

УДК 624.131+539.215

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ПОРИСТОГО НАСЫЩЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

ЗАЗОВСКИЙ А. Ф.

Рассматривается квазистатическое воздействие внешнего осесимметричного распределения давления на проницаемую поверхность пористого, насыщенного жидкостью полупространства. Давление передается скелету пористой среды и насыщающей его жидкости. Соответствующее изменение напряженно-деформированного состояния среды в пренебрежении динамическими процессами [4], возникающими в момент приложения воздействия, описывается системой уравнений теории консолидации Био [2, 3]. Исследовано напряженное состояние полупространства и возможность его разрушения. В качестве критерия разрушения использовался критерий Гриффитса, видоизмененный для случая пористой среды, насыщенной жидкостью, прочностные свойства которой зависят от эффективных напряжений. Метод решения основан на применении повторного преобразования Лапласа — Ханкеля и обобщенного представления Мак-Нейми — Гибсона общего решения системы уравнений теории консолидации Био для полупространства и слоя [4]. Сравнение с решением аналогичной задачи для упругого полупространства позволяет оценить влияние внутрипорового давления на прочностные характеристики среды и локализацию области начала разрушения, находящейся на оси действия давления на некотором расстоянии от границы полупространства. Полученные результаты могут оказаться полезными при анализе механизма разрушения цементированных насыщенных жидкостью сред (скальных пористых, водонасыщенных пород), а также углей (см., например, [5]) гидромониторными струями.

Попытка решения подобной задачи методом конечных элементов была предпринята в [6], однако приведенные там результаты численных расчетов качественно не согласуются с результатами, полученными в публикуемой работе.

1. Рассмотрим пористое, насыщенное сжимаемой жидкостью однородное и изотропное полупространство $z \geq 0$. Будем считать, что в момент начала воздействия на проницаемой границе полупространства $z=0$ мгновенно устанавливается некоторое квазистатическое осесимметричное распределение давления $\varphi(r)$, максимальное на оси и обращающееся в нуль вне заданной окружности $r \geq a$, приложенное одновременно к твердой фазе (скелету) и к жидкости (фиг. 1):

$$\varphi(r) = \varphi_0 P(r/a) \quad (r < a), \quad \varphi(r) = 0 \quad (r > a) \quad (1.1)$$

где $P(x)$ — некоторая гладкая, монотонно убывающая функция, такая, что $P(0) = 1$ и $P(1) = 0$.

Истинное поровое давление p и полные напряжения $\sigma_{ij} = \lambda e \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} - \alpha p \delta_{ij}$, возникающие в элементе пористой среды, выражаются через функции E и S [4]:

$$\begin{aligned} \frac{p}{2\mu} &= \frac{1}{\alpha} \left(-\eta \nabla^2 E + \frac{\partial S}{\partial z} \right) \\ \frac{\sigma_{rr}}{2\mu} &= \nabla^2 E - \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + (D-2) \frac{\partial S}{\partial z} \\ \frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu} &= \nabla^2 E - \frac{\partial E}{r \partial r} + \frac{z}{r} \frac{\partial S}{\partial r} + (D-2) \frac{\partial S}{\partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = \nabla^2 E - \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} - D \frac{\partial S}{\partial z}$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{2\mu} = -\frac{\partial^2 E}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 S}{\partial r \partial z} + (1-D) \frac{\partial S}{\partial r}$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \nabla^2 \right) \nabla^2 E = 0, \quad \nabla^2 S = 0 \quad (1.2)$$

$$c = \frac{kM(\lambda+2\mu)}{\lambda+\alpha^2 M+\mu}, \quad D = \frac{\lambda+\alpha^2 M+2\mu}{\lambda+\alpha^2 M+\mu}$$

$$\kappa = \mu / [\alpha M(D-1)], \quad \eta = (\lambda+2\mu) / [2\alpha^2 M(D-1)]$$

Здесь λ, μ — коэффициенты Ламе скелета, α, M — коэффициенты, способ определения которых указан в [7], k — коэффициент фильтрации, c — коэффициент консолидации.

Если жидкость несжимаема ($\alpha=1, M=\infty$), то $c=k(\lambda+2\mu), D=1, \kappa=1, \eta=(\lambda+2\mu)/2\mu$.

Будем искать решение, убывающее на бесконечности, удовлетворяющее граничным условиям при $z=0$

$$p = \varphi(r), \quad \sigma_{zz} = -\varphi(r), \quad \sigma_{rz} = 0 \quad (1.3)$$

и начальному условию $p/M + \alpha e = 0$ при $t=0$, означающему, что в момент приложения воздействия объемные деформации скелета обусловлены только сжимаемостью поровой жидкости, отток поровой жидкости происходит постепенно и в начальный момент содержание ее в порах не меняется [4].

2. Перейдем к безразмерным переменным $r = ar', z = az', t = (a^2/c)t'$ (штрихи далее опускаем), тогда вместо (1.2) будем иметь уравнения $(\partial/\partial t - \nabla^2) \nabla^2 E = 0$ и $\nabla^2 S = 0$, общее решение которых после преобразования Лапласа по t и Ханкеля нулевого порядка по r можно выбрать в виде

$$E_h^* = L\{E_h\} = L\{H_0\{E(r, z, t)\}\} = A_1 \exp(-z\xi) + A_2 \exp[-z(\xi^2+s)^{1/2}]$$

$$S_h^* = B_1 \exp(-z\xi)$$

$$L\{f(t)\} = f^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad H_0\{f(r)\} = f_h(\xi) = \int_0^\infty f(r) J_0(\xi r) r dr$$

Из граничных условий (1.3) следуют три уравнения для определения постоянных A_1, A_2 и B_1 :

$$\xi A_1 + (\xi^2+s)^{1/2} A_2 - (D-1) B_1 = 0$$

$$-\xi^2 A_1 - \xi^2 A_2 + D \xi B_1 = -\Phi / (2\mu s)$$

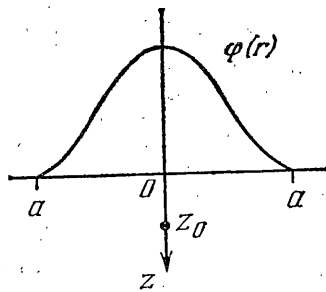
$$-\eta s A_2 - \xi B_1 = \Phi \kappa / (2\mu s), \quad \Phi(\xi) = H_0\{\varphi(r)\}$$

Полагая $s = \xi^2 \omega, \Lambda = (1+\omega)^{1/2} - (1+\eta\omega)$, находим

$$2\mu A_1 = \xi^{-4} \Phi [(1-\kappa D)(1+\omega)^{1/2} + (D-1)(\kappa+\eta\omega)] / (\omega \Lambda)$$

$$2\mu A_2 = \xi^{-4} \Phi (\kappa-1) / (\omega \Lambda)$$

$$2\mu B_1 = \xi^{-3} \Phi [\kappa+\eta\omega - \kappa(1+\omega)^{1/2}] / (\omega \Lambda)$$



Фиг. 1

Воспользовавшись формулами обращения преобразования Лапласа и Ханкеля, получим

$$\begin{aligned}
 p &= \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi \left[\left(\frac{1}{\kappa} - 1 \right) \eta e^{-\tau} (I_4 - e^{-\nu} I_5) + e^{-\nu} \right] d\xi \\
 \sigma_{rr} &= \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_4 + \eta(D-2)e^{-\nu} I_2] + (\chi - 2) e^{-\nu} \} d\xi + \\
 &+ \int_0^{\infty} \frac{K''(r, \xi)}{\xi^2} \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_3 + e^{-\nu} I_1 + \eta(D-1-y) e^{-\nu} I_2] + (\chi - 1 - y) e^{-\nu} \} d\xi \\
 &\qquad\qquad\qquad (2.1) \\
 \sigma_{\theta\theta} &= \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_4 + \eta(D-2)e^{-\nu} I_2] + (\chi - 2) e^{-\nu} \} d\xi + \\
 &+ \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{K'(r, \xi)}{\xi^2} \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_3 + e^{-\nu} I_1 + \eta(D-1-y) e^{-\nu} I_2] + (\chi - 1 - y) e^{-\nu} \} d\xi \\
 \sigma_{zz} &= \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_3 + e^{-\nu} I_1 - \eta(1+y) e^{-\nu} I_2] - (1+y) e^{-\nu} \} d\xi \\
 \sigma_{rz} &= \int_0^{\infty} \frac{K'(r, \xi)}{\xi} \Phi \{ (\kappa - 1) e^{-\tau} [I_5 - e^{-\nu} I_1 + \eta y e^{-\nu} I_2] + y e^{-\nu} \} d\xi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau &= t \xi^2, \quad y = z \xi, \quad \chi = D(2\eta - \kappa) / (2\eta - 1) \\
 K(r, \xi) &= \xi J_0(r \xi), \quad K'(r, \xi) = -\xi^2 J_1(r \xi) \\
 K''(r, \xi) &= -\xi^3 [J_0(r \xi) - J_1(r \xi) / r \xi]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= - \left(\frac{\eta - 1}{2\eta - 1} \right)^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \tau^{1/2} \right) \exp \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^2 \tau \right] + \\
 &+ \frac{1}{2\eta - 1} \left[\tau + \frac{2\eta^2 - 1}{2(2\eta - 1)} \right] \operatorname{erfc}(\tau^{1/2}) + \frac{1}{2\eta - 1} \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{1/2} \\
 I_2 &= - \frac{\eta - 1}{\eta(2\eta - 1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \tau^{1/2} \right) \exp \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^2 \tau \right] + \frac{1}{2\eta - 1} \operatorname{erfc}(\tau^{1/2}) e^{\tau} \quad (2.2) \\
 I_3 &= - \frac{\eta(\eta - 1)}{(2\eta - 1)^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \tau^{1/2} + \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^2 \tau + \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) y \right] + \\
 &+ \frac{1}{2\eta - 1} \left[\frac{1}{2} y - \tau + \frac{1}{4(2\eta - 1)} \right] \operatorname{erfc} \left(\tau^{1/2} - \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp(\tau - y) + \\
 &+ \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left(\tau^{1/2} + \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp(\tau + y) + \frac{1}{2\eta - 1} \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{y^2}{4\tau} \right) \\
 I_4 &= - \frac{\eta - 1}{\eta(2\eta - 1)} \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \tau^{1/2} + \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^2 \tau + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) y \right] + \frac{1}{2\eta - 1} \operatorname{erfc} \left(\tau^{1/2} - \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp(\tau - y) \\
 I_5 &= - \left(\frac{\eta - 1}{2\eta - 1} \right)^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \tau^{1/2} + \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp \left[\left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right)^2 \tau + \left(\frac{\eta - 1}{\eta} \right) y \right] -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\eta-1} \left[\frac{1}{2} \tilde{y}-\tau - \frac{4\eta-3}{4(2\eta-1)} \right] \operatorname{erfc} \left(\tau^{1/2} - \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp(\tau-y) + \\ + \frac{1}{4} \operatorname{erfc} \left(\tau^{1/2} + \frac{y}{2\tau^{1/2}} \right) \exp(\tau+y) - \frac{1}{2\eta-1} \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{y^2}{4\tau} \right)$$

Как будет показано ниже, основной интерес с точки зрения исследования возможности разрушения представляет стационарное решение задачи. Оно получается из (2.1), (2.2) предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ и имеет вид

$$p = \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi e^{-z\xi} d\xi, \quad \sigma_{rz} = \int_0^{\infty} K'(r, \xi) \Phi z e^{-z\xi} d\xi$$

$$\sigma_{zz} = - \int_0^{\infty} K(r, \xi) \Phi (1+z\xi) e^{-z\xi} d\xi$$

$$\sigma_{rr} = (\chi-2)p + (\chi-1)a_1 - a_2 \quad (2.3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\chi-2)p + (\chi-1)b_1 - b_2$$

$$a_i = \int_0^{\infty} \frac{K''(r, \xi)}{\xi^2} \Phi e^{-z\xi} (z\xi)^{i-1} d\xi, \quad b_i = \frac{1}{r} \int_0^{\infty} \frac{K'(r, \xi)}{\xi} \Phi e^{-z\xi} (z\xi)^{i-1} d\xi \quad (i=1, 2)$$

При этом поровое давление p и напряжения σ_{zz} , σ_{rz} не зависят от свойств скелета пористой среды и насыщающей жидкости и определяются исключительно характером распределения давления на границе полупространства. Напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ оказываются линейными функциями единственного параметра χ , характеризующего свойства насыщенной жидкостью пористой среды. Параметр χ изменяется от единицы (случай несжимаемой жидкости) до двух. Заметим, что напряжения, возникающие при приложении давления $\varphi(r)$ к поверхности упругого полупространства, также определяются соотношениями (2.3), в которых следует положить $\chi=2(1-\nu)$, где ν — коэффициент Пуассона.

3. Найденное решение задачи позволяет при наличии некоторого критерия разрушения [8] связать прочностные свойства материала и параметры распределения давления с возможностью его разрушения, а именно при заданной функции $P(x)$ указать минимальное значение φ_0 , необходимое для разрушения материала.

В данной работе, так же как и в [6], в качестве такого критерия использовался критерий Гриффитса [9], видоизмененный для случая пористой среды, насыщенной жидкостью, прочностные свойства которой зависят от эффективных напряжений $\tau_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ (т. е. той части полных напряжений, которая передается по контактам между зернами скелета) [10]. Согласно этому критерию, предполагающему наличие в упругом теле случайно ориентированных эллиптических микротрещин, если τ_{\max} и τ_{\min} — максимальное и минимальное главные эффективные напряжения ($\tau_{\max} > \tau_{\min}$) и $3\tau_{\max} + \tau_{\min} < 0$, то разрушение имеет место при

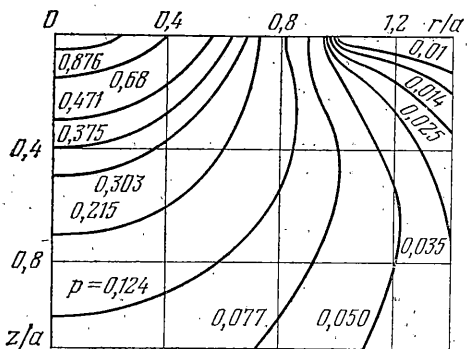
$$(\tau_{\max} - \tau_{\min})^2 + 8T_0(\tau_{\max} + \tau_{\min}) = 0 \quad (3.1)$$

если же $3\tau_{\max} + \tau_{\min} > 0$, то разрушение наступает при $\tau_{\max} = T_0$, где T_0 — прочность материала скелета на разрыв при одноосном растяжении.

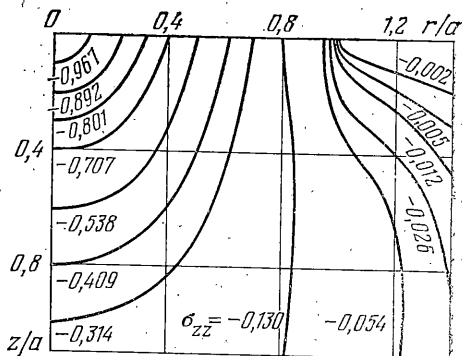
Главные эффективные напряжения находятся по формулам

$$\tau_1 = A + (B^2 + \tau_{rz}^2)^{1/2}, \quad \tau_2 = A - (B^2 + \tau_{rz}^2)^{1/2} \quad (3.2)$$

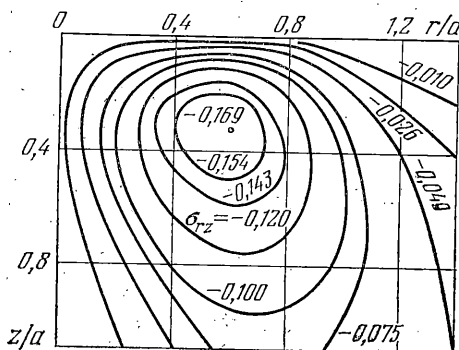
$$\tau_3 = \tau_{\theta\theta}, \quad A = 1/2(\tau_{rr} + \tau_{zz}), \quad B = 1/2(\tau_{rr} - \tau_{zz})$$



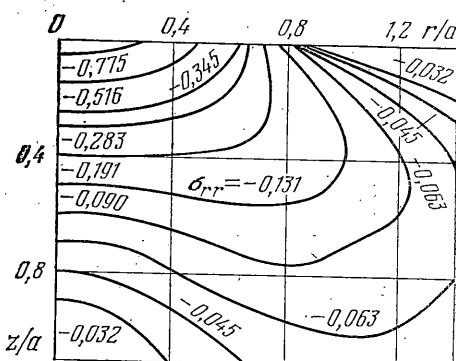
Фиг. 2



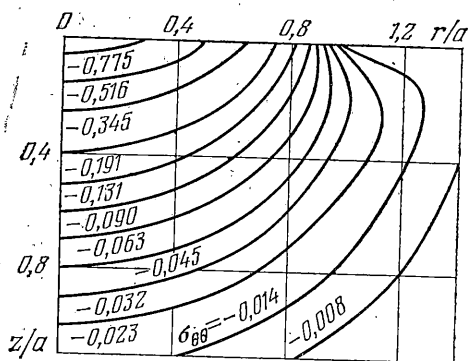
Фиг. 3



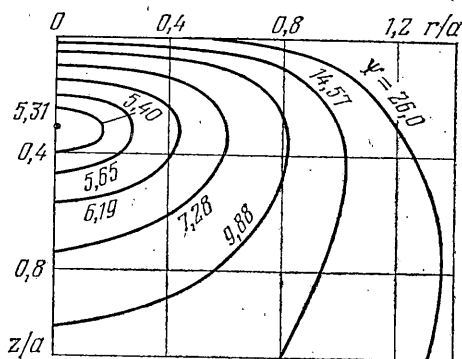
Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

4. По формулам (2.1), (2.2) и (3.1), (3.2) могут быть рассчитаны значения отношения $\Psi = \varphi_0/T_0$, при которых в некоторый момент времени в данной точке полупространства (r, z) произойдет разрушение, и построены поверхности разрушения $\Psi(r, z) = \text{const}$. При этом основной интерес представляют области начала разрушения, т. е. там, где $\Psi(r, z)$ минимальна.

Расчет показывает, что функция Ψ , определенная таким образом, убывает со временем во всех точках полупространства. Исключением является случай несжимаемой жидкости ($\kappa=1, D=1$), когда давление и напряжения оказываются не зависящими от времени и упругих постоянных скелета (среда ведет себя как упругое тело с коэффициентом Пуассона $\nu=0,5$). Характерное время нестационарных процессов, описываемых

формулами (2.1) и (2.2), оценивается величиной a^2/c и для реальных горных пород, как правило, оказывается мало. Например, для песчаника, насыщенного керосином, по данным [11] коэффициент консолидации порядка $20 \text{ м}^2/\text{с}$, поэтому при $a=0,01 \text{ м}$ величина $a^2/c=5 \text{ мкс}$, т. е. выход на стационарное решение (2.3) происходит практически мгновенно. Отсюда следует, что величина коэффициента фильтрации k при постоянных a и Ψ не должна влиять на возможность разрушения. Этот вывод хорошо согласуется с наблюдаемыми в [6] экспериментальными данными по разрушению гидромониторными струями известняка, гранита и диабазы, проницаемости которых различались на несколько порядков.

Приводимые ниже результаты получены для зависимости

$$P(x) = (1-x^2)^2 \quad (4.1)$$

близкой к использованной в [6] $P(x) = 1 - 3x^2 + 2x^3$. В этом случае $\Phi(\xi) = 8\varphi_0 J_3(\xi) \xi^{-3}$, где J_3 — функция Бесселя 1-го рода 3-го порядка.

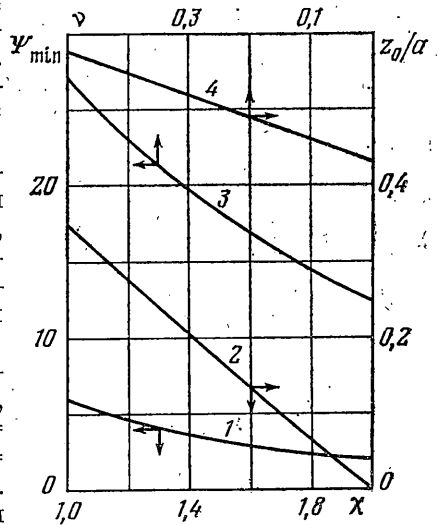
На фиг. 2-4 показаны соответственно изолинии давления p и напряжений σ_{zz} и σ_{rz} . Видно, что на оси действия давления при удалении от границы полупространства напряжение σ_{zz} убывает значительно медленнее по абсолютной величине, чем давление p . Касательное напряжение имеет минимум на окружности ($z/a \approx 0,33$, $r/a \approx 0,6$).

Если под φ_0 понимать средний скоростной напор гидромониторной струи в выходном сечении сопла [5, 6] $1/2 \rho v^2$, где ρ и v — плотность и скорость жидкости, то можно оценить минимальную величину скорости струи v , необходимой для разрушения материала.

Рассмотрим в качестве примера песчаник, насыщенный керосином [11], для которого пористость $m=0,26$, $k=0,51 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2/\text{Па} \cdot \text{с}$, $\lambda=22,2 \text{ ГПа}$, $\mu=24,5 \text{ ГПа}$, $M=44,2 \text{ ГПа}$, $\alpha=0,83$. В этом случае $\eta=3,7$, $\kappa=2,4$, $D=1,32$ и $\chi=1,1$. На фиг. 5, 6 приведены напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$. Линии уровня функции $\Psi(r, z)$ построены на фиг. 7. Таким образом, при выбранной зависимости (4.1) минимум функции Ψ достигается в некоторой внутренней точке полупространства $(0, z_0)$, находящейся на оси действия струи. При $T_0=1,18 \text{ МПа}$ и плотности керосина $\rho=800 \text{ кг/м}^3$ из условия $\Psi \geq 5,3$ получим, что скорость струи $v \geq 125 \text{ м/с}$.

Графики Ψ_{\min} (кривая 1) и координаты точки минимума z_0/a (кривая 2) во всем диапазоне изменения параметра χ приведены на фиг. 8. Максимальные значения $\Psi_{\min}=6,00$ и $z_0/a=0,35$ отвечают случаю несжимаемой жидкости. При $\chi=2$ имеем $\Psi_{\min}=2,00$ и $z_0/a=0$, т. е. разрушение начинается на границе полупространства.

Для сравнения на фиг. 8 показаны графики Ψ_{\min} (кривая 3) и z_0/a (кривая 4), соответствующие решению аналогичной задачи для упругого полупространства с законом распределения нормальных напряжений (1.1), (4.1), позволяющие оценить влияние порового давления на прочностные свойства среды (распределения напряжений и вид функции Ψ при этом качественно не меняются). Так, с увеличением коэффициента Пуассона ν от 0 до 0,5 величина Ψ_{\min} возрастает от 12,43 до 27,00 и z_0/a изменяется от 0,43 до 0,58, т. е. эффект порового давления приводит к снижению минимальной скорости «разрушающей струи» примерно в 5-6 раз и сопро-



Фиг. 8

вождается смещением области начала разрушения к поверхности полупространства.

Полученные результаты качественно не согласуются с работой [6], из которой следует существование двух локальных минимумов $\Psi(r, z)$, один из них — относительный — отвечает решению чисто упругой задачи, а другой, абсолютный, достигается на поверхности полупространства, что приводит к выводу о проявлении эффекта порового давления лишь в непосредственной близости от поверхности воздействия $z=0$.

Автор благодарит Р. В. Гольдштейна и В. М. Ентова за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Biot M. A.* General theory of three-dimensional consolidation. — *J. Appl. Phys.*, 1944, v. 12, No. 2, p. 155—165.
2. *Biot M. A.* General solutions of the equations of elasticity and consolidation for a porous material. — *J. Appl. Mech.*, 1956, v. 23, No. 4, p. 91—96.
3. *Николаевский В. Н., Васниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 335 с.
4. *Керчман В. И.* Задачи консолидации и связанной термоупругости для деформируемого полупространства. — *Изв. АН СССР. МТТ*, 1976, № 4, с. 45—54.
5. *Шавловский С. С.* Основы динамики струй при разрушении горного массива. М.: Наука, 1979. 174 с.
6. *Forman S. E., Secor G. A.* The mechanics of rock failure due to water jet impingement. — *Soc. Petrol. Eng. J.*, 1974, v. 14, No. 1, p. 10—18.
7. *Biot M. A., Willis D. G.* The elastic coefficients of the theory of consolidation. — *J. Appl. Mech.*, 1957, v. 24, No. 4, p. 594—601.
8. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения. — В кн.: *Разрушение*. Т. 2. М.: Мир, 1975, с. 336—520.
9. *Griffith A. A.* The theory of rupture. — In: *Proc. 1-st Internat. Congr. for Appl. Mech. Delft: J. Waltman, Jr.*, 1925, p. 55—63.
10. *Терцаги К.* Строительная механика грунта на основе его физических свойств. М.: Госстройиздат, 1933. 391 с.
11. *Fatt J.* The Biot-Willis elastic coefficients for a sandstone. — *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1959, v. 26, No. 2, p. 296—297.

Москва.

Поступила в редакцию
17.VII.1981