, 3)$ — проекции абсолютного ускорения точки подвеса гиромаятниковой системы на оси трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$, являющиеся заданными функциями времени, g — модуль ускорения силы тяготения, а F — модуль силы тяготения.

2. Получим в параметрах Родрига — Гамильтона уравнения возмущенного движения пространственного гирогоризонткомпаса [17]. Трехгранник xyz в этом случае жестко связан с гиросферой. Проекция его абсолютной угловой скорости $p=0$, а проекции q и r определяются уравнениями (1.1), в которых следует положить $p=0$, $a=1$, $k=mlR$. Введем новую переменную $\lambda_4=2H\cos\varepsilon$, где H — собственный кинетический момент гироскопа, 2ε — угол между осями роторов гироскопов. Эта переменная удовлетворяет уравнению

$$\lambda_4^{\bullet}=M_y \tag{2.1}$$

Теперь можно представить проекции:

$$p=0, \quad q=\lambda_4/lmR, \quad r=-M_x/\lambda_4 \tag{2.2}$$

Трехгранник $x^\circ y^\circ z^\circ$ в рассматриваемом случае — естественный трехгранник Дарбу с осью x°, направленной по вектору $\mathbf{v}$ абсолютной скорости точки подвеса гиросистемы. Проекции p_0, q_0, r_0 абсолютной угловой скорости этого трехгранника являются заданными функциями времени и определяются формулами [2, 17]:

$$p_0=0, \quad q_0=v/R, \quad r_0=v/\rho \quad (v=|\mathbf{v}|) \tag{2.3}$$

где ρ — радиус геодезической кривизны траектории точки подвеса гиросферы в том месте, где в данный момент времени находится точка подвеса.

Проекции w_j абсолютного ускорения точки подвеса гиросферы также являются заданными функциями времени и представляются формулами [2, 17]:

$$w_1=v^{\bullet}=Rq_0^{\bullet}, \quad w_2=v^2/\rho=Rq_0r_0, \quad w_3=-v^2/R=-Rq_0^2 \tag{2.4}$$

Объединяя уравнения (1.6), (2.1) и учитывая соотношения (1.3), (1.7), (2.2), (2.3), (2.4), получаем уравнения движения пространственного гирогоризонткомпаса в параметрах Родрига — Гамильтона

$$\begin{gathered}2\lambda_0^{\bullet}=-(q-q_0)\lambda_2-(r-r_0)\lambda_3, \quad 2\lambda_1^{\bullet}=(r+r_0)\lambda_2-(q+q_0)\lambda_3 \\ 2\lambda_2^{\bullet}=(q-q_0)\lambda_0-(r+r_0)\lambda_1, \quad 2\lambda_3^{\bullet}=(r-r_0)\lambda_0+(q+q_0)\lambda_1\end{gathered} \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered}\lambda_4^{\bullet}=lmR[q_0^{\bullet}(\lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)+2q_0r_0(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2)+ \\ +2(\nu^2-q_0^2)(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2)]\end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered}q=\lambda_4/lmR, \quad r=lmR[2q_0^{\bullet}(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3)+q_0r_0(\lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_1^2)+ \\ +2(\nu^2-q_0^2)(\lambda_0\lambda_1+\lambda_2\lambda_3)]\lambda_4^{-1} \\ \lambda_4=2H\cos\varepsilon, \quad q_0=v/R, \quad r_0=v/\rho, \quad \nu^2=g/R\end{gathered} \tag{2.7}$$

Уравнения (2.5) совпадают с уравнениями, полученными в [8], где предлагается использовать их для описания кинематики движения пространственного гирогоризонткомпаса. Дополнение уравнений (2.5) уравнением (2.6) и соотношениями (2.7) дает замкнутую относительно параметров Родрига — Гамильтона λ_i и переменной λ_4 систему дифференциальных уравнений, описывающую уже не кинематику, а динамику прецессионного движения пространственного гирогоризонткомпаса. Эту систему уравнений удобно использовать при моделировании движений гирогоризонткомпаса на ЭВМ, она может оказаться также удобной при исследовании вопросов устойчивости движения гирогоризонткомпаса.

3. Рассмотрим гиромаятниковые системы, для которых компонента r абсолютной угловой скорости трехгранника xyz в уравнениях (1.1) является произвольным параметром, задаваемым в виде функции времени или в виде функции каких-либо других величин.

Выражения (1.7) для моментов M_x, M_y с учетом равенств (1.4), (1.5) можно представить в виде

$$\left\| \begin{matrix} M_y \\ -M_x \end{matrix} \right\| = lm \left\| \begin{matrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{matrix} \right\| N \| 0 \;\; w_1 \;\; w_2 \;\; w_3+g \|^* \tag{3.1}$$

Используя выражение (3.1), запишем уравнения (1.1) в матричном виде

$$\left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p^{\bullet} \\ q^{\bullet} \end{matrix} \right\| + ar \left\| \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right\| = \frac{lm}{k} M^{+} N \| 0 \;\; w_1 \;\; w_2 \;\; w_3+g \|^* \tag{3.2}$$

$$M^{+} = \left\| \begin{matrix} -\lambda_1 & \lambda_0 & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_0 & \lambda_1 \end{matrix} \right\|$$

Из уравнения (1.6) имеем

$$\| p \;\; q \|^* = M^{+} (2\Lambda^{\bullet} + N\Omega) \tag{3.3}$$

$$\Lambda = \| \lambda_0 \;\; \lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \lambda_3 \|^*, \qquad \Omega = \| 0 \;\; p_0 \;\; q_0 \;\; r_0 \|^* \tag{3.4}$$

Подставим соотношение (3.3) в уравнение (3.2)

$$\begin{gathered} \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \right\| [M^{+\bullet} N\Omega + M^{+} (2\Lambda^{\bullet\bullet} + N^{\bullet}\Omega + N\Omega^{\bullet})] + \\ + arM^{+} (2\Lambda^{\bullet} + N\Omega) - \frac{lm}{k} M^{+} N \| 0 \;\; w_1 \;\; w_2 \;\; w_3+g \|^* = 0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

Левую часть уравнения (3.5) можно представить в виде произведения двух матриц, одной из которых является M^{+}. Поэтому, переходя к скалярной записи, получаем

$$\lambda_0 s_1 - \lambda_1 s_0 - \lambda_2 s_3 + \lambda_3 s_2 = 0, \quad \lambda_0 s_2 + \lambda_1 s_3 - \lambda_2 s_0 - \lambda_3 s_1 = 0 \tag{3.6}$$

Здесь величины s_i представляют собой линейные комбинации параметров Родрига — Гамильтона и их производных:

$$\begin{gathered} s_0 = \lambda_0^{\bullet\bullet} - p_0 \lambda_1^{\bullet} - q_0 \lambda_2^{\bullet} - (r_0 - r') \lambda_3^{\bullet} + {}^1/_2 (r' r_0 - w_3') \lambda_0 - \\ - {}^1/_2 (r' q_0 + p_0^{\bullet} - w_2') \lambda_1 + {}^1/_2 (r' p_0 - q_0^{\bullet} - w_1') \lambda_2 - {}^1/_2 r_0^{\bullet} \lambda_3 \\ s_1 = \lambda_1^{\bullet\bullet} + p_0 \lambda_0^{\bullet} - (r_0 + r') \lambda_2^{\bullet} + q_0 \lambda_3^{\bullet} - {}^1/_2 (r' q_0 - p_0^{\bullet} - w_2') \lambda_0 - \\ - {}^1/_2 (r' r_0 - w_3') \lambda_1 - {}^1/_2 r_0^{\bullet} \lambda_2 + {}^1/_2 (r' p_0 + q_0^{\bullet} - w_1') \lambda_3 \\ s_2 = \lambda_2^{\bullet\bullet} + q_0 \lambda_0^{\bullet} + (r_0 + r') \lambda_1^{\bullet} - p_0 \lambda_3^{\bullet} + {}^1/_2 (r' p_0 + q_0^{\bullet} - w_1') \lambda_0 + {}^1/_2 r_0^{\bullet} \lambda_1 - \\ - {}^1/_2 (r' r_0 - w_3') \lambda_2 + {}^1/_2 (r' q_0 - p_0^{\bullet} - w_2') \lambda_3 \\ s_3 = \lambda_3^{\bullet\bullet} + (r_0 - r') \lambda_0^{\bullet} - q_0 \lambda_1^{\bullet} + p_0 \lambda_2^{\bullet} + {}^1/_2 r_0^{\bullet} \lambda_0 + {}^1/_2 (r' p_0 - q_0^{\bullet} - w_1') \lambda_1 + \\ + {}^1/_2 (r' q_0 + p_0^{\bullet} - w_2') \lambda_2 + {}^1/_2 (r' r_0 - w_3') \lambda_3 \end{gathered} \tag{3.7}$$

$$r' = ar, \quad w_1' = lmw_1/k, \quad w_2' = lmw_2/k, \quad w_3' = lm(w_3 + g)/k \tag{3.8}$$

Отметим, что уравнения (3.6) можно записать в форме:

$$\lambda_0 s_1^{\circ} - \lambda_1 s_0^{\circ} - \lambda_2 s_3^{\circ} + \lambda_3 s_2^{\circ} = 0, \quad \lambda_0 s_2^{\circ} - \lambda_2 s_0^{\circ} - \lambda_3 s_1^{\circ} + \lambda_1 s_3^{\circ} = 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} s_0^{\circ} = s_0 - d\lambda_0 + c\lambda_3, \quad s_1^{\circ} = s_1 - d\lambda_1 - c\lambda_2 \\ s_2^{\circ} = s_2 + c\lambda_1 - d\lambda_2, \quad s_3^{\circ} = s_3 - c\lambda_0 - d\lambda_3 \\ c = {}^1/_2 r_0^{\bullet}, \quad d = {}^1/_2 (r' r_0 - w_3') \end{gathered} \tag{3.10}$$

Если в выражениях (3.10) положить $a=1$, $k=lmR$, а проекции p_0, q_0, r_0 и w_j ($j=1, 2, 3$) задать формулами (2.3) и (2.4), то уравнения (3.9) и величины s_i° совпадут с аналогичными по смыслу уравнениями и величинами, полученными в [10, 11] при рассмотрении уравнений движения гирогоризонткомпаса.

Выражения для s_i° более просты, чем для s_i. Однако в дальнейшем будем использовать величины s_i, а не s_i°, так как их выражения отличаются бо́льшей симметрией и более удобны для дальнейшего изложения.

Система дифференциальных уравнений (3.6) содержит два уравнения при четырех неизвестных параметрах Родрига — Гамильтона λ_i ($i=0, 1, 2, 3$) и замыкается добавлением дифференциального соотношения

$$2(-\lambda_3\lambda_0^{\cdot}+\lambda_2\lambda_1^{\cdot}-\lambda_1\lambda_2^{\cdot}+\lambda_0\lambda_3^{\cdot})+2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_0\lambda_2)p_0+ \\ +2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)q_0+(\lambda_0^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2)r_0=r \tag{3.11}$$

вытекающего из уравнения (1.6), и уравнения связи

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=1 \tag{3.12}$$

которому должны удовлетворять параметры Родрига — Гамильтона.

Таким образом, движение трехгранника xyz, связанного с приборной вертикалью, относительно трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, задаваемое параметрами Родрига — Гамильтона λ_i, может быть найдено интегрированием уравнений (3.6), (3.7), (3.8) с учетом соотношений (3.11), (3.12). Компонента r абсолютной угловой скорости трехгранника xyz при этом принимается в качестве произвольного параметра.

4. Установленные уравнения и соотношения не удобны для аналитического исследования движений гиромаятниковых систем. Преобразуем их, чтобы получить удобную форму уравнений движения гиромаятниковых систем.

Введем обозначения: $S=\|s_0\ s_1\ s_2\ s_3\|^*$

$$E_3=\begin{Vmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{Vmatrix},\quad M_g=\begin{Vmatrix}0&0&0&-g\\0&0&-g&0\\0&g&0&0\\g&0&0&0\end{Vmatrix} \tag{4.1}$$

$$M_\omega=\begin{Vmatrix}0&-p_0&-q_0&-r_0\\p_0&0&-r_0&q_0\\q^0&r_0&0&-p_0\\r_0&-q_0&p_0&0\end{Vmatrix},\quad M_w=\begin{Vmatrix}0&-w_1&-w_2&-w_3\\w_1&0&-w_3&w_2\\w_2&w_3&0&-w_1\\w_3&-w_2&w_1&0\end{Vmatrix}$$

Здесь M_g, M_ω, M_w — кватернионные матрицы [19], сопоставляемые векторам $\mathbf{g}$, $\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{w}$.

С учетом обозначений (3.4), (4.1) запишем скалярные равенства (3.7), (3.8) в матричной форме

$$S=\Lambda^{\cdot\cdot}+(M_\omega-arE_3)\Lambda^{\cdot}+\frac{1}{2}\left[M_\omega^{\cdot}-arE_3M_\omega+\frac{lm}{k}E_3(M_w+M_g)\right]\Lambda \tag{4.2}$$

Используя известный изоморфизм между кватернионными матрицами и кватернионами [19, 20], запишем равенство (4.2) в кватернионной форме

$$\mathbf{s}=\boldsymbol{\lambda}^{\cdot\cdot}+\boldsymbol{\omega}_{0+}\circ\boldsymbol{\lambda}^{\cdot}-ar\boldsymbol{\lambda}^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3+ \\ +\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_{0+}^{\cdot}\circ\boldsymbol{\lambda}+\frac{1}{2}\left[\frac{lm}{k}(\mathbf{w}_+-\mathbf{g}_+)-ar\boldsymbol{\omega}_{0+}\right]\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_3 \tag{4.3}$$

Здесь символ $\circ$ означает кватернионное умножение, $\mathbf{s}$ и $\boldsymbol{\lambda}$ — кватернионы: $\mathbf{s}=s_0+s_1\mathbf{i}_1+s_2\mathbf{i}_2+s_3\mathbf{i}_3$, $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_0+\lambda_1\mathbf{i}_1+\lambda_2\mathbf{i}_2+\lambda_3\mathbf{i}_3$, $\boldsymbol{\omega}_{0+}$, $\mathbf{w}_+$, $\mathbf{g}_+$ — гиперкомплексные отображения [21] векторов $\boldsymbol{\omega}_0$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{g}$ на базис $x^\circ y^\circ z^\circ$: $\boldsymbol{\omega}_{0+}=p_0\mathbf{i}_1+q_0\mathbf{i}_2+r_0\mathbf{i}_3$, $\mathbf{w}_+=w_1\mathbf{i}_1+w_2\mathbf{i}_2+w_3\mathbf{i}_3$, $\mathbf{g}_+=-g\mathbf{i}_3$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты гиперкомплексного пространства.

Запишем произведение кватернионов $\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{s}$, где $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ — кватернион, сопряженный кватерниону $\boldsymbol{\lambda}$, в развернутом виде

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}\circ\mathbf{s}=(\lambda_0s_0+\lambda_1s_1+\lambda_2s_2+\lambda_3s_3)+(\lambda_0s_1-\lambda_1s_0-\lambda_2s_3+\lambda_3s_2)\mathbf{i}_1+ \\ +(\lambda_0s_2+\lambda_1s_3-\lambda_2s_0-\lambda_3s_1)\mathbf{i}_2+(\lambda_0s_3-\lambda_1s_2+\lambda_2s_1-\lambda_3s_0)\mathbf{i}_3 \tag{4.4}$$

Дифференцируя соотношение (3.11) по времени один раз, а соотношение (3.12) дважды и учитывая обозначения (3.7), получаем

$$\lambda_0 s_3 - \lambda_1 s_2 + \lambda_2 s_1 - \lambda_3 s_0 = {}^1/_2 r^{\cdot} \tag{4.5}$$

$$\lambda_0 s_0 + \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \lambda_3 s_3 = \frac{1}{2}\left[ar^2 - \frac{lm}{k}(w_3+g)\right] + \chi$$

$$\begin{aligned}\chi = &-(\lambda_0^{\cdot 2} + \lambda_1^{\cdot 2} + \lambda_2^{\cdot 2} + \lambda_3^{\cdot 2}) - p_0(\lambda_0\lambda_1^{\cdot} - \lambda_1\lambda_0^{\cdot} + \lambda_2\lambda_3^{\cdot} - \lambda_3\lambda_2^{\cdot}) - \\ &- q_0(\lambda_0\lambda_2^{\cdot} - \lambda_2\lambda_0^{\cdot} - \lambda_1\lambda_3^{\cdot} + \lambda_3\lambda_1^{\cdot}) - r_0(\lambda_0\lambda_3^{\cdot} - \lambda_3\lambda_0^{\cdot} + \lambda_1\lambda_2^{\cdot} - \lambda_2\lambda_1^{\cdot}) - \\ &- lmk^{-1}[w_1(\lambda_0\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3) + w_2(\lambda_2\lambda_3 - \lambda_0\lambda_1) - (w_3+g)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)]\end{aligned} \tag{4.6}$$

Функцию χ можно также представить в другом виде:

$$\chi = -\frac{1}{4}\mathbf{u}^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_0 \cdot \mathbf{u} - \frac{lm}{2k}(\mathbf{w} - \mathbf{g}) \cdot \mathbf{z} + \frac{lm}{2k}(w_3+g) \tag{4.7}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — вектор угловой скорости вращения трехгранника xyz относительно трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$, $\mathbf{z}$ — единичный вектор приборной вертикали (оси z).

Уравнения (3.6), (4.5) образуют систему четырех дифференциальных уравнений второго порядка относительно четырех неизвестных параметров Родрига — Гамильтона λ_i. Сопоставляя левые части этих уравнений с компонентами кватерниона $\bar{\lambda}\circ\mathbf{s}$, определяемого равенством (4.4), убеждаемся, что полученная система скалярных уравнений эквивалентна одному кватернионному

$$\bar{\lambda}\circ\mathbf{s} = \frac{1}{2}\left[ar^2 - \frac{lm}{k}(w_3+g)\right] + \chi + \frac{1}{2}r^{\cdot}\mathbf{i}_3 \tag{4.8}$$

Учитывая выражение (4.3) для кватерниона $\mathbf{s}$, а также то, что норма кватерниона λ равна единице, из уравнения (4.8) получаем

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\lambda}^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\omega}_{0+}\circ\boldsymbol{\lambda}^{\cdot} - ar\boldsymbol{\lambda}^{\cdot}\circ\mathbf{i}_3 + {}^1/_2\left[\boldsymbol{\omega}_{0+}^{\cdot} - ar^2 + \frac{lm}{k}(w_3+g)\right]\circ\boldsymbol{\lambda} + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{lm}{k}(\mathbf{w}_+ - \mathbf{g}_+) - ar\boldsymbol{\omega}_{0+} - r^{\cdot}\right]\circ\boldsymbol{\lambda}\circ\mathbf{i}_3 = \chi\boldsymbol{\lambda}\end{aligned} \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) представляет собой кватернионную форму уравнений возмущенного движения гиромаятниковой системы. Матричная форма уравнений возмущенного движения гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона получается из уравнений (3.6), (4.5) и выражения (4.2) аналогично кватернионной форме:

$$\Lambda^{\cdot\cdot} + A\Lambda^{\cdot} + B\Lambda = \chi\Lambda \tag{4.10}$$

$$\Lambda = \|\lambda_0\ \lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\|^*, \quad A(t) = M_\omega - arE_3 \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}B(t) = \frac{1}{2}\Big\{M_\omega^{\cdot} + E_3\Big[\frac{lm}{k}(M_w + M_g) - \\ - arM_\omega - r^{\cdot}E\Big] + \left[\frac{lm}{k}(w_3+g) - ar^2\right]E\Big\}\end{aligned}$$

E — единичная матрица размером 4×4.

Левые части уравнений (4.9) и (4.10) линейные относительно параметров Родрига — Гамильтона λ_i и их производных. Коэффициенты, стоящие перед λ_i и их производными в левых частях уравнений, являются в общем случае заданными функциями времени. Нелинейность уравнений (4.9) и (4.10) обусловливается скалярной функцией χ, фигурирующей в правых частях этих уравнений. Функция χ задается формулами (4.6) или (4.7). Она представляет собой нелинейную функцию восьми переменных λ_i, $\lambda_i^{\cdot}$ ($i=0, 1, 2, 3$) и обращается в нуль для значений переменных $\lambda_0=1$, $\lambda_j=0$ ($j=1, 2, 3$), при которых трехгранники xyz и $x^\circ y^\circ z^\circ$ совпадают.

Порядок полученной системы (4.9) или (4.10) дифференциальных уравнений, описывающих возмущенное движение гиромаятниковой системы в параметрах Родрига — Гамильтона, равен восьми, в то время как порядок системы уравнений, описывающих возмущенное движение гиромаятниковой системы в углах Эйлера — Крылова, равен пяти. Однако уравнения в параметрах Родрига — Гамильтона в отличие от уравнений в углах Эйлера — Крылова имеют структуру, близкую к симметричной, кроме того, в них выделяется линейная часть, что делает их удобными при аналитическом исследовании движений гиромаятниковой системы.

Уравнения (4.9) или (4.10) описывают движение гиромаятниковой системы относительно трехгранника Дарбу $x^\circ y^\circ z^\circ$, ось z° которого направлена по геоцентрической вертикали, а ориентация осей x°, y° в азимуте произвольна. Проекции p_0 и q_0 абсолютной угловой скорости трехгранника $x^\circ y^\circ z^\circ$ в этих уравнениях задаются формулами [2]:

$$p_0=-v_2/R, \quad q_0=v_1/R \tag{4.12}$$

где v_1 и v_2 — проекции абсолютной скорости точки подвеса системы на оси x° и y°, а проекция r_0 задается произвольной функцией времени, а также компонент p_0 и q_0. Проекции w_j абсолютного ускорения точки подвеса системы в уравнениях (4.9) и (4.10) следует положить равными [2]:

$$w_1=R(q_0^{\cdot}+p_0r_0), \quad w_2=-R(p_0^{\cdot}-q_0r_0), \quad w_3=-R(p_0^2+q_0^2) \tag{4.13}$$

Если движение гиромаятниковой системы рассматривать относительно азимутально свободного трехгранника, то в уравнениях (4.9) и (4.10) следует взять

$$\begin{gathered} p_0=-v_2/R, \quad q_0=v_1/R, \quad r_0=0, \quad w_1=Rq_0^{\cdot} \\ w_2=-Rp_0^{\cdot}, \quad w_3=-R(p_0^2+q_0^2) \end{gathered} \tag{4.14}$$

Наконец, если движение гиромаятниковой системы рассматривать относительно естественного трехгранника Дарбу (скоростного трехгранника), то величины p_0, q_0, r_0, w_j в уравнениях (4.9), (4.10) необходимо задать формулами (2.3), (2.4).

Рассмотрим уравнения возмущенного движения некоторых конкретных гиромаятниковых систем в параметрах Родрига — Гамильтона.

5. Рассмотрим тяжелый симметричный гироскоп по Лагранжу [7]. В этом случае

$$a=(I_1-I_3)I_1^{-1}, \quad k=I_1, \quad r=\text{const}, \quad \boldsymbol{\omega}_0=\mathbf{w}=0 \tag{5.1}$$

где I_1, I_3 — моменты инерции гироскопа относительно осей x и z трехгранника xyz, жестко связанного с гироскопом.

Уравнения движения гироскопа в параметрах Родрига — Гамильтона имеют вид (4.10), (4.11), (4.6), (5.1).

В скалярной записи

$$\begin{gathered} \lambda_0^{\cdot\cdot}+ar\lambda_3^{\cdot}-{}^1/_2ar^2\lambda_0=\chi\lambda_0 \\ \lambda_1^{\cdot\cdot}-ar\lambda_2^{\cdot}+(lmI_1^{-1}g-ar^2/2)\lambda_1=\chi\lambda_1 \\ \lambda_2^{\cdot\cdot}+ar\lambda_1^{\cdot}+(lmI_1^{-1}g-ar^2/2)\lambda_2=\chi\lambda_2 \\ \lambda_3^{\cdot\cdot}-ar\lambda_0^{\cdot}-{}^1/_2ar^2\lambda_3=\chi\lambda_3 \\ \chi=-(\lambda_0^{\cdot 2}+\lambda_1^{\cdot 2}+\lambda_2^{\cdot 2}+\lambda_3^{\cdot 2})+lmI_1^{-1}g(\lambda_1^2+\lambda_2^2) \end{gathered} \tag{5.2}$$

Так как уравнения (5.2) имеют первый интеграл

$$\lambda_0^{\cdot 2}+\lambda_1^{\cdot 2}+\lambda_2^{\cdot 2}+\lambda_3^{\cdot 2}+lmI_1^{-1}g(\lambda_1^2+\lambda_2^2)=h=\text{const}$$

то система (5.2) распадается на две независимые подсистемы

$$\lambda_0^{\cdot\cdot}+ar\lambda_3^{\cdot}+b_1\lambda_0=\chi_1\lambda_0, \quad \lambda_3^{\cdot\cdot}-ar\lambda_0^{\cdot}+b_1\lambda_3=\chi_1\lambda_3$$
$$\lambda_1^{\cdot\cdot}-ar\lambda_2^{\cdot}+b_2\lambda_1=\chi_2\lambda_1, \quad \lambda_2^{\cdot\cdot}+ar\lambda_1^{\cdot}+b_2\lambda_2=\chi_2\lambda_2$$
$$b_1=h-2\frac{lm}{I_1}g-\frac{1}{2}ar^2, \quad b_2=h+\frac{lm}{I_1}g-\frac{1}{2}ar^2$$
$$\chi_1=-2lmI_1^{-1}g(\lambda_0^2+\lambda_3^2), \quad \chi_2=2lmI_1^{-1}g(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$$

6. Рассмотрим физический маятник с подвижной точкой опоры [1—3]. Будем считать, что система координат xyz жестко связана с физическим маятником, а ее оси x, y и z являются главными осями инерции маятника. Уравнения возмущенного движения физического маятника относительно трехгранника Дарбу $x°y°z°$ в параметрах Родрига — Гамильтона имеют вид (4.10). Причем в выражениях (4.11) и (4.6) для матриц коэффициентов A, B и нелинейной функции χ проекции p_0, q_0, r_0, w_j следует задать формулами (4.12), (4.13), а величины k, r, a положить равными $a=(I_1-I_3)/I_1$, $k=I_1$, $r=r(t_0)=\text{const}$. Здесь I_1 и I_3 — моменты инерции маятника относительно осей x и z.

Для невозмущаемого физического маятника имеют место равенства [2, 3] $I_1/lm=R$, $r=0$. Поэтому его движение относительно трехгранника Дарбу описывается либо кватернионным уравнением

$$\lambda^{\cdot\cdot}+\omega_{0+}\circ\lambda^{\cdot}+\frac{1}{2}\left[\omega_{0+}^{\cdot}+\frac{1}{R}(w_s+g)\right]\circ\lambda+$$
$$+\frac{1}{2R}(\mathbf{w}_+-\mathbf{g}_+)\circ\lambda\circ\mathbf{i}_3=\chi\lambda \tag{6.1}$$

либо матричным

$$\Lambda^{\cdot\cdot}+M_\omega\Lambda^{\cdot}+\frac{1}{2}\left[M_\omega^{\cdot}+\frac{1}{R}E_3(M_w+M_g)+\frac{1}{R}(w_3+g)E\right]\Lambda=\chi\Lambda \tag{6.2}$$

Здесь функция χ имеет вид (4.6), где следует положить $lm/k=1/R$.

Можно показать, что значения переменных $\lambda_0=\cos{}^1/_2\varkappa$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\sin{}^1/_2\varkappa$, $\varkappa^{\cdot}=-r_0$ являются частным решением уравнения (6.2), а также (6.1). Это означает, что положение, при котором ось физического маятника совпадает с геоцентрической вертикалью, является положением относительного равновесия маятника.

Уравнения движения невозмущаемого маятника относительно азимутально свободного трехгранника $x°y°z°$ получаются из уравнения (6.2) или (6.1), если фигурирующие в них величины p_0, q_0, r_0, w_j задать не формулами (4.12), (4.13), а формулами (4.14). В скалярной записи эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}
&\lambda_0^{\cdot\cdot}-\frac{d}{dt}(p_0\lambda_1+q_0\lambda_2)=\chi\lambda_0\\
&\lambda_1^{\cdot\cdot}+p_0\lambda_0^{\cdot}+q_0\lambda_3^{\cdot}+(\nu^2-p_0^2-q_0^2)\lambda_1=\chi\lambda_1\\
&\lambda_2^{\cdot\cdot}+q_0\lambda_0^{\cdot}-p_0\lambda_3^{\cdot}+(\nu^2-p_0^2-q_0^2)\lambda_2=\chi\lambda_2\\
&\lambda_3^{\cdot\cdot}-\frac{d}{dt}(q_0\lambda_1-p_0\lambda_2)=\chi\lambda_3
\end{aligned} \tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}
\chi=&-(\lambda_0^{\cdot 2}+\lambda_1^{\cdot 2}+\lambda_2^{\cdot 2}+\lambda_3^{\cdot 2})-p_0(\lambda_0\lambda_1^{\cdot}-\lambda_1\lambda_0^{\cdot}+\lambda_2\lambda_3^{\cdot}-\lambda_3\lambda_2^{\cdot})-\\
&-q_0(\lambda_0\lambda_2^{\cdot}-\lambda_2\lambda_0^{\cdot}-\lambda_1\lambda_3^{\cdot}+\lambda_3\lambda_1^{\cdot})+p_0^{\cdot}(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1)-\\
&-q_0^{\cdot}(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)+(\nu^2-p_0^2-q_0^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

Значения переменных $\lambda_0=1$, $\lambda_j=0$ ($j=1, 2, 3$), при которых трехгранник xyz, жестко связанный с маятником, совпадает с азимутально свободным трехгранником $x°y°z°$, удовлетворяют уравнениям (6.3), т. е. являются их частным решением. Это понятно, поскольку известно [14], что динамически симметричный невозмущаемый физический маятник в своем невозмущенном движении моделирует азимутально свободный трехгранник.

Отметим, что уравнениями (6.3), (6.4) описывается также возмущенное движение платформы свободной в азимуте системы инерциальной навигации, теория которой дана в работах [2, 4].

7. Рассмотрим двухроторную маятниковую гирораму [5, 6, 9] и свяжем с ее оболочкой систему координат xyz, считая, что оси x, y, z — главные оси инерции системы. Движение гирорамы будем рассматривать относительно естественного трехгранника Дарбу. Предположим, что в данной схеме гирорамы реализованы в точности известные условия невозмущаемости [22, 23], касающиеся проекций собственного кинетического момента гирорамы. Кроме того, будем считать, что главный момент внешних сил, действующих на гирораму, создается лишь силой тяготения и силой инерции переносного движения. Тогда исходные уравнения движения двухроторной гирорамы будут иметь вид уравнений (1.1), (1.7), (2.4), где следует положить [5, 6, 9]:

$$a=1-I_3/lmR, \quad k=lmR, \quad r=\mathrm{const} \tag{7.1}$$

Здесь I_3 — суммарный момент инерции системы относительно оси z.

Уравнения движения двухроторной гирорамы относительно естественного трехгранника Дарбу в параметрах Родрига — Гамильтона имеют вид уравнений (4.10), (4.11), (4.6), которые дополняются соотношениями (2.3), (2.4), (7.1). Значения переменных $\lambda_0=\cos(\varkappa/2)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\sin(\varkappa/2)$, при которых приборная вертикаль (ось z) совпадает с геоцентрической, не являются частным решением этих уравнений, поскольку не выполнено условие $r=0$, являющееся третьим условием невозмущаемости для данной системы. Если положить, что это условие выполнено, то уравнения движения невозмущаемой гирорамы в параметрах Родрига — Гамильтона будут иметь вид уравнений (6.2), которые необходимо дополнить соотношением (4.6) (полагая $lm/k=1/R$) и формулами (2.3), (2.4). Можно убедиться, что значения переменных $\lambda_0=\cos(\varkappa/2)$, $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\sin(\varkappa/2)$, $\varkappa^{\cdot}=-r_0$ будут уже являться частным решением указанных уравнений.

Отметим, что если движение невозмущаемой двухроторной гирорамы рассматривать относительно азимутально свободного трехгранника, то уравнения движения гирорамы будут иметь вид уравнений (6.3), (6.4). Это говорит о том, что невозмущаемая двухроторная гирорама, как и невозмущаемый физический маятник, в своем невозмущенном движении материализует азимутально свободный трехгранник.

В заключение рассмотрим уравнения движения приборной вертикали двухроторной гирорамы относительно естественного трехгранника Дарбу в той постановке, в которой они рассматривались в [6, 9, 11]. Свяжем с приборной вертикалью ось z трехгранника xyz. В рамках прецессионной постановки исходные уравнения движения приборной вертикали имеют вид уравнений (1.1), (1.7), (2.4), где следует положить

$$a=1, \quad k=lmR, \quad r\equiv r_0 \tag{7.2}$$

Эти уравнения записаны в системе координат xyz, вращающейся вокруг приборной вертикали с угловой скоростью r_0.

Уравнения движения приборной вертикали относительно естественного трехгранника Дарбу в параметрах Родрига — Гамильтона получаются из уравнений (4.10), (4.11), (4.6) после подстановки в них равенств (2.3), (2.4), (7.2) и имеют вид

$$\lambda_0^{\cdot\cdot}-q_0\lambda_2^{\cdot}-q_0^{\cdot}\lambda_2=\chi\lambda_0, \quad \lambda_3^{\cdot\cdot}-q_0\lambda_1^{\cdot}-q_0^{\cdot}\lambda_1=\chi\lambda_3 \tag{7.3}$$
$$\lambda_1^{\cdot\cdot}-2r_0\lambda_2^{\cdot}+q_0\lambda_3^{\cdot}+(\nu^2-q_0^2-r_0^2)\lambda_1-r_0^{\cdot}\lambda_2=\chi\lambda_1$$

$$
\ddot{\lambda}_2+q_0\dot{\lambda}_0+2r_0\dot{\lambda}_1+\dot{r}_0\lambda_1+(\nu^2-q_0^2-r_0^2)\lambda_2=\chi\lambda_2
$$

$$
\chi=-(\dot{\lambda}_0^2+\dot{\lambda}_1^2+\dot{\lambda}_2^2+\dot{\lambda}_3^2)-q_0(\lambda_0\dot{\lambda}_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_2\dot{\lambda}_0+\lambda_3\dot{\lambda}_1)-
$$

$$
-2r_0(\lambda_1\dot{\lambda}_2-\lambda_2\dot{\lambda}_1)+(\nu^2-q_0^2-r_0^2)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)-\dot{q}_0(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3)
$$

Уравнения (7.3) могут быть также получены из уравнений (6.11.15) монографии [6].

В [9] показана возможность существования некоторого класса точных решений уравнений движения приборной вертикали, который затем был исследован в [6, 10, 11]. Из (7.3) видно, что этот класс точных решений уравнений движения приборной вертикали может иметь место лишь в случае, когда функция χ, фигурирующая в уравнениях (7.3), тождественно равна нулю.

Автор благодарит Е. А. Девянина, Ю. К. Жбанова и В. Н. Кошлякова за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А. Ю.* Об относительном равновесии физического маятника с подвижной точкой опоры. — ПММ, 1956, т. 20, вып. 3, с. 297—308.
2. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 670 с.
3. *Андреев В. Д.* Теория инерциальной навигации. (Автономные системы). М.: Наука, 1966. 579 с.
4. *Ишлинский А. Ю.* Об уравнениях задачи определения местоположения движущегося объекта посредством гироскопов и измерителей ускорений. – ПММ, 1957, т. 21, вып. 6, с. 725–739.
5. *Василенко В. П., Кошляков В. Н., Шиф М. А.* К теории корректируемого гирогоризонткомпаса. — Инж. ж. МТТ, 1967, № 5, с. 41—44.
6. *Кошляков В. Н.* Теория гироскопических компасов. М.: Наука, 1972. 344 с.
7. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. B.: Springer-Verlag, 1971. 493 S. — Рус. перев.: М.: Мир, 1974. 526 с.
8. *Кошляков В. Н.* О применении параметров Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна в прикладной теории гироскопов. – ПММ, 1965, т. 29, вып. 4, с. 729–733.
9. *Кошляков В. Н.* Об одном классе точных решений уравнений движения корректируемого гирогоризонткомпаса. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 6, с. 3—9.
10. *Кошляков В. Н.* К вопросу построения некоторого класса решений гиромаятниковой системы. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 2, с. 32—38.
11. *Жбанов Ю. К.* О точных решениях уравнений движения гирогоризонткомпаса. – Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 11–18.
12. *Жбанов Ю. К.* К теории гирогоризонткомпаса. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 6, с. 1130—1135.
13. *Девянин Е. А.* Об аналогии движения гирогоризонткомпаса движению материальной точки.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 1, с. 3—5.
14. *Девянин Е. А.* Аналогии движения невозмущаемых гиромаятниковых приборов движению материальной точки.– Тр. Ин-та механики МГУ, 1970, № 7, с. 44–54.
15. *Андреев В. Д.* К теории маятниково-гироскопической системы, удовлетворяющей условиям Шулера. — ПММ, 1965, т. 29, вып. 6, с. 1108—1111.
16. *Кондорский И. Д.* К теории гиромаятниковых систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4, с. 11—15.
17. *Ишлинский А. Ю.* К теории гирогоризонткомпаса.– ПММ, 1956, т. 20, вып. 4, с. 487–499.
18. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
19. *Плотников П. К., Челноков Ю. Н.* Применение кватернионных матриц в теории конечного поворота твердого тела: Сб. научн.-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. школа, 1981, вып. 11, с. 122—129.
20. *Bellman R.* Introduction to Matrix Analysis. McGraw-Hill Book Company, Inc. N. Y.: 1960. 328 p. — Рус. перев.: М.: Наука, 1976. 352 с.
21. *Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
22. *Климов Д. М.* Об условиях невозмущаемости гироскопической рамы.— ПММ, 1964, т. 28, вып. 3, с. 511—513.
23. *Блюмин Г. Д., Чичинадзе М. В.* Условия невозмущаемости однороторного гирокомпаса.– Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 3, с. 71–78.

Саратов

Поступила в редакцию
11.VIII.1981