МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 539.32

НЕКОТОРЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ ТЕНЗОРА ГРИНА УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ, И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ТЕОРИИ КОМПОЗИТОВ

ФОКИН А. Г.

Стохастическому уравнению равновесия ставится в соответствие интегральное уравнение для тензора деформаций. Устанавливается связь между любыми двумя решениями уравнения равновесия, отвечающими одинаковым граничным условиям и источникам, но различным упругим свойствам среды. Полученное соотношение используется для доказательства независимости решения статистического уравнения равновесия от упругих характеристик среды сравнения λ_c. Показано, что поле деформаций ε представимо в форме ряда Неймана, условия сходимости которого всегда могут быть удовлетворены надлежащим подбором вспомогательного параметра λ_c. Следствием этого являются единственность решения стохастического уравнения равновесия, а также возможность разложения в ряд тензора эффективных модулей упругости λ_*.

Широкое использование композитных материалов привело к необходимости решения уравнения равновесия с изменяющимися от точки к точке упругими характеристиками. Это обстоятельство делает практически невозможным решение до конца различных краевых задач. В качестве приближенного может быть использован метод разложения искомых полей напряжений σ и деформаций ε в ряды по некоторым параметрам. Последние, однако, должны удовлетворять определенным ограничениям, вытекающим из условий сходимости соответствующих рядов.

Часто ограничиваются нахождением тензора (в общем случае – оператора) A, связывающего поле ε в любой точке со средним (макроскопическим) значением $\langle\varepsilon\rangle$ посредством равенства $\varepsilon=A\langle\varepsilon\rangle$. Поле $\langle\varepsilon\rangle$, в свою очередь, удовлетворяет уравнению равновесия, в котором вместо исходных должны быть поставлены макроскопические (эффективные) упругие характеристики, определяемые равенствами $\langle\sigma\rangle=\langle\lambda\varepsilon\rangle=\lambda_*\langle\varepsilon\rangle$, где λ, λ_* – тензоры локальных и макроскопических модулей упругости. Таким образом, задача расчета полей σ и ε сводится к нахождению тензоров A и $\lambda_*=\langle\lambda A\rangle$. Представление A (а следовательно, и λ_*) в форме ряда порождает проблему его сходимости и единственности.

В публикуемой работе рассмотрением некоторых общих свойств решений уравнения равновесия получены соотношения для операторов, построенных на основе соответствующего тензора Грина. При помощи этих соотношений установлена независимость решения для A от величины используемого параметра λ_c, что эквивалентно единственности A. Ввиду произвольности λ_c он может быть выбран таким образом, чтобы удовлетворялись условия сходимости ряда, в форме которого представляется решение для A в методе последовательных приближений.

1. Пусть рассматриваемая неоднородная среда объема V характеризуется тензором модулей упругости $\lambda(\mathbf{r})$. (Здесь и далее почти везде тензорные индексы для простоты опущены.) Упругие поля в отсутствие внутренних напряжений, как известно, подчиняются уравнению [1]:

$$L\mathbf{u}=-\mathbf{f},\quad L=\operatorname{div}\lambda\operatorname{def}\quad(\mathbf{r}\in V),\quad \sigma=\lambda\varepsilon,\quad \varepsilon=\operatorname{def}\mathbf{u} \tag{1.1}$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_0\quad(\mathbf{r}\in S_1),\quad \mathbf{t}=\mathbf{t}_0\quad(\mathbf{r}\in S_2),\quad \mathbf{t}=\sigma\mathbf{n},\quad S_1\cup S_2=S \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности S.

Пусть λ – случайное тензорное поле, которое в частном случае может быть константой. Внешние силы $\mathbf{f}$, граничные условия и форма поверхности S, ограничивающей объем среды V, полагаются всюду регулярными (неслучайными) величинами.

Если пространство, ограниченное поверхностью S, заполнено материалом, тензор модулей упругости которого λ_1, то вместо задачи (1.1), (1.2) будем иметь

$$L_1\mathbf{u}_1=-\mathbf{f},\qquad L_1=\operatorname{div}\lambda_1\operatorname{def}\ (\mathbf{r}\in V) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_0\quad(\mathbf{r}\in S_1),\quad \mathbf{t}_1=\mathbf{t}_0\quad(\mathbf{r}\in S_2) \tag{1.4}$$

Вводя поле смещений $\delta\mathbf{u}=\mathbf{u}-\mathbf{u}_1$ и используя результаты работы [1], из системы (1.1)–(1.5) получим уравнение

$$L_1\delta\mathbf{u}=-(L-L_1)\mathbf{u} \quad (\mathbf{r}\in V) \tag{1.5}$$

правую часть которого будем рассматривать в качестве источников, порождающих в объеме V с упругими характеристиками λ_1 поле $\delta\mathbf{u}$. Уравнению (1.5) соответствуют граничные условия

$$\mathbf{u}-\mathbf{u}_1=0 \quad (\mathbf{r}\in S_1), \quad \mathbf{t}-\mathbf{t}_1=0 \quad (\mathbf{r}\in S_2) \tag{1.6}$$

Граничные условия (1.6) записаны для разностных полей смещений $\mathbf{u}-\mathbf{u}_1$ и напряжений $\sigma-\sigma_1$, причем последнее не соответствует полю смещений $\delta\mathbf{u}$, создаваемому в объеме V среды с упругими свойствами λ_1 силами плотности $(L-L_1)\mathbf{u}$ и граничными условиями (1.6). Действительно, полю смещений $\delta\mathbf{u}$ отвечает поле **деформации $\delta\varepsilon=\mathrm{def}\,\delta\mathbf{u}$,** а полю $\delta\varepsilon$ в рассматриваемой среде соответствует поле напряжений $\delta\sigma$, связанное с деформациями законом Гука $\delta\sigma=\lambda_1\delta\varepsilon$.

Чтобы выразить поле $\delta\sigma$ через поле $\sigma-\sigma_1$, введем тензор поляризованных напряжений τ

$$\tau=(\lambda-\lambda_1)\varepsilon=\sigma-\lambda_1\varepsilon=\sigma-\sigma_1-\lambda_1\delta\varepsilon=\sigma-\sigma_1-\delta\sigma \tag{1.7}$$

Используя (1.7), перепишем (1.5) и (1.6) в виде

$$L_1\delta\mathbf{u}=-\mathrm{div}\,\tau\equiv-\delta\mathbf{f} \quad (\mathbf{r}\in V)$$
$$\delta\mathbf{u}=0 \quad (\mathbf{r}\in S_1), \quad \delta\sigma\mathbf{n}\equiv\delta\mathbf{t}=-\tau\mathbf{n} \quad (\mathbf{r}\in S_2) \tag{1.8}$$

Вводя тензор Грина G_1 и уравнения равновесия с однородными граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} &L_1G_1(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=-\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \quad (\mathbf{r},\ \mathbf{r}'\in V)\\ &G_1(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0 \quad (\mathbf{r}\in S_1,\ \mathbf{r}'\in V)\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$\mathbf{n}\lambda_1\,\mathrm{def}\,G_1(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')\equiv T_1(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')=0 \quad (\mathbf{r}\in S_2,\ \mathbf{r}'\in V) \tag{1.10}$$

запишем решение уравнения (1.8) для поля $\delta\mathbf{u}$ в виде

$$\delta u_i=\int G_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta f_j'\,dV'+\int[G_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\delta t_j'-\delta u_j'T_{ji}^{(1)}(\mathbf{r}',\mathbf{r})]\,dS'$$

где величины со штрихами взяты в точке $\mathbf{r}'$. Переходя в подынтегральных выражениях к поляризованным напряжениям τ, учитывая (1.10) и используя теорему Гаусса – Остроградского, получим

$$\delta u_i=-\int\tau_{jk}'\nabla_k'G_{ij}^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,dV' \tag{1.11}$$

Полю смещений (1.11) соответствует поле деформаций

$$\delta\varepsilon=\mathrm{def}\,\delta\mathbf{u}\equiv Q_1\tau, \qquad Q_{ijkl}^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}')=-\nabla_{(i}G_{j)(k,l')}^{(1)}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \tag{1.12}$$

где интегральный оператор Q_1 и его ядро $Q_1(\mathbf{r},\ \mathbf{r}')$ обозначены одной и той же буквой; по индексам, стоящим в круглых скобках, проведена симметризация, а по индексу, стоящему после запятой, проводится дифференцирование, причем индексу со штрихом соответствует дифференцирование по координате со штрихом с последующим отбрасыванием штриха у индекса.

Учитывая связь τ с ε согласно (1.7), представим (1.12) в форме

$$\varepsilon=\varepsilon_1+Q_1\tau=\varepsilon_1+X_1\varepsilon, \quad X_1\equiv Q_1(\lambda-\lambda_1) \tag{1.13}$$

Это уравнение аналогично уравнению (1.9) из [1], полученному при рассмотрении первой краевой задачи.

При выводе интегрального уравнения (1.13) свойства поля λ никак не использовались и, таким образом, не влияли на сам вывод. Следовательно, с равным основанием наряду с (1.13) можно записать уравнение

$$\varepsilon_2=\varepsilon_1+X_{12}\varepsilon_2, \quad X_{12}\equiv Q_1(\lambda_2-\lambda_1) \tag{1.14}$$

для поля ε_2, создаваемого прежним распределением объемных сил $\mathbf{f}$ и одинаковыми с (1.4) граничными условиями в геометрически идентичной среде, упругие свойства которой описываются тензором модулей упругости λ_2.

Уравнение (1.14), таким образом, связывает два решения уравнения равновесия, соответствующие одинаковым внешним (форме поверхности S, граничным условиям и источникам $\mathbf{f}$), но различным внутренним (упругим свойствам двух сред, описываемым тензорами λ_1 и λ_2) условиям.

Вспомогательное уравнение (1.14) может оказаться полезным, когда решение задачи для поля λ_2 представляет те или иные трудности, в то время как решение той же задачи для поля λ_1 известно. Тогда искомое решение может быть найдено (точно или приближенно) на основе (1.14), которое через оператор Q_1 несет всю информацию о граничных условиях, а через поле $(\lambda_2-\lambda_1)$ – о свойствах рассматриваемой среды.

2. Решение статистического интегрального уравнения (1.13) аналогично [1] представим в форме

$$\varepsilon=A_1\langle\varepsilon\rangle,\quad A_1=a_1^{-1}\langle a_1^{-1}\rangle^{-1},\quad a_1\equiv I-X_1 \tag{2.1}$$

где угловыми скобками обозначена операция усреднения по ансамблю реализаций, а в качестве вспомогательного материала (среды сравнения) использована среда с упругими характеристиками λ_1.

Если же вместо материала со свойствами λ_1 использовать материал со свойствами λ_2, то наряду с (2.1) имеет место соотношение, получаемое из него заменой $\lambda_1\to\lambda_2$, $X_1\to X_2=Q_2(\lambda-\lambda_2)$. Это приводит к полю ε в виде

$$\varepsilon=A_2\langle\varepsilon\rangle \tag{2.2}$$

где для A_2 справедлины соотношения, аналогичные (2.1).

Сравнивая (2.1) и (2.2), заключаем, что для операторов A_1 и A_2 должно выполняться равенство $A_1=A_2$. Для случайных операторов A_i равенство $A_1=A_2$ удовлетворяется, если

$$a_1=a_{12}a_2,\quad a_{12}=I-X_{12} \tag{2.3}$$

где a_1 и a_2 – случайные операторы, а a_{12} – регулярный.

Обращая равенство (2.3) $a_1^{-1}=a_2^{-1}a_{12}^{-1}$, усредняя результат по ансамблю реализаций $\langle a_1^{-1}\rangle=\langle a_2^{-1}\rangle a_{12}^{-1}$ и вновь обращая полученное равенство $\langle a_1^{-1}\rangle^{-1}=a_{12}\langle a_2^{-1}\rangle^{-1}$, найдем

$$A_1=a_1^{-1}\langle a_1^{-1}\rangle^{-1}=a_2^{-1}\langle a_2^{-1}\rangle^{-1}=A_2 \tag{2.4}$$

Операторное равенство (2.4) справедливо при любых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$, т. е. $A_1=A_2=\ldots=A_i=\ldots=A$, а потому вообще не зависит от параметра λ_i вспомогательной среды.

3. Покажем, что имеет место использованное в п. 2 соотношение (2.3). Перепишем его в виде $I-Q_1(\lambda-\lambda_1)=[I-Q_1(\lambda_2-\lambda_1)][I-Q_2(\lambda-\lambda_2)]$. Раскрывая квадратные скобки и перемножая операторы, после несложных преобразований найдем

$$Q_2=Q_1+Q_1(\lambda_2-\lambda_1)Q_2 \tag{3.1}$$

Справедливость равенства (3.1) доказывается при помощи (1.9) и (1.10). Действительно, выражая произведение $Q_1\lambda_2Q_2$ через соответствующие функции Грина и используя тензорную форму, запишем

$$\overset{(1)}{Q}_{ijpq}\overset{(2)}{\lambda}_{pqmn}\overset{(2)}{Q}_{mnkl}=\int[-\nabla_{(i}\overset{(1)}{G}_{j)(p,q')}(\mathbf{r},\mathbf{r}')]\overset{(2)}{\lambda}_{pqmn}(\mathbf{r}')[-\nabla_{(n'}\overset{(2)}{G}_{m)(k,l'')}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')]dV' \tag{3.2}$$

Интеграл по переменной со штрихом на основе преобразований

$$\int\overset{(1)}{G}_{jp,q'}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\overset{(2)}{\lambda}_{pqmn}(\mathbf{r}')\nabla_n'\overset{(2)}{G}_{mk}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')dV'=\int\overset{(1)}{G}_{jp}n_q'\overset{(2)}{\lambda}_{pqmn}\nabla_n'\overset{(2)}{G}_{mk}dS'-$$

$$-\int\overset{(1)}{G}_{jp}(\mathbf{r},\mathbf{r}')\nabla_q'\overset{(2)}{\lambda}_{pqmn}(\mathbf{r}')\nabla_n'\overset{(2)}{G}_{mk}(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')dV'=\overset{(1)}{G}_{jk}(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$$

приводит (3.2) к виду

$$Q_1\lambda_2Q_2=-Q_1 \tag{3.3}$$

Аналогичным образом запишем

$$Q_1\lambda_1Q_2=-Q_2 \tag{3.4}$$

Вычитая (3.4) из (3.3), приходим к (3.1).

Для любых величин λ_i, λ_j, λ_k, имеющих свойства тензоров модулей упругости, равенство (2.3) дает $a_{ij}=a_{ik}a_{kj}$. Полученное операторное соотношение основано лишь на определении тензора Грина G на основе (1.9) и (1.10). Следовательно, вытекающая из него независимость оператора A от каких-либо вспомогательных параметров представляет собой свойство самого уравнения равновесия.

4. Ввиду установленной в п. 2 независимости решения для A_i от параметра вспомогательной среды $\lambda_c=\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ индекс i этого параметра может быть опущен. Вместо (2.1) и (2.2) запишем

$$\varepsilon=A\langle\varepsilon\rangle,\quad A=a^{-1}\langle a^{-1}\rangle^{-1},\quad a=I-X,\quad X=Q(\lambda-\lambda_c) \tag{4.1}$$

где оператор Q получен при помощи параметра λ_c. Дадим представление A в форме ряда. Перепишем уравнение типа (1.13) в виде $t\varepsilon\equiv\varepsilon-\langle\varepsilon\rangle=tX\varepsilon$, где с использованием оператора t случайной составляющей из уравнения исключено поле ε_c во вспомогательной среде. Разрешая полученное уравнение относительно ε, найдем

$$\varepsilon = A\langle\varepsilon\rangle, \quad A = (I - tX)^{-1} \tag{4.2}$$

Решение в форме (4.2) позволяет записать для A разложение вида

$$A = (I - tX)^{-1} = \sum_{0}^{\infty} (tX)^k \tag{4.3}$$

существование и единственность которого обусловлены его сходимостью. Поскольку A не зависит от параметра λ_c, последний может быть выбран любым. Однако, чтобы имело место разложение в ряд, должны выполняться условия его сходимости, которые накладывают ограничения на λ_c. Параметр λ_c в силу его произвольности всегда может быть выбран с учетом ограничений, накладываемых условиями сходимости ряда (4.3). Установленная здесь возможность разложения A в ряд важна еще и потому, что позволяет использовать метод последовательных приближений при решении конкретных задач в теории неоднородных сред.

Одной из важных задач механики композитов является нахождение тензора макроскопических модулей упругости λ_*, связывающего средние значения полей напряжений и деформаций в форме закона Гука $\langle\sigma\rangle = \lambda_*\langle\varepsilon\rangle$, $\lambda_* \equiv \langle\lambda A\rangle$. Единственность решения для λ_* следует из единственности для A. Аналогично: существование разложения (4.3) для A означает возможность представления λ_* в форме ряда $\lambda_* = \Sigma\lambda_k$ $(k=0, 1, \ldots)$.

Выведенные в п. 3 операторные соотношения являются общими и вытекают из свойств уравнения равновесия. Вследствие этого полученные результаты (единственность полей σ и ε, разложимость A и λ_* в ряды) также являются общими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фокин А. Г.* Эффективные модули упругости неоднородных сред в случае потенциальных и бивихревых тензорных полей. — ПММ, 1977, т. 41, № 1, с. 143—149.

Москва

Поступила в редакцию 24.X.1980

УДК 539.3

ОБ АСИМПТОТИКЕ ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СРЕД С ПЕРЕМЕННЫМИ ПО ГЛУБИНЕ СВОЙСТВАМИ

АНАНЬЕВ И. В.

Сформулированные в [1, 2] теоремы единственности и разрешимости существенно опираются на асимптотические свойства ядра интегрального уравнения. В публикуемой работе показано, что эти свойства вполне удовлетворяют условиям теорем.

Для установления теорем единственности и разрешимости интегрального уравнения в некоторых функциональных пространствах [1, 2] необходимо знать поведение ядра на бесконечности. Поскольку ядро строится численно [3, 4], его асимптотическое поведение устанавливается непосредственно из системы дифференциальных уравнений и граничных условий, описывающую краевую задачу, которые, например, в случае осесимметричной задачи для слоя с зацепленным основанием после применения интегрального преобразования имеют вид [3]:

$$\begin{gathered}\mu(z)v^{\circ\prime\prime} + \mu'(z)v^{\circ\prime} - [(\lambda(z) + 2\mu(z))t^2 - \rho(z)\omega^2]v^\circ - \\ -[\lambda(z) + \mu(z)]tw^{\circ\prime} - \mu'(z)w^\circ t = 0 \\ [2\mu(z) + \lambda(z)]w^{\circ\prime\prime} + [2\mu'(z) + \lambda'(z)]w^{\circ\prime} - [\mu(z)t^2 - \\ -\rho(z)\omega^2]w^\circ + [\lambda(z) + \mu(z)]tv^{\circ\prime} + \lambda'(z)tv^\circ = 0\end{gathered} \tag{1}$$

$$[2\mu(z) + \lambda(z)]w^{\circ\prime} + \lambda(z)tv^\circ = Q(t) \tag{2}$$

$$\mu(z)(v^{\circ\prime} - tw^\circ) = 0, \qquad q(r) = \int_0^\infty Q(t)J_0(rt)t\,dt, \qquad w^\circ = v^\circ = 0 \qquad (z=0)$$