

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ ПОГРАНСЛОЯ ИЗ УСЛОВИЯ МИНИМУМА ЭНЕРГИИ

БЕРДИЧЕВСКИЙ В. Л.

Ранее [1] было высказано предположение о возможности поиска размера погранслоя в теории оболочек (области, в которой напряженное состояние оболочки существенно трехмерно и не может быть описано двумерной теорией) из условия минимума энергии. Исследование этого вопроса в задачах теории оболочек технически довольно сложно. Поэтому дальше он разбирается на более простых примерах.

1. Пусть  $M$  — множество дифференцируемых функций  $u(x)$ , определенных на полупрямой  $0 \leq x < +\infty$  и имеющих в точке  $x=0$  значение  $u(0)=1$ . На множестве  $M$  задан функционал

$$I(u) = \int_0^{\infty} \left[ u^2 + h^2 \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx$$

Рассмотрим задачу о минимуме  $I(u)$  и  $M$ . Минимум  $I(u)$  достигается на функции  $u_0 = e^{-x/h}$ . Минимизирующая функция имеет характер погранслоя и существенно отлична от нуля только в малой окрестности порядка  $h$  точки  $x=0$ . Покажем, как приближенно найти размер этой окрестности, заложив в функционал априорную информацию о том, что решение имеет характер погранслоя.

Зададимся некоторой величиной  $\Delta$ , выделим область  $0 \leq x \leq \Delta$ , примыкающую к краю, вне ее положим  $u=0$ , а внутри аппроксимируем  $u(x)$  каким-нибудь образом, удовлетворяя при этом условиям  $u(0)=1$ ,  $u(\Delta)=0$ . Положим, например,  $u(x) = (1-x/\Delta)^2$ . Тогда функционал  $I(u)$  становится функцией только  $\Delta$ :

$$I(u) = 1/5 \Delta + 4/3 h^2 / \Delta \quad (1.1)$$

Видно, что задача об определении ширины погранслоя «хорошо поставлена»: функция (1.1) имеет единственный минимум, который достигается при  $\Delta = 2(5/3)^{1/2} h$ . Погрешность определения ширины погранслоя можно характеризовать значением решения  $u_0(\Delta)$  ( $=0,075$ ) в точке  $x=\Delta$ . Для более точного определения ширины погранслоя можно ввести в аппроксимацию  $u(x)$  на отрезке  $[0, \Delta]$  свободные параметры, по которым проводится дополнительная минимизация  $I(u)$ .

2. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку длиной  $2l$  и радиусом  $R$ , защемленную на краях и деформируемую равномерным «мертвым» давлением  $P$ . Положения равновесия есть стационарные точки функционала

$$\int_{-l}^l \left[ \left( u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{1,1}^2 \right)^2 + 2\nu \left( u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{1,1}^2 \right) \frac{u}{R} + \frac{u^2}{R^2} + \frac{h^2}{12} u_{1,1}^2 - \frac{Pu}{\mu h(1+\sigma)} \right] dx \quad (2.1)$$

при ограничениях

$$u_1 = u = u_{1,1} = 0 \quad (x = \pm l) \quad (2.2)$$

Здесь  $x^1 \equiv x$  — координата вдоль образующей оболочки,  $u$  и  $u_1$  — нормальная и тангенциальная составляющие вектора перемещений, запятой в индексах обозначается дифференцирование,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\mu$  — модуль сдвига,  $h$  — толщина оболочки,  $\sigma = \nu/(1-\nu)$ .

Преобразуем вариационную задачу (2.1), (2.2) к более удобному виду. Очевидно, что задача (2.1), (2.2) эквивалентна вариационной задаче для функционала

$$\int_{-l}^l \left[ 2c \left( u_{1,1} + \frac{1}{2} u_{1,1}^2 + \nu \frac{u}{R} \right) - c^2 + \frac{1-\nu^2}{R^2} u^2 + \frac{h^2}{12} u_{1,1}^2 - \frac{Pu}{\mu h(1+\sigma)} \right] dx \quad (2.3)$$

где  $c(x)$  — дополнительная искомая функция. В функционал (2.3) функция  $u_1(x)$  входит линейно. В стационарных точках по  $u_1$  имеем  $c = \text{const}$ . Используя краевые условия (2.2), получим, что первое слагаемое в (2.3) равно нулю. Окончательно, после перехода к безразмерным величинам, имеем

$$2I = \int_{-1}^1 \left[ v^2 + p s^2 \nu v_{\xi}^2 + s^4 v_{\xi\xi}^2 - \frac{N^2}{12} - 2 \left( 1 - \frac{\nu N}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \right) v \right] d\xi \quad (2.4)$$

$$v = \frac{u}{ph}, \quad p = \frac{PR^2}{Eh^2}, \quad s^4 = \frac{h^2 R^2}{12(1-\nu^2)l^4}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad N = \frac{cR^2}{(1-\nu^2)ps^2l^2}$$

Стационарные точки функционала (2.4) ищутся по всем постоянным  $N$  и по всем функциям  $v(\xi)$ , удовлетворяющим условиям жесткой заделки

$$v=v_{\xi}=0 \quad (\xi=\pm 1) \quad (2.5)$$

Решение  $v(\xi)$  — четная функция  $\xi$ .

Зададимся некоторой величиной  $\Delta$  и будем считать, что на отрезке  $[-1+\Delta, 1-\Delta]$  функция  $v(\xi)$  постоянна,  $v(\xi)=v^*=\text{const}$ . На отрезке  $[1-\Delta, 1]$  аппроксимируем  $v(\xi)$  кубической параболой

$$v=v^* \left[ 3 \left( \frac{1-\xi}{\Delta} \right)^2 - 2 \left( \frac{1-\xi}{\Delta} \right)^3 \right] \quad (1-\Delta \leq \xi \leq 1) \quad (2.6)$$

Коэффициенты в (2.6) выбраны из условия непрерывности  $v$  и  $v_{\xi}$  в точке  $\xi=1-\Delta$  и условий (2.5). На отрезке  $[-1, -1+\Delta]$  функцию  $v(\xi)$  определим из условий четности.

Функционал (2.4) на введенном множестве функций  $v(\xi)$  становится функцией от  $v^*$ ,  $N$  и  $z=\Delta/s$ :

$$I=v^{*2} \left( 1 - \frac{22}{35} sz + \frac{6}{5z} spN + \frac{12s}{z^3} \right) - 2v^* \left( 1 - \frac{vN}{\sqrt{12(1-v^2)}} \right) (1-sz) - \frac{1}{12} N^2 \quad (2.7)$$

Стационарные точки функции (2.7) по  $v^*$ ,  $N$  и  $z$  определяют приближенное решение задачи. Параметрами являются величины  $p$  и  $s$ .

Нетрудно построить также точное решение задачи

$$v=1 - \frac{vN}{\sqrt{12(1-v^2)}} + a \operatorname{ch} \frac{\kappa' \xi}{s} \cos \frac{\kappa'' \xi}{s} + b \operatorname{sh} \frac{\kappa' \xi}{s} \sin \frac{\kappa'' \xi}{s} \quad (2.8)$$

$$\kappa' = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} pN}, \quad \kappa'' = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4} pN} \quad (pN \leq 2)$$

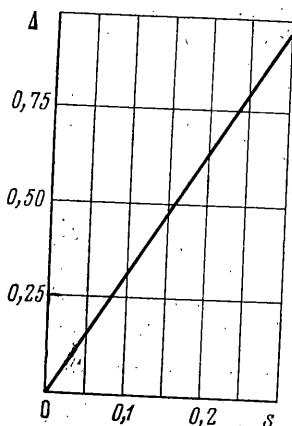
Параметры  $a$ ,  $b$ ,  $N$  определяются из решения системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} a \operatorname{ch} \frac{\kappa'}{s} \cos \frac{\kappa''}{s} + b \operatorname{sh} \frac{\kappa'}{s} \sin \frac{\kappa''}{s} + 1 - \frac{vN}{\sqrt{12(1-v^2)}} &= 0 \\ (a\kappa' + b\kappa'') \operatorname{sh} \frac{\kappa'}{s} \cos \frac{\kappa''}{s} + (b\kappa' - a\kappa'') \operatorname{ch} \frac{\kappa'}{s} \sin \frac{\kappa''}{s} &= 0 \\ N=3p[(a^2-b^2)(\kappa'^2-\kappa''^2)-4\kappa'\kappa''ab] - \frac{3}{2} ps[(a^2-b^2)\kappa''-2\kappa'ab] \sin \frac{2\kappa''}{s} \operatorname{ch} \frac{2\kappa'}{s} + \\ + \frac{3}{2} ps[(a^2-b^2)\kappa'+2\kappa''ab] \cos \frac{2\kappa''}{s} \operatorname{sh} \frac{2\kappa'}{s} + \frac{3}{2} ps[(a\kappa''-b\kappa')^2 + (a\kappa'+b\kappa'')^2] \times \\ \times \left[ \frac{\operatorname{sh}(2\kappa'/s)}{\kappa'} - \frac{\sin(2\kappa''/s)}{\kappa''} \right] + \frac{24v}{\sqrt{12(1-v^2)}} \left[ 1 - \frac{vN}{\sqrt{12(1-v^2)}} + \right. \\ \left. + s \frac{a\kappa''+b\kappa'}{\kappa'^2+\kappa''^2} \sin \frac{\kappa''}{s} \operatorname{ch} \frac{\kappa'}{s} - s \frac{b\kappa''-a\kappa'}{\kappa'^2+\kappa''^2} \cos \frac{\kappa''}{s} \operatorname{sh} \frac{\kappa'}{s} \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

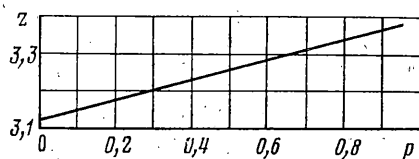
Сравнение результатов численного счета точной и приближенной задач приведено на фиг. 1–3. Значение  $v$  принято равным 0,30. Параметр  $p$  изменялся в пределах 0,001–0,951 с шагом 0,05, параметр  $s$  — в пределах 0,005–0,305 с шагом 0,05. Полудлина оболочки  $l$  связана с  $(hR)^{1/2}$  при выбранных значениях  $s$  и  $v$  равенствами

$s$	0,005	0,055	0,105	0,155	0,205	0,255	0,305
$l/\sqrt{hR}$	110	10	5,2	3,5	2,7	2,2	1,8

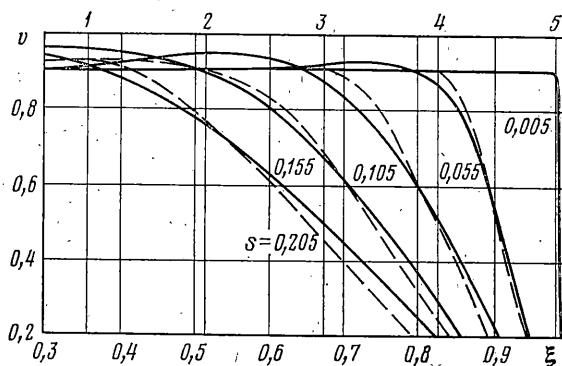
Фиг. 1 показывает зависимость отношения ширины краевой зоны к полудлине оболочки  $\Delta$  от безразмерной «обратной» длины  $s$  (пропорциональной  $\sqrt{hR}/l$ ) при  $p=0,001$ . Ширина краевой зоны линейно растет с ростом  $s$  (с уменьшением длины при фиксированных  $h$  и  $R$ ) и при  $l=3, 4$   $(hR)^{1/2}$  ( $s=0,16$ ) краевые зоны занимают примерно половину оболочки.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

На зависимость, представленную фиг. 1, величина нагрузки влияет мало (см. фиг. 2, на которой приведена зависимость отношения  $z = \Delta/s$  от нагрузки при  $s = 0.005$ ). Отношение  $\Delta/s$  при  $s = 0.005$  заключено в пределах 3,13–3,18; с ростом  $s$  диапазон изменения  $\Delta/s$  уменьшается.

Точность определения ширины краевой зоны можно характеризовать отношением энергии изгиба  $s^4 v_{\xi\xi}^2$  к главному члену в энергии растяжения  $v^2$  на границе краевой зоны  $\xi = 1 - sz$ . Во всем диапазоне изменения параметров  $p, s$  оно не превышает 2,4%.

Значения ширины краевой зоны, найденные энергетическим методом, соответствуют интуитивному выделению краевой зоны «на глаз», которое можно провести, рассматривая фиг. 3, где показана зависимость безразмерной радиальной компоненты перемещений  $v$  от координаты вдоль оболочки  $\xi$  по точной теории (сплошные линии) и приближенной теории (штриховые линии) при нескольких значениях  $s$ . Вертикальные прямые 1–5 ограничивают построенные энергетическим методом краевые зоны ( $s = 0.205; 0.155; 0.105; 0.055; 0.005$ ).

Автор признателен Л. А. Старосельскому за помощь в проведении численных расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Berdichevskii V. L. Variational-asymptotic method constructing of non-linear shell theory.— In: Theory of Shells: Proc. III IUTAM Sympos. (Tbilisi, 1978), Amsterdam: North-Holland Publ., 1980, p. 137–161.

Москва

Поступила в редакцию  
21.XI.1980