тельной среде. Разрешая полученное уравнение относительно ε, найдем

$$\varepsilon = A\langle\varepsilon\rangle, \quad A = (I - tX)^{-1} \tag{4.2}$$

Решение в форме (4.2) позволяет записать для A разложение вида

$$A = (I - tX)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} (tX)^k \tag{4.3}$$

существование и единственность которого обусловлены его сходимостью. Поскольку A не зависит от параметра λ_c, последний может быть выбран любым. Однако, чтобы имело место разложение в ряд, должны выполняться условия его сходимости, которые накладывают ограничения на λ_c. Параметр λ_c в силу его произвольности всегда может быть выбран с учетом ограничений, накладываемых условиями сходимости ряда (4.3). Установленная здесь возможность разложения A в ряд важна еще и потому, что позволяет использовать метод последовательных приближений при решении конкретных задач в теории неоднородных сред.

Одной из важных задач механики композитов является нахождение тензора макроскопических модулей упругости λ_*, связывающего средние значения полей напряжений и деформаций в форме закона Гука $\langle\sigma\rangle = \lambda_*\langle\varepsilon\rangle$, $\lambda_* = \langle\lambda A\rangle$. Единственность решения для λ_* следует из единственности для A. Аналогично: существование разложения (4.3) для A означает возможность представления λ_* в форме ряда $\lambda_* = \Sigma\lambda_k$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Выведенные в п. 3 операторные соотношения являются общими и вытекают из свойств уравнения равновесия. Вследствие этого полученные результаты (единственность полей σ и ε, разложимость A и λ_* в ряды) также являются общими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фокин А. Г.* Эффективные модули упругости неоднородных сред в случае потенциальных и бивихревых тензорных полей. — ПММ, 1977, т. 41, № 1, с. 143—149.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1980

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СРЕД С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ГЛУБИНЕ СВОЙСТВАМИ

АНАНЬЕВ И. В.

Сформулированные в [1, 2] теоремы единственности и разрешимости существенно опираются на асимптотические свойства ядра интегрального уравнения. В публикуемой работе показано, что эти свойства вполне удовлетворяют условиям теорем.

Для установления теорем единственности и разрешимости интегрального уравнения в некоторых функциональных пространствах [1, 2] необходимо знать поведение ядра на бесконечности. Поскольку ядро строится численно [3, 4], его асимптотическое поведение устанавливается непосредственно из системы дифференциальных уравнений и граничных условий, описывающую краевую задачу, которые, например, в случае осесимметричной задачи для слоя с зацепленным основанием после применения интегрального преобразования имеют вид [3]:

$$\begin{gathered}\mu(z)v^{\circ\prime\prime}+\mu'(z)v^{\circ\prime}-[(\lambda(z)+2\mu(z))t^2-\rho(z)\omega^2]v^\circ-\\ -[\lambda(z)+\mu(z)]tw^{\circ\prime}-\mu'(z)w^\circ t=0\\ [2\mu(z)+\lambda(z)]w^{\circ\prime\prime}+[2\mu'(z)+\lambda'(z)]w^{\circ\prime}-[\mu(z)t^2-\\ -\rho(z)\omega^2]w^\circ+[\lambda(z)+\mu(z)]tv^{\circ\prime}+\lambda'(z)tv^\circ=0\end{gathered} \tag{1}$$

$$[2\mu(z)+\lambda(z)]w^{\circ\prime}+\lambda(z)tv^\circ=Q(t) \tag{2}$$

$$\mu(z)(v^{\circ\prime}-tw^\circ)=0, \qquad q(r)=\int_0^\infty Q(t)J_0(rt)t\,dt, \qquad w^\circ=v^\circ=0 \qquad (z=0)$$

Для сокращения записи далее везде будем аргумент у функций $\mu(z)$, $\rho(z)$, $\lambda(z)$ опускать. Сделав замену $w^{\circ\prime}=-y_2 t$, $v^{\circ\prime}=-y_1 t$, $v^{\circ}=y_3$, $w^{\circ}=y_4$, сведем систему обыкновенных дифференциальных уравнений к виду

$$y_1'\varepsilon=-\frac{\mu'}{\mu}\varepsilon y_1-\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}-\varepsilon^2\frac{\rho}{\mu}\omega^2\right)y_3+\frac{\lambda+\mu}{\mu}y_2-\frac{\mu'}{\mu}\varepsilon y_4 \tag{3}$$

$$y_2'\varepsilon=-\frac{2\mu'+\lambda'}{2\mu+\lambda}\varepsilon y_2-\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}-\varepsilon^2\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\omega^2\right)y_4-\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}y_1+\frac{\lambda'}{2\mu+\lambda}\varepsilon y_3$$

$$y_3'\varepsilon=-y_1,\quad y_4'\varepsilon=-y_2,\quad \varepsilon=1/t$$

Граничные условия (2) в этих обозначениях будут выглядеть так:

$$\lambda_0 y_3-(2\mu_0+\lambda_0)y_2=\varepsilon,\quad y_1+y_4=0,\quad z=h\quad \lambda_0=\lambda(h),$$
$$\mu_0=\mu(h),\quad y_3=y_4=0,\quad z=0 \tag{4}$$

В матричной форме система (3) имеет вид

$$\varepsilon Y'=A(z,\varepsilon)Y \tag{5}$$

Очевидно, что матричная функция $A(z, \varepsilon)$ обладает асимптотическим разложением

$$A(z,\varepsilon)\sim\sum_{r=0}^{\infty}A_r(z)\varepsilon^r,\qquad \varepsilon\to 0 \tag{6}$$

Теорема [5]. Пусть $A(z, \varepsilon)$ — матричная функция, обладающая асимптотическим разложением (6), и все собственные значения матрицы $A_0(h)$ различны. Тогда дифференциальное уравнение (5) имеет фундаментальную матрицу решений вида

$$Y(z,\varepsilon)=Y^{\vee}(z,\varepsilon)e^{Q(z,\varepsilon)} \tag{7}$$

где матрица $Y^{\vee}(z, \varepsilon)$ имеет при ε, лежащем в некотором подсекторе сектора Σ комплексной плоскости ε, и при $|z|\leqslant z_1$ равномерное по z асимптотическое разложение $Y^{\vee}(z,\varepsilon)\sim\Sigma Y_r(z)\varepsilon^r$ $(r=0\div\infty)$, $\varepsilon\to 0$. Коэффициенты этого разложения регулярны при $|z|\leqslant z_1$, и в этой области $\det Y_0(z)\neq 0$. Матрица $Q(z,\varepsilon)=\Sigma Q_k(z)\varepsilon^{-k}$ $(k=1,\ldots,m)$ — диагональная, $Q_k(z)$ регулярны при $|z|\leqslant z_1$. В частности

$$Q_m(z)=\operatorname{diag}\left(\int_0^z q_1(p)\,dp,\ldots,\int_0^z q_n(p)\,dp\right)$$

где $q_j(z)$ $(j=1,\ldots,n)$ — собственные значения матрицы $A_0(z)$.

Учитывая (3), имеем

$$A_0-qE=\begin{vmatrix} -q & \left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right) & \left(-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right) & 0\\ -\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda} & -q & 0 & \left(-\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\right)\\ -1 & 0 & -q & 0\\ 0 & -1 & 0 & -q\end{vmatrix}$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид

$$\det\|A_0-qE\|=q^4+q^2\left[\frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu(\lambda+2\mu)}-\frac{\lambda+2\mu}{\mu}+\frac{\mu}{2\mu+\lambda}\right]-1=0$$

и четыре различных корня

$$q_{1,2}=-\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}\pm\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}\right)^2+1\right]^{1/2}},\qquad q_{3,4}=\sqrt{\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}\pm\left[\left(\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}\right)^2+1\right]^{1/2}} \tag{8}$$

Таким образом, все условия теоремы выполнены и общее решение (3) представимо в форме

$$y_j(z,\varepsilon)\sim\sum_{i=1}^{4}\left\{\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r a_{jr}^{(i)}(z)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^z q_i(p)\right)dp\right\}\quad (j=1,2,3,4) \tag{9}$$

Подставим по очереди в (3) частные решения вида (9), соответствующие различным q_i, и приравняем выражения, стоящие слева и справа при одинаковых степенях ε. Получим систему алгебраических уравнений относительно $a_{jr}^{(i)}(z)$. Рассмотрим эту систему при $r=0$. Далее везде для краткости $a_{jr}^{(i)}(z)$ будем записывать как $a_{jr}^{(i)}$:

$$
\begin{gathered}
a_{10}^{(i)} q_i + \frac{\lambda+2\mu}{\mu} a_{30}^{(i)} - \frac{\lambda+\mu}{\mu} a_{20}^{(i)} = 0 \\
\frac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda} a_{10}^{(i)} + a_{20}^{(i)} q_i + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} a_{40} = 0 \\
a_{10}^{(i)} + a_{30}^{(i)} q_i = 0, \qquad a_{20}^{(i)} + a_{40}^{(i)} q_i = 0
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Поскольку q_i является собственным значением (3), ранг матрицы $B^{(i)}$ равен трем

$$
B^{(i)} = \begin{vmatrix}
q_i & \left(-\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\right) & \left(\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\right) & 0 \\
\left(\dfrac{\lambda+\mu}{2\mu+\lambda}\right) & q_i & 0 & \left(\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\right) \\
1 & 0 & q_i & 0 \\
0 & 1 & 0 & q_i
\end{vmatrix}
$$

Согласно [6], решение (10) представим в виде

$$
a_{j0}^{(i)}(z) = c_i^{\circ} \check{B}_{kj}^{(i)}(z) \tag{11}
$$

где $\check{B}_{kj}^{(i)}(z)$ – алгебраическое дополнение элемента $B_{kj}^{(i)}(z)$ определителя системы (11), причем k выбрано так, что хотя бы одно $\check{B}_{kj}^{(i)}(z)$ отлично от нуля, c_i° – произвольная константа, подлежащая определению из (4). Несложно показать, что

$$
a_{j0}^{(i)}(z) = c_i^{\circ} \check{B}_{kj}^{(i)}(z) \neq 0 \quad (i,j=1,2,3,4) \tag{12}
$$

Учитывая (12), граничные условия (4) можно записать так:

$$
\begin{gathered}
\sum_{i=1}^{4} c_i^{\circ} s_1^{(i)} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{4} c_i^{\circ} s_2^{(i)} = 0, \\
\sum_{i=1}^{4} c_i^{\circ} s_3^{(i)} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{4} c_i^{\circ} s_4^{(i)} = 0
\end{gathered}
\tag{13}
$$

$$
\begin{gathered}
\{\lambda_0 B_{33}^{(i)}(h) - (2\mu_0+\lambda_0) B_{22}'^{(i)}(h)\} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^h q_i(p)\,dp\right) = s_1^{(i)} \\
\{B_{11}^{(i)}(h) + B_{44}'^{(i)}(h)\} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^h q_i(p)\,dp\right) = s_2^{(i)}, \quad B_{33}^{(i)}(0) = s_3^{(i)}, \quad B_{44}^{(i)}(0) = s_4^{(i)}
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Определитель системы (13) в этих обозначениях имеет вид

$$
\begin{aligned}
\det\|s_m^{(i)}\| = {} & -\mathbf{s_4^{(1)}}[\mathbf{s_3^{(2)}}(s_1^{(3)}s_2^{(4)} - s_1^{(4)}s_2^{(3)}) - s_3^{(3)}(s_1^{(2)}s_2^{(4)} - s_1^{(4)}s_2^{(3)}) - s_3^{(3)}(s_1^{(2)}s_2^{(4)} - s_1^{(4)}s_2^{(4)}) + \\
& + s_3^{(4)}(s_1^{(2)}s_2^{(3)} - s_1^{(3)}s_2^{(2)})] + s_4^{(2)}[\ldots] - s_4^{(3)}[\ldots] + s_4^{(4)}[\ldots] \neq 0
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Выражения в квадратных скобках аналогичны выписанному и получаются циклической перестановкой индексов.

Таким образом, система (10) имеет только тривиальные решения $c_i^0=0$ ($i=1, 2, 3, 4$). Следовательно

$$a_{j0}^{(i)}(z)=0 \quad (i,j=1,2,3,4) \tag{16}$$

Теперь рассмотрим случай $r=1$. Действуя по изложенной выше схеме, для функций $a_{j1}^{(i)}(z)$ вследствие (16) получим систему уравнений, совершенно аналогичную (10). Краевые условия в этих обозначениях будут иметь вид

$$\Sigma c_i^{(1)} s_m^{(i)}=1 \quad (m=1), \qquad \Sigma c_i^{(1)} s_m^{(i)}=0 \quad (m\neq 1;\ m=1,2,3,4) \tag{17}$$

Как было установлено, $\det(s_m^{(i)})\neq 0$, следовательно

$$c_i^1=\det\|s_m^{(i)}\|_i/\det\|s_m^{(i)}\| \tag{18}$$

где $\|s_m^{(i)}\|_i$ – матрица $\|s_m^{(i)}\|$, у которой i-й столбец заменен столбцом, у которого отличен от нуля и равен единице только первый элемент.

Учитывая (14), (15), (12), нетрудно заметить, что при $\varepsilon\to 0$ все функции $y_j^{(i)}(z, \varepsilon)$ будут равномерно ограничены по ε, поскольку растущие экспоненты, соответствующие $q_i(z)$, будут линейно входить в числитель и знаменатель выражений вида

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\det\|s_m^{(i)}\|_i}{\det\|s_m^{(i)}\|}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0 q_i(p)\,dp\right) \tag{19}$$

Для $r=2$ система уравнений (10) становится неоднородной – в правых частях появляются члены вида $a_{j1}^{(i)}(z)$, ранг матрицы по-прежнему равен трем. Действуя известным образом [6], можно выразить, например, $a_{j2}^{(i)}(z)$ ($j=2, 3, 4$) через $a_{12}^{(i)}(z)$. Далее из результатов теоремы следует регулярность $a_{j2}^{(i)}(z)$ при $z\leqslant h$. Разложим регулярные функции $a_{j2}^{(i)}(z)$ в ряды по степеням z:

$$a_{12}^{(i)}\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(i)}z^k \quad (i=1,2,3,4) \tag{20}$$

Подставляя (20) в однородную систему краевых условий типа (13), (14) и собирая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим однородные системы алгебраических уравнений для определения $c_k^{(i)}$. Проведя вычисления, аналогичные (15), можно показать, что определитель этой системы при всех k имеет одинаковый вид и отличен от нуля. Следовательно, все $c_k^{(i)}=0$ ($i=1, 2, 3, 4$; $k=0, 1, 2, \ldots, \infty$).

Для случаев $r=3, 4, 5, \ldots$ рассуждения полностью совпадают со случаем $r=0$, поскольку коэффициенты при ε^{r-1} равны нулю и системы (10) и (13) однородные.

Таким образом, при малых ε решение краевой задачи (3), (4) представимо в виде $y_j(z, \varepsilon)\sim c\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$. Нужно отметить, что численные результаты, полученные в [3, 4], полностью подтверждают поведение решения $\varepsilon\to 0$. Очевидно, что подобный результат может быть получен и для других механических постановок задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. – Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6, с. 1310—1313.
2. *Бабешко В. А.* К теории динамических контактных задач. — Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3, с. 556–558.
3. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Вибрация штампа на слое с переменными по глубине свойствами. — Изв. АН СССР. МТТ, 1978, № 1, с. 64—69.
4. *Ананьев И. В.* Вибрация штампа на многослойном основании с переменными по глубине свойствами. — В кн.: Неклассические задачи теории плит и оболочек. Межвуз. сб. Ростов н/Д: Изд-е Рост. инж.-строит. ин-та, 1977, с. 60–70.
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968. 464 с.
6. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 24.IV.1980