УДК 539.3

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ДЛИНЕ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ РАСЧЕТЕ КРУГЛЫХ ГОФРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН

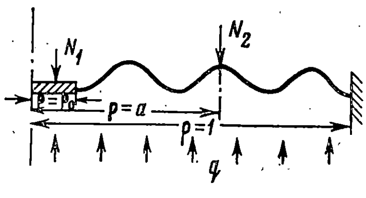
КУЗНЕЦОВ В. В.

Нелинейные краевые задачи осесимметричного деформирования оболочек вращения, в частности задачи расчета напряженно-деформированного состояния круглых гофрированных пластин, являются, как правило, неустойчивыми, чувствительными к изменению начальных условий. При этом число обусловленности, характеризующее чувствительность задачи [1], резко растет с увеличением нагрузки, что вызывает большие трудности при численном решении таких задач методами стрельбы в сочетании с дискретной итерационной процедурой продолжения по параметру нагрузки [2].

Возможны другие варианты продолжения по параметру, которые исходят из решения нелинейной краевой задачи для заданного значения параметра нагрузки. Так, например, в [3] применялось продолжение по параметру пологости оболочки. Начальное приближение в методе стрельбы определялось из асимптотического разложения решения нелинейной краевой задачи для круглой пластины.

В публикуемой работе предлагается использовать метод продолжения решения по длине отрезка интегрирования — естественному параметру любой краевой задачи [4, 5]. Такой вариант движения по параметру дает возможность эффективно строить решение сразу же для заданных значений нагрузки и других физико-геометрических параметров рассматриваемой задачи.

Ниже предлагается некоторая модификация методики [4, 5], позволяющая расширить пределы ее применимости на определенный класс многоточечных краевых задач.



Фиг. 1

1. Рассмотрим задачу расчета круглой гофрированной пластины с жесткими ограничителями осевых перемещений — упорами, которые устанавливаются обычно в центре пластины и в вершинах отдельных гофров (кольцевые упоры) при некотором значении параметра равномерно распределенной нагрузки $q=q_0\neq 0$. Задача заключается в определении напряженно-деформированного состояния такой конструкции для заданного перегрузочного давления $q>q_0$.

Будем считать для определенности, что упоры фиксируют прогибы центра пластины и вершины одного из гофров $\rho=a$; центр пластины ($\rho=0$) представляет собой жесткий диск радиуса $\rho=\rho_0$, а внешний ее контур ($\rho=1$) жестко закреплен (фиг. 1). Ограничимся также уравнениями пологих оболочек, которые в рассматриваемом случае можно преобразовать к виду [3]:

$$
\begin{gathered}
w^{\bullet}=(1/k\varepsilon)\theta,\ L(\psi)-0{,}5\,\theta^2-\varepsilon\gamma\theta=0,\ \varepsilon^2L(\theta)+\theta\psi+\varepsilon\gamma\psi^2-\rho^2-\omega(N_1,N_2)=0,\\
L(\ )=\rho(\ )^{\bullet\bullet}+(\ )^{\bullet}-(\ )/\rho,\ (\ )^{\bullet}=d(\ )/d\rho,\ \rho=r/R
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

В уравнениях (1.1) $\psi=-(kR\varepsilon)^2(T_1/Eh^3)\rho$, $\gamma=\alpha k\lambda f_*'$, $f=Hf_*(z)$, $z=\alpha\rho$, $(\ )'=d(\ )/dz, \max\limits_{\rho}|f_*|=\max\limits_{\rho}|f_*'|=1$, $\varepsilon=q_*^{-1/3}$, $\lambda=H/h$, $\omega(N_1,N_2)=N_1\ (\rho_0\leqslant\rho\leqslant a)$, $\omega(N_1,N_2)=N_1+N_2$, $a<\rho\leqslant 1$, $K=[12(1-\nu^2)]^{1/2}$, $q_*=0{,}5(q/E)(R/h)^4$. Здесь r — текущий радиус, R — внешний радиус, h — толщина оболочки, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, α — числовой параметр, зависящий от формы срединной поверхности, λ — параметр пологости, T_1 — меридиональное растягивающее усилие, w — безразмерный прогиб, N_1, N_2 — неизвестные параметры, характеризующие реакции упоров (при $\varepsilon\geqslant\varepsilon_0$ имеем $N_1=N_2\equiv 0$).

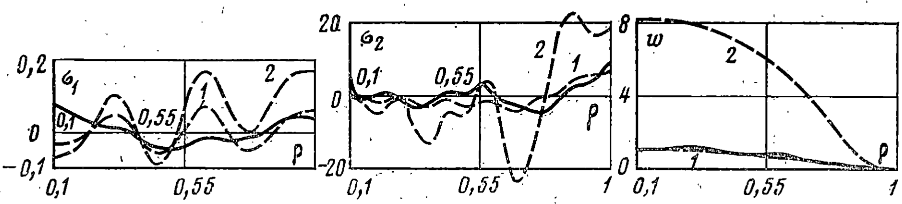
Краевые условия для системы (1.1) запишутся в виде

$$
w(\rho_0)=w_0,\quad \rho_0\psi^{\bullet}(\rho_0)-\nu\psi(\rho_0)=0,\quad \theta(\rho_0)=0 \tag{1.2}
$$

$$
w(a)=w_1 \tag{1.3}
$$

$$
w(1)=0,\quad \psi^{\bullet}(1)-\nu\psi(1)=0,\quad \theta(1)=0 \tag{1.4}
$$

где w_0 и w_1 определены из решения (1.1) при $\varepsilon=\varepsilon_0$ ($q=q_0$).



Фиг. 2

Численное решение краевой задачи (1.1) – (1.4) методом стрельбы осложняется из-за наличия малого (для тонких оболочек и больших значений q) параметра ε^2 при старшей производной в (1.1), что приводит к появлению узких зон быстрого изменения решения (пограничных слоев) и делает задачу чувствительной к малым вариациям начальных условий.

2. В соответствии с методикой [4] необходимо последовательно решить систему (1.1) с краевыми условиями (1.2), (1.3) и (2.1):

$$w(\rho_s)=0,\quad \rho_s\psi^\bullet(\rho_s)-\nu\psi(\rho_s)=0,\quad \theta(\rho_s)=0 \tag{2.1}$$

Здесь $\rho=\rho_1, \ldots, \rho_s, \ldots, \rho_n=1$ – некоторое разбиение отрезка $[\rho_0, 1]$, причем ввиду неустойчивости задачи точка ρ_1 должна быть выбрана вблизи ρ_0.

Однако при прямом переносе первого из краевых условий (1.4) в промежуточную точку $\rho_1\leqslant\rho_s\leqslant a$ нельзя осуществить продолжение по параметру ρ_s, так как в общем случае w_0 и w_1 не равны нулю.

Для расширения пределов применимости методики [4, 5] введем траекторию изменения $w(\rho_s)$, например, следующим образом: $w(\rho_s)=w_0+(w_1-w_0)(\rho_s-\rho_0)/(a-\rho_0)$ $(\rho_1\leqslant\rho_s\leqslant a)$, $w(\rho_s)=w_1(\rho_s-1)/(a-1)$ $(a<\rho_s\leqslant 1)$.

На первом этапе продолжения ($S=1$) задаем вектор недостающих начальных параметров $\mathrm{x}_0(\rho_s)=(\psi^\bullet(\rho_0), \theta^\bullet(\rho_0), \omega(N_1, N_2))$. Численно проинтегрировав систему (1.1) на отрезке $[\rho_0, \rho_s]$, определяем вектор $\varphi(\mathrm{x}_0)=(w-w(\rho_s), \rho_s\psi^\bullet(\rho_s)-\nu\psi(\rho_s), \theta(\rho_s))$. Уточненные значения недостающих начальных параметров будем находить с помощью модифицированного метода Ньютона [6, 7]: $\mathrm{x}_{i+1}=\mathrm{x}_i-\lambda_i(\partial\varphi/\partial x_i)^{-1}\varphi(\mathrm{x}_i)$, $0<\lambda_i\leqslant 1$ $(i=0, 1, \ldots)$.

Далее используется дискретная процедура продолжения по ρ_s, в которой найденное решение $\mathrm{x}(\rho_s)$ принимается в качестве начального приближения для вектора $\mathrm{x}(\rho_{s+1})$. При переходе через точку $\rho=a$ условие (1.3) рассматриваем как дополнительное уравнение для определения параметра N_2.

3. В качестве примера рассматривалась задача расчета напряженно-деформированного состояния трехволновой гофрированной пластины, уравнение срединной поверхности которой задавалось в виде: $f=H\sin^2 3\alpha(\rho-\rho_0)$, $\alpha=\pi/(1-\rho_0)$. Расчетные данные получены при $\rho_0=0{,}1$; $a=0{,}55$; $\nu={}^1/_3$; $\lambda=5$; $\varepsilon_0=0{,}1$; $w_0=1{,}1860$; $w_1=0{,}9084$.

Шаги по параметру продолжения выбирались с учетом рекомендаций из [8]. При этом для получения решения потребовалось $n=12$ этапов продолжения с точностью удовлетворения краевых условий $|\varphi(x, \rho_s)|<10^{-4}$ $(S=1, \ldots, 12)$.

Время счета на ЭВМ «Наири-32» в случае $q=8\,q_0$ составило приблизительно 3 мин. Процесс получения решения с использованием алгоритма множественной пристрелки [2] потребовал при тех же условиях 7 мин машинного времени, что свидетельствует о высокой эффективности используемой здесь методики.

Некоторые численные результаты представлены на фиг. 2, где сплошными линиями отмечены (в безразмерном виде) графики мембранных (σ_1) и изгибных (σ_2) напряжений в радиальном направлении, а также прогибов (w), полученные при $\varepsilon=0{,}05$ $(q=8\,q_0)$. Там же штриховыми линиями показаны для сравнения соответствующие графики напряжений и прогибов, полученные аналогичным методом для свободной от упоров пластины. Кривые *1* соответствуют $\varepsilon_0=0{,}1$, кривые *2* – $\varepsilon=0{,}05$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Deuflhard P., Pesch H.-J., Rentrop P.* A modified continuation method for the numerical solution of nonlinear two-point boundary value problems by shooting techniques.– Numer. Math., 1976, B. 26, No. 3, S. 327–343.
2. *Валишвили Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
3. *Кузнецов В. В., Ольшанский В. Ю.* Об одном алгоритме численного решения нелинейных краевых задач теории пологих оболочек вращения.– Тр. XII Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. Т. 2. Ереван: Изд-во Ереванск. ун-та, 1980, с. 276–281.

4. *Roberts S. M., Shipman J. S.* Continuation in shooting methods for two — point boundary value problems.— J. Math. Anal. Appl., 1967, v. 18, No. 1, p. 45—58.
5. *Roberts S. M., Shipman J. S.* The extended continuation method and invariant imbedding.— J. Math. Anal. Appl., 1974, v. 45, No. 1, p. 32—42.
6. *Deuflhard P.* A modified Newton method for the solution of illconditioned systems of nonlinear equations with application to multiple shooting.— Numer. Math., 1974, B. 22, No. 4, S. 289—315.
7. *Deuflhard P.* A realization strategy for the modified Newton method.— Lect. Notes Math., 1975, No. 477, p. 59—73.
8. *Deuflhard P.* A stepsize control for continuation methods and its special application to multiple shooting techniques.— Numer. Math., 1979, B. 33, No. 2, S. 115—146.

Саратов

Поступила в редакцию
17.III.1981

ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ АН СССР

СЕМИНАРЫ

Семинар по оптимизации конструкций и механических систем под руководством Н. В. Баничука

21.IV.1982. Рикардс Р. Б. (Рига) *Оптимизация формы и структуры армирования оболочек из волокнистых композитов.*

28.IV.1982. Шамиев Ф. Г. (Баку) *Несущая способность и оптимизация слоистых и структурно-неоднородных конструкций.*

5.V.1982. Епураш Д. М. (Кишинев) *Об одном численном алгоритме решения задач оптимизации анизотропных свойств упругих тел.*

5.V.1982. Коанде И. И. (Кишинев) *Решение задач об оптимальном распределении силового материала в стреловидном крыле с подкосом и скользящем крыле.*

12.V.1982. Барсук А. А. (Кишинев) *Оптимизация устойчивости скручиваемого стержня.*

25.V.1982. Хог Э. (Айова, США) *Анализ чувствительности и условия экстремума в оптимальном проектировании.*

26.V.1982. Хог Э. (Айова, США) *Численные методы решения задач оптимизации конструкций с неизвестными границами.*

13.X.1982. Баничук Н. В., Кобелев В. В. (Москва) *Об оптимальных частично равнопрочных поперечных сечениях балок.*

27.X.1982. Братусь А. С., Сейранян А. П. (Москва) *Необходимые и достаточные условия оптимальности в задачах оптимизации первых собственных значений.*

3.XI.1982. Ларичев А. Д. (Москва) *Оптимизация элементов конструкций на упругом основании.*

3.XI.1982. Баничук Н. В., Картвелишвили В. М., Фролов В. Д. (Москва) *Вариационные методы расчета деформирования тонкостенных конструкций с наведенной анизотропией пластических свойств.*

10.XI.1982. Литвинов В. Г. (Киев) *Управление эллиптическими системами и оптимизация элементов конструкций.*

12.XI.1982. Самсонов А. М. (Ленинград) *Оптимизация распространения уединенных нелинейных волн в стержнях переменного поперечного сечения.*

15.XI.1982. Николаева Е. А., Петухов Л. В. (Ленинград) *Оптимизация формы криволинейных стержней и существование оптимального решения.*

16.XI.1982. Чикрий Г. И., Бардадым Т. А. (Киев) *Дифференциальная игра преследования с запаздыванием информации, зависящим от положения области.*

17.XI.1982. Сейранян А. П. (Москва) *Об одной задаче Лагранжа.*

24.XI.1982. Пашков А. Г., Терехов С. Д. (Москва) *Об одной задаче преследования двумя объектами одного (более быстрого).*

8.XII.1982. Каюпов М. А. (Алма-Ата) *Оптимизация формы профиля и подкрепления отверстий в анизотропном теле.*

8.XII.1982. Бельский В. Г. (Москва) *Численный метод оптимизации формы области в задачах теории упругости.*

15.XII.1982. Шаныгин А. Н. (Жуковский) *Использование композиционных материалов при проектировании современных летательных аппаратов.*

22.XII.1982. Сейранян А. П., Шаранюк А. В. (Москва, Жуковский) *Чувствительность и оптимизация критических параметров динамической устойчивости.*

29.XII.1982. Картвелишвили В. М. (Москва) *Оптимизация упругих пластин переменной толщины с учетом тепловых воздействий.*
