

УДК 539.3

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ О ДИСКРЕТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛАСТИНЫ И СТЕРЖНЯ

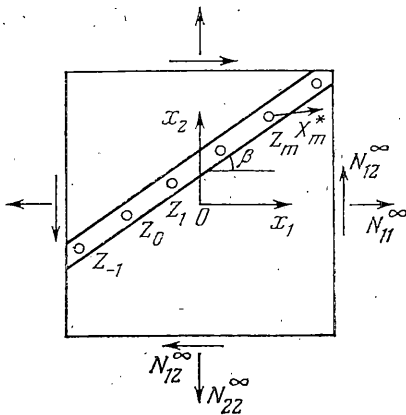
РЫБАКОВ Л. С.

Дискретное взаимодействие пластины и стержня через абсолютно жесткие связи (заклепки) изучалось в [1–6]. Достаточно полный обзор работ по контактному взаимодействию пластин и стержней содержится в [7]. В частности, в [1, 6] исследовался вопрос о влиянии на такое жесткое взаимодействие пластины и стержня однократных повреждений последнего.

В публикуемой работе излагается единый подход, позволяющий решать достаточно широкий класс плоских контактных задач о дискретном взаимодействии пластины и стержня с учетом упругости заклепок, повреждений стержня и (или) заклепок, начальных технологических несовершенств и других факторов, действие которых непосредственным образом сказывается на характере совместного деформирования пластины и стержня.

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоскую упругую систему, состоящую из неограниченной тонкой пластины и однородного стержня, скрепленных между собой одинаковыми заклепками. Стержень, наклоненный к оси абсцисс под некоторым углом β , может иметь бесконечную, полубесконечную или конечную протяженность, а центры заклепок расположены на его оси с постоянным шагом.

Будем считать, что действующие на систему внешние нагрузки представлены в пластине постоянными усилиями на бесконечности (однородным внешним полем нагрузок пластины), а в стержне — приложенными к центрам заклепок сосредоточенными силами. Фрагмент системы с бесконечным стержнем показан на фиг. 1.



Фиг. 1

Примем допущения [1, 2]: в пластине реализуется плоское напряженное состояние; стержень работает лишь на растяжение — сжатие (ослабление его за счет постановки заклепок не учитывается); заклепки в пластине имитируются жесткими круглыми включениями, скрепленными с телом пластины по поверхности их контакта (радиус заклепок мал по сравнению с их шагом); стержень взаимодействует с пластиной в ее срединной плоскости через заклепки. Последним допущением исключает-

ся из рассмотрения эксцентricность прикрепления стержня к пластине относительно ее срединной плоскости и силы трения между пластиной и стержнем.

Чтобы завершить построение модели упругой системы, доопределим характер взаимодействия ее элементов в части поведения скрепляющих их связей — заклепок. А именно примем, что каждая такая заклепка представляет собой линейно-упругую пружину, соединяющую точки оси вра-

щения заклепки, принадлежащие соответственно срединной плоскости пластины и оси стержня. Жесткость пружин считаем известной, полагая, что она всегда может быть найдена из анализа работы заклепки на изгиб и (или) сдвиг как балки, либо из упругого анализа более сложной ее модели. Взаимодействие пластины и стержня через упругодеформируемые заклепки условимся называть упругим взаимодействием. Если жесткость имитирующих заклепки пружин устремить к бесконечности, то в пределе придем к системе с абсолютно жесткими связями. Взаимодействие элементов такой системы естественно назвать жестким взаимодействием.

На характере совместного деформирования пластины и стержня могут сказываться непосредственным образом и другие факторы. Выделим среди них повреждения стержня и заклепок (полностью разрушенные их сечения) и некоторые технологические несовершенства, такие, например, как несоосность отверстий под заклепки в пластине и стержне.

Введем обозначения: ν , E — коэффициент Пуассона и модуль Юнга материала пластины, k — жесткость имитирующих заклепки пружин, A — жесткость стержня на растяжение — сжатие, h — толщина пластины, R и r — соответственно шаг и радиус заклепок. Остальные вводимые ниже символы считаются безразмерными: величины с линейной размерностью, погонные усилия в пластине, усилия в стержне и прикладываемые к центрам заклепок сосредоточенные силы отнесены соответственно к R , $Eh/(1+\nu)$, A и $8\pi EhR/(1+\nu)^2$.

Пусть x_α ($\alpha=1, 2$) — прямоугольные декартовы координаты в срединной плоскости пластины (фиг. 1), а $z=x_1+ix_2$ — комплексная переменная ($i=\sqrt{-1}$). Отделим мысленно стержень от пластины и приложим к центрам $z_m=z_0+me^{i\beta}$ заклепок в пластине и стержне пока неизвестные силы взаимодействия $X_m=X_{1m}+iX_{2m}$ и $-X_m$ соответственно. Параметр m пробегает все множество целых чисел $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, если стержень бесконечный, множество неотрицательных целых чисел $(0, 1, 2, \dots)$, если стержень полубесконечный, и конечное множество целых чисел $(0, 1, 2, \dots, n)$, если стержень конечный.

В изолированной пластине поле упругих смещений и погонных усилий определяется формулами Колосова — Мусхелишвили [8]:

$$w(z) = u_1 + iu_2 = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (1.1)$$

$$N_{11} + N_{22} = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}], \quad \kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$$

$$N_{22} - N_{11} + 2iN_{12} = 2[\overline{z}\varphi''(z) + \psi'(z)]$$

Здесь u_α — смещение вдоль оси x_α ($\alpha=1, 2$), $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta=1, 2$) — декартовы компоненты тензора погонных усилий, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — комплексные потенциалы, определяемые, вообще говоря, из решения плоской задачи теории упругости для плоскости с заданной системой жестких круглых включений. Однако малость радиуса заклепок по сравнению с их шагом (практически $\varepsilon=r/R=0,02-0,1$) позволяет учесть взаимное влияние включений в пластине асимптотически при помощи принципа суперпозиции

$$\varphi(z) = \varphi_*(z) + \sum_m \varphi_m(z), \quad \psi(z) = \psi_*(z) + \sum_m \psi_m(z) \quad (1.2)$$

$$\varphi_*(z) = \Gamma z, \quad \psi_*(z) = \Gamma' z$$

$$4\Gamma = N_{11}^\infty + N_{22}^\infty, \quad 2\Gamma' = N_{22}^\infty - N_{11}^\infty + 2iN_{12}^\infty$$

$$\varphi_m(z) = -X_m \ln(z-z_m)$$

$$\psi_m(z) = \kappa \overline{X}_m \ln(z-z_m) + X_m \left[\frac{\overline{z}_m}{z-z_m} + \frac{\varepsilon^2}{(z-z_m)^2} \right]$$

где $\varphi_*(z)$, $\psi_*(z)$ — потенциалы для плоскости без включений от однородного внешнего поля нагрузок, заданного на бесконечности компонентами

$N_{\alpha\beta}^{\infty}$ ($\alpha, \beta=1, 2$) тензора постоянных усилий, а $\varphi_m(z)$, $\psi_m(z)$ — потенциалы для плоскости с одним m -м круглым включением, к центру которого приложена сила X_m [8]; суммирование распространяется на все включения.

Статическое условие сопряжения смежных участков изолированного стержня в точке z_m имеет вид

$$X_m = X_m^* + \omega(N_m - N_{m-1})e^{i\beta},$$

$$\omega = (1+\nu)^2 A / (8\pi E h R) \quad (1.3)$$

где X_m^* — комплексный вектор внешней силы, действующей на стержень в центре заклепки m (фиг. 1), N_m — усилие в стержне на участке m (между заклепками m и $m+1$), а ω — параметр жесткости упругой системы.

При помощи соотношений $X_m e^{-i\beta} = P_m + iQ_m$, $X_m^* e^{-i\beta} = P_m^* + iQ_m^*$ введем соответственно осевые (P_m, P_m^*) и поперечные (Q_m, Q_m^*) составляющие сил X_m и X_m^* . Согласно (1.3), $Q_m = Q_m^*$, а

$$P_m = P_m^* + \omega(N_m - N_{m-1}) \quad (1.4)$$

Нетрудно видеть, что в крайних заклепках полубесконечного ($m=0$) и конечного ($m=0, n$) стержней по-прежнему $Q_0 = Q_0^*$, $Q_n = Q_n^*$, а

$$P_0 = P_0^* + \omega N_0, \quad P_n = P_n^* - \omega N_{n-1} \quad (1.5)$$

Зависимости (1.4), (1.5) позволяют выразить усилия N_m через заданные силы P_m^* и пока неизвестные осевые составляющие P_m передаваемых через заклепки реактивных сил.

Таким образом, из формул (1.1) — (1.5) следует, что и в изолированной пластине и в изолированном стержне упругое поле определено с точностью до величин P_m . Для нахождения последних требуются дополнительные соотношения.

В простейшем случае достаточно приравнять взаимные осевые смещения (смещения вдоль оси стержня) центров смежных заклепок в пластине и стержне [4–6]. Такие условия реализуются в идеализированной системе — системе с абсолютно жесткими связями, не содержащей повреждений и несовершенств. Во всех других случаях условия совместного деформирования пластины и стержня на участке m имеют вид

$$\operatorname{Re} \{ [w(z_{m+1}) - w(z_m)] e^{-i\beta} \} = N_m - \Delta_m \quad (1.6)$$

где Δ_m — несовместность взаимных осевых смещений центров заклепок m и $m+1$ в пластине и стержне. В идеализированной упругой системе $\Delta_m = 0$, а в остальных случаях Δ_m обусловлена, вообще говоря, всеми источниками несовместимости (повреждениями, несовершенствами, упругостью заклепок), присутствующими в системе на участке m и прилегающих к нему участках $m \pm 1$.

Представим совокупную несовместность на участке m в виде

$$\omega \Delta_m = \eta(P_{m+1} - P_m) + \delta_m, \quad \eta = A / (kR) \quad (1.7)$$

Первое слагаемое здесь соответствует той части несовместности, которая вызвана упругостью заклепок, а δ_m — несовместность от всех других имеющихся в системе источников.

Преобразуя левую часть соотношения (1.6) на основании формул (1.1) — (1.5), с учетом (1.7) и малости ε найдем

$$\omega \gamma + \eta(P_{m+1} - P_m) - \omega \sum_j \Gamma_{m-j} P_j = \omega N_m - \delta_m \quad (1.8)$$

$$\Gamma_0 = -\Gamma_{-1} = -1 - 2\kappa \ln \varepsilon \quad (1.9)$$

$$\Gamma_m = -\Gamma_{-m-1} = 2\kappa \ln(1+m^{-1}) \quad (m \neq 0, -1)$$

$$2\gamma = \frac{1-\nu}{1+\nu} (N_{11}^\infty + N_{22}^\infty) + (N_{11}^\infty - N_{22}^\infty) \cos 2\beta + 2N_{12}^\infty \sin 2\beta$$

Соотношения (1.4), (1.5) и (1.8) позволяют ставить задачи о дискретном упругом взаимодействии неограниченной пластины и бесконечного, полубесконечного или конечного стержня и находить их решения (искомые P_m) с точностью до величин δ_m . Такие решения будем называть общими. Покажем, как по общему решению и условию конкретной задачи находятся не определенные до сих пор величины δ_m . Прежде всего заметим, что если в системе с упругодеформируемыми заклепками отсутствуют повреждения и несовершенства, то все δ_m равны нулю. Кроме того, в общем решении следует положить $\eta=0$, если заклепки недеформируемы.

Остановимся, далее, на задачах с однократно поврежденным стержнем, разрушенным по какому-либо одному сечению. Здесь следует различать два принципиально возможных варианта.

К первому варианту отнесем задачи, в которых стержень разрушен по сечению, проходящему через центр какой-либо внутренней заклепки s , в результате чего связь стержня с этой заклепкой утрачена. В этом случае общее решение задачи будет содержать только величины δ_s и δ_{s-1} ($\delta_m=0$ при всех $m \neq s, s-1$), определяемые из условий $N_{s-1}=N_s=0$. Если стержень разрушен по крайней, например нулевой, заклепке, то единственная среди δ_m отличная от нуля величина δ_0 найдется из условия $N_0=0$.

Под вторым вариантом объединим задачи, в которых разрушенное сечение стержня располагается между заклепками, например на участке s . Предполагается при этом, что повреждение стержня не нарушает его связи с заклепками. Видно, что в рассматриваемом случае в общем решении следует сохранить лишь величину δ_s ($\delta_m=0$ при $m \neq s$), определяемую условием $N_s=0$.

Предыдущие рассуждения очевидным образом распространяются на многократно поврежденный стержень — стержень с несколькими однократно поврежденными участками. Отметим, что однократное повреждение стержня по заклепке можно трактовать как два однократных повреждения разделяемых ею участков стержня между заклепками.

Рассмотрим задачи с поврежденными заклепками. Пусть повреждена одна заклепка с номером s . Тогда взаимодействие стержня и пластины через нее исключено, а присутствующие в общем решении отличные от нуля величины δ_s и δ_{s-1} ($\delta_m=0$ при $m \neq s, s-1$) найдутся из уравнений

$$P_s=0, \quad \delta_s + \delta_{s-1}=0 \quad (1.10)$$

Первое выражает отсутствие связи пластины и стержня через заклепку s , а второе — условие их совместного деформирования на участке между заклепками $s \pm 1$.

Случай повреждения нескольких заклепок анализируется аналогично. В частности, если поврежденными оказались заклепки $s, s+1, \dots, s+q$, то в общее решение войдут лишь величины $\delta_{s-1}, \delta_s, \delta_{s+1}, \dots, \delta_{s+q}$. Для их нахождения имеем систему

$$P_m=0 \quad (m=s, s+1, \dots, s+q), \quad \sum_{m=s-1}^{s+q} \delta_m=0$$

При изучении технологических несовершенств ограничимся рассмотрением несовершенств, связанных с неточностью расположения заклепок вдоль оси стержня. Пусть α_m и β_m — известные технологические смещения соответственно в пластине и стержне центра заклепки m относительно запланированного его положения z_m . После сборки эти несовершенства вызовут на участке m несовместность

$$\delta_m = \beta_{m+1} - \beta_m - \alpha_{m+1} + \alpha_m \quad (1.11)$$

До сих пор несовместности от разных источников изучались независимо. Если в упругой системе присутствуют одновременно несколько источников, то результирующая несовместность определится как сумма несовместностей от каждого источника в отдельности.

2. Построение общего решения. При построении общего решения плоской контактной задачи о дискретном упругом взаимодействии пластины и стержня отдельно рассмотрим случаи бесконечного, полубесконечного и конечного стержня.

1. Бесконечный стержень. Согласно вышеизложенному (см. (1.4), (1.8)), искомые величины P_j и N_j ($j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются решением бесконечных систем

$$\omega\gamma + \eta(P_{j+1} - P_j) - \omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Gamma_{j-m} P_m = \omega N_j - \delta_j \quad (2.1)$$

$$P_j = P_j^* + \omega(N_j - N_{j-1}) \quad (j=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Исключая из них N_j , приходим к одной бесконечной системе с неизвестными P_j ,

$$P_j - \eta(P_{j-1} - 2P_j + P_{j+1}) + \omega \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_{j-m} P_m = P_j^* + \delta_j - \delta_{j-1} \quad (2.2)$$

$$B_0 = 2\Gamma_0 = -2(1 + 2\kappa \ln \varepsilon), \quad B_1 = B_{-1} = \Gamma_1 + \Gamma_{-1} = 1 + 2\kappa \ln 2\varepsilon \quad (2.3)$$

$$B_m = B_{-m} = \Gamma_m + \Gamma_{-m} = 2\kappa \ln(1 - m^{-2}) \quad (|m| \neq 0, 1)$$

Решение этой системы строится эффективно при помощи преобразования Лорана [9]. Действительно, рассмотрим функции

$$B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n z^n, \quad \Gamma(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Gamma_n z^n$$

являющиеся преобразованиями Лорана бесконечных последовательностей $\{B_n\}$ и $\{\Gamma_n\}$ соответственно. На комплексной плоскости они регулярны лишь в точках единичной окружности C и, согласно (1.9), (2.3), между ними существует зависимость $B(\xi) = (1 - \xi)\Gamma(\xi)$ ($\xi \in C$).

Предположим, что функции

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n z^n, \quad P^*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^* z^n, \quad \delta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_n z^n$$

регулярны по крайней мере на единичной окружности C . Для $P(z)$ это допущение оправдывается решением задачи. Что же касается функций $P^*(z)$ и $\delta(z)$, то принятые для них условия регулярности не являются ограничительными, так как практически всегда из заданного распределения сил P_n^* и несовместностей δ_n следует регулярность $P^*(z)$ и $\delta(z)$ в кольце, содержащем C .

По определению обратного преобразования Лорана

$$P_m = \frac{1}{2\pi i} \int_C P(\xi) \xi^{-m-1} d\xi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.4)$$

Аналогичные соотношения имеют место для пар P_m^* , $P^*(z)$ и δ_m , $\delta(z)$. Заметим, что в (2.4) и ниже интегрирование по контуру C осуществляется против часовой стрелки.

При помощи соотношений типа (2.4) система (2.2) приводится к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c [G(\xi)P(\xi) - P^*(\xi) - (1-\xi)\delta(\xi)] \xi^{-m-1} d\xi = 0 \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Отсюда находим

$$P(\xi) = [P^*(\xi) + (1-\xi)\delta(\xi)]/G(\xi) \quad (\xi \in C) \quad (2.5)$$

$$G(\xi) = 1 - \eta(\xi - 2 + \xi^{-1}) + \omega B(\xi) = 1 - \eta \frac{(1-\xi)^2}{\xi} + \omega(1-\xi)\Gamma(\xi) \quad (\xi \in C) \quad (2.6)$$

В частности, из (2.5) следует равенство $P(1) = P^*(1)$, отражающее равновесие бесконечного изолированного стержня.

Подставляя (2.5) в (2.4), после несложных преобразований приходим к общему решению

$$P_m = P_m^{(1)} + P_m^{(2)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad P_m^{(1)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_{m-j} P_j^*,$$

$$P_m^{(2)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (g_{m-j} - g_{m-j-1}) \delta_j \quad (2.7)$$

$$g_m = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{d\xi}{G(\xi)\xi^{m+1}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos m\sigma}{g(\sigma)} d\sigma, \quad g(\sigma) = G(e^{i\sigma}) =$$

$$= 1 + 2(1 - \cos \sigma) [\eta - \omega(1 + 2\kappa \ln 2\varepsilon)] + 4\omega\kappa \sum_{n=2}^{\infty} \ln(1 - n^{-2}) (\cos n\sigma - 1)$$

Найдем теперь усилия N_m . При помощи соотношений типа (2.4) и формул (2.5), (2.6) первой системе (2.1) можно придать вид

$$\omega N_m = \omega\gamma - \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{P(\xi) - P^*(\xi)}{(\xi-1)\xi^{m+1}} d\xi \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{P(\xi) d\xi}{(\xi-1)\xi^{m+1}} = \frac{P(1)}{2} - \sum_{n=-\infty}^m P_n \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

и аналогичное соотношение справедливо для функции $P^*(z)$. В результате получим

$$\omega N_m = \omega\gamma + \sum_{n=-\infty}^m (P_n - P_n^*) \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Подставляя сюда (2.7), окончательно найдем

$$N_m = N_m^{(1)} + N_m^{(2)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.8)$$

$$N_m^{(1)} = \gamma + \frac{1}{\omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n^* \sum_{j=-\infty}^{m-n} g_j - \sum_{j=-\infty}^m P_j^* \right], \quad N_m^{(2)} = \frac{1}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_{m-n} \delta_n$$

Из формул (2.7), (2.8) видно, что величины P_m и N_m представлены суммами двух слагаемых. Первые из них $P_m^{(1)}$, $N_m^{(1)}$ обусловлены действием

внешних нагрузок, а вторые $P_m^{(2)}$, $N_m^{(2)}$ учитывают влияние различных источников несовместности на дискретное упругое взаимодействие неограниченной пластины и бесконечного стержня.

2. *Полубесконечный стержень.* В этом случае для нахождения искомых величин P_m и N_m ($m=0, 1, 2, \dots$) имеем систему (см. (1.4), (1.5), (1.8))

$$\omega\gamma + \eta(P_{j+1} - P_j) - \omega \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{j-m} P_m = \omega N_j - \delta_j \quad (j=0, 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

$$P_0 = P_0^* + \omega N_0, \quad P_j = P_j^* + \omega(N_j - N_{j-1}) \quad (j=1, 2, \dots)$$

Принимая, как и ранее, за основные неизвестные силы P_j , после исключения N_j приходим к полубесконечной системе

$$(1 + \eta)P_0 - \eta P_1 + \omega \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_{-m} P_m = P_0^* + \omega\gamma + \delta_0 \quad (2.10)$$

$$P_j - \eta(P_{j-1} - 2P_j + P_{j+1}) + \omega \sum_{m=0}^{\infty} B_{j-m} P_m = P_j^* + \delta_j - \delta_{j-1} \quad (j=1, 2, \dots) \quad (2.11)$$

При построении общего решения этой системы воспользуемся методом, изложенным в [10]. Пусть полубесконечная последовательность $\{P_m\}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) является частью бесконечной последовательности $\{P_m\}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), все элементы которой, отвечающие отрицательным значениям индекса m , тождественно равны нулю. Функцию $P^+(z) = \sum P_m z^m$ ($m=0, 1, 2, \dots$), являющуюся преобразованием Лорана только что определенной бесконечной последовательности $\{P_m\}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), естественно назвать преобразованием Тейлора полубесконечной последовательности $\{P_m\}$ ($m=0, 1, 2, \dots$). Обозначим через D_+ и D_- области на комплексной плоскости, заключенные соответственно внутри и вне единичной окружности C . Предположим, что функция $P^+(z)$ регулярна в области $D_+ + C$. Это предположение оправдывается в дальнейшем построенным решением.

По определению обратного преобразования Тейлора

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C P^+(\zeta) \zeta^{-m-1} d\zeta = \begin{cases} P_m, & \text{если } m=0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{если } m=-1, -2, \dots \end{cases} \quad (2.12)$$

Аналогичные рассуждения имеют место и в отношении полубесконечных последовательностей $\{P_m^*\}$, $\{\delta_m\}$ ($m=0, 1, 2, \dots$) и их образов Тейлора $P^{*+}(z)$, $\delta^+(z)$. Допущение о регулярности последних в области $D_+ + C$ не является ограничительным, так как практически всегда из заданного закона распределения внешних сил P_m^* и несовместностей δ_m вытекает регулярность функций $P^{*+}(z)$ и $\delta^+(z)$ в области, содержащей $D_+ + C$.

Соотношения типа (2.12) позволяют привести систему (2.11) к виду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C [G(\zeta)P^+(\zeta) - P^{*+}(\zeta) - (1-\zeta)\delta^+(\zeta)] \zeta^{-m-1} d\zeta = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \quad (2.13)$$

Отсюда приходим к выводу, что искомая функция $P^+(z)$ — часть кусочно-голоморфной функции $P(z) = P^+(z)$ при $z \in D_+$, $P(z) = P^-(z)$ при $z \in D_-$, являющейся решением краевой задачи Римана — Гильберта

$$P^-(\zeta) = G(\zeta)P^+(\zeta) - P^{*+}(\zeta) - (1-\zeta)\delta^+(\zeta) \quad (\zeta \in C) \quad (2.14)$$

причем, согласно (2.13), пока неизвестная постоянная $P^-(\infty)$, вообще говоря, отлична от нуля.

Заметим, что $G(\zeta)$ на единичной окружности принимает действительные значения и потому допускает факторизацию [9]:

$$G(\zeta) = G^-(\zeta)/G^+(\zeta) \quad (\zeta \in C) \quad (2.15)$$

$$G^\pm(z) = \exp[-F^\pm(z)], \quad F^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (z \in D_\pm)$$

позволяющую найти решение задачи (2.14) в виде

$$P^\pm(z) = G^\pm(z) [P^-(\infty) + p^{*\pm}(z) + d^\pm(z)] \quad (z \in D_\pm)$$

$$p^{*\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{P^{*\pm}(\zeta) d\zeta}{G^\pm(\zeta)(\zeta - z)}, \quad d^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{(1-\zeta)\delta^\pm(\zeta)}{G^\pm(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta \quad (z \in D_\pm)$$

Найдем теперь постоянную $P^-(\infty)$. С этой целью рассмотрим неиспользованное уравнение (2.10). Соотношения типа (2.12) и формулы (2.6), (2.14) позволяют привести его к равенству $P^+(1) = P^{*+}(1) + \omega\gamma$, отражающему равновесие полубесконечного изолированного стержня. Раскрывая его левую часть с помощью формул Сохоцкого для функции $P^+(z)$, найдем $P^-(\infty) = \omega\gamma/G^+(1) - p^{*-}(1) - d^-(1)$.

Итак, окончательно

$$P^+(z) = G^+(z) [\omega\gamma/G^+(1) + p^{*+}(z) - p^{*-}(1) + d^+(z) - d^-(1)] \quad (z \in D_+) \quad (2.16)$$

Формулы (2.15) дают возможность получить следующие зависимости:

$$F^\pm(z) = \frac{1 \pm 1}{2} F_0 \pm \sum_{m=1}^{\infty} F_m z^{\pm m} \quad (z \in D_\pm)$$

$$F_m = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\ln G(\zeta)}{\zeta^{m+1}} d\zeta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \ln g(\sigma) \cos m\sigma d\sigma \quad (m=0,1,2,\dots)$$

$$G^+(z) = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^+ z^m \quad (z \in D_+), \quad [G^-(z)]^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} g_m^- z^{-m} \quad (z \in D_-)$$

$$G_m^+ = G_0^+ g_m^- \quad (m=0,1,2,\dots), \quad g_0^- = 1, \quad g_m^- = -\frac{1}{m} \sum_{n=1}^m n g_{m-n}^- F_n \quad (m=1,2,\dots)$$

$$F^+(z) + F^-(z^{-1}) = F_0, \quad G^+(z)G^-(z^{-1}) = G_0^+ = e^{-F_0} \quad (z \in D_\pm)$$

$$2F^+(1) = 2F^-(1) = F_0, \quad G^+(1) = G^-(1) = \sqrt{G_0^+}$$

С их помощью из (2.16) находим искомые величины

$$P_n = P^{+(n)}(0)/n! = P_n^{(1)} + P_n^{(2)} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (2.17)$$

$$\frac{P_n^{(1)}}{G_0^+} = \left(\frac{\omega\gamma}{\sqrt{G_0^+}} + \sum_{m=0}^{\infty} g_m^- \sum_{j=0}^m P_j^* \right) g_n^- + \sum_{m=1}^n g_{n-m}^- \sum_{j=m}^{\infty} g_{j-m}^- P_j^*$$

$$\frac{P_n^{(2)}}{G_0^+} = g_n^- \sum_{m=0}^{\infty} g_m^- \delta_m + \sum_{m=1}^n g_{n-m}^- \sum_{j=m}^{\infty} g_{j-m}^- (\delta_j - \delta_{j-1})$$

Здесь, как обычно, сумма считается равной нулю, если ее верхний предел оказывается меньше нижнего.

Согласно (2.9), усилия N_n определяются по найденным P_n в соответствии с формулой

$$N_n = N_n^{(1)} + N_n^{(2)} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.18)$$

$$N_n^{(1)} = \frac{1}{\omega} \sum_{m=0}^n (P_m^{(1)} - P_m^*), \quad N_n^{(2)} = \frac{1}{\omega} \sum_{m=0}^n P_m^{(2)}$$

Из (2.17), (2.18) следует, что передаваемые через заклепки реактивные силы P_n и усилия в стержне N_n складываются из двух частей. Первые из них $P_n^{(1)}$, $N_n^{(1)}$ обусловлены внешними нагрузками и присущи идеализированной системе с упругодеформируемыми заклепками. Величины $P_n^{(2)}$ и $N_n^{(2)}$ учитывают влияние повреждений и несовершенств на дискретное упругое взаимодействие неограниченной пластины и полубесконечного стержня.

3. Конечный стержень. Для конечного стержня задача отыскания P_m ($m=0, 1, 2, \dots, n$) и N_m ($m=0, 1, 2, \dots, n-1$) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (см. (1.4), (1.5), (1.8))

$$\omega\gamma + \eta(P_{m+1} - P_m) - \omega \sum_{j=0}^n \Gamma_{m-j} P_j = \omega N_m - \delta_m \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.19)$$

$$P_0 = P_0^* + \omega N_0, \quad P_n = P_n^* - \omega N_{n-1}$$

$$P_m = P_m^* + \omega (N_m - N_{m-1}) \quad (m=1, 2, \dots, n-1)$$

При изучении взаимодействия пластины и поврежденного стержня за основные неизвестные удобно принять усилия N_m . Исключая из (2.19) силы P_m , найдем, что для определения N_m служит система

$$(1+2\eta)N_0 - \eta N_1 + \omega \sum_{j=0}^{n-1} B_j N_j = N_0^* + \frac{\delta_0}{\omega} \quad (2.20)$$

$$-\eta N_{m-1} + (1+2\eta)N_m - \eta N_{m+1} + \omega \sum_{j=0}^{n-1} B_{m-j} N_j = N_m^* + \frac{\delta_m}{\omega} \quad (m=1, 2, \dots, n-2)$$

$$-\eta N_{n-2} + (1+2\eta)N_{n-1} + \omega \sum_{j=0}^{n-1} B_{n-j-1} N_j = N_{n-1}^* + \frac{\delta_{n-1}}{\omega}$$

$$N_m^* = \gamma + \frac{\eta}{\omega} (P_{m+1}^* - P_m^*) - \sum_{j=0}^n \Gamma_{m-j} P_j^* \quad (m=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Каждое однократное повреждение стержня между заклепками снижает порядок системы (2.20) на единицу. Действительно, если такое повреждение имеется на участке s ($0 < s < n-1$), то в системе (2.20) следует положить $N_s = 0$ и опустить уравнение s , которое, если необходимо, после нахождения N_m может быть использовано для вычисления единственной неизвестности δ_s .

При исследовании влияния поврежденных заклепок на дискретное взаимодействие пластины и стержня за основные неизвестные лучше принять силы P_m . Исключая из (2.19) усилия N_m , получим

$$(1+\eta)P_0 - \eta P_1 + \omega \sum_{j=0}^n \Gamma_{-j} P_j = P_0^* + \omega\gamma + \delta_0 \quad (2.21)$$

$$-\eta P_{m-1} + (1+2\eta)P_m - \eta P_{m+1} + \omega \sum_{j=0}^n B_{m-j} P_j = P_m^* + \delta_m - \delta_{m-1} \quad (m=1, 2, \dots, n-1)$$

$$-\eta P_{n-1} + (1+\eta)P_n + \omega \sum_{j=0}^n \Gamma_{j-n} P_j = P_n^* - \omega \gamma - \delta_{n-1}$$

Порядок этой системы $n+1$ и на единицу превосходит порядок системы (2.20). Однако каждая поврежденная заклепка снижает его на единицу. Действительно, пусть, например, повреждена заклепка s ($0 < s < n$). Тогда в системе (2.21) следует положить $P_s = 0$ и опустить уравнение s , воспользовавшись им предварительно для исключения из уравнений $s \pm 1$ несовместностей δ_s и δ_{s-1} , связанных между собой дополнительной зависимостью $\delta_s + \delta_{s-1} = 0$ (см. (1.10)). После нахождения остальных P_m эти несовместности можно вычислить из уравнения s .

При изучении технологических несовершенств несовместности δ_m — заданные величины, и в этом случае существенных преимуществ друг перед другом системы (2.20) и (2.21) не имеют.

3. Примеры. Проиллюстрируем полученные выше общие результаты на решении конкретных задач, ограничившись при этом случаем бесконечного стержня.

1. Однократное повреждение стержня между заклепками. Не теряя в общности, можно считать, что стержень разрушен по какому-то сечению участка -1 . Тогда $\delta_m = 0$ при всех $m \neq -1$ и, согласно (2.7), (2.8)

$$P_m^{(2)} = (g_{m+1} - g_m) \delta_{-1}, \quad N_m^{(2)} = g_{m+1} \delta_{-1} / \omega \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Из условия $N_{-1} = 0$ находим $\delta_{-1} = -(\omega/g_0) N_{-1}^{(1)}$ и, следовательно

$$P_m = P_m^{(1)} + \frac{g_m - g_{m+1}}{g_0} \omega N_{-1}^{(1)}, \quad N_m = N_m^{(1)} - \frac{g_{m+1}}{g_0} N_{-1}^{(1)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.1)$$

Можно показать, что

$$\omega N_{-1}^{(1)} = \omega \gamma + \frac{P^{*(+)}(1) - P^{*(-)}(1)}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_m^* \sum_{j=-m}^m g_j \quad (3.2)$$

где $P^{*(+)}(1)$ и $P^{*(-)}(1)$ — значения соответственно правильной $P^{*(+)}(z)$ и главной $P^{*(-)}(z)$ частей функции $P^*(z)$ (см. (2.5)) в точке $z=1$.

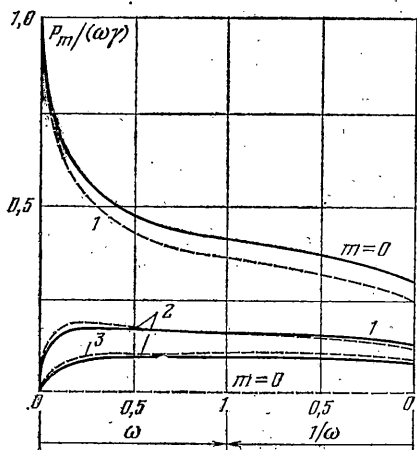
Если на упругую систему действует лишь однородное внешнее поле нагрузок пластины ($P_m^* = 0$; $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то при всех целых m (см. (2.7), (2.8))

$$P_m^{(1)} = 0, \quad N_m^{(1)} = \gamma \text{ и общее решение}$$

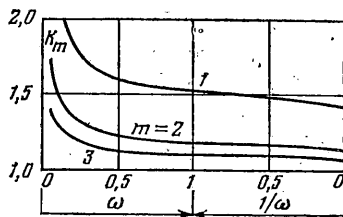
$$(3.1) \text{ принимает вид}$$

$$\begin{aligned} P_m / \omega \gamma &= (g_m - g_{m+1}) / g_0, \\ N_m / \gamma &= 1 - g_{m+1} / g_0 \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решение (3.3) симметрично относительно поврежденного пролета стержня, т. е. $P_m = -P_{-m-1}$, $N_m =$



Фиг. 2



Фиг. 3

$= N_{-m-2}$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Для случая $\eta = \beta = N_{12}^\infty = N_{22}^\infty = 0$ оно (как и формула (3.6), см. ниже) получено иначе в [1].

Некоторые результаты вычислений по первой формуле (3.3) при $\nu=1/3$, $\epsilon=0,1$ и $\eta=0$ (недеформируемые заклепки) представлены на фиг. 2, где сплошными линиями показана зависимость реактивных сил P_m от параметра жесткости упругой системы ω . Сравнивая результаты (3.3) со значениями $P_m=P_m^{(1)}=0$, $N_m=N_m^{(1)}=\gamma$ ($m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), отвечающими неповрежденной системе, приходим к очевидному заключению: повреждение стержня влечет за собой концентрацию сил P_m и снижение усилий N_m .

Общее решение задачи для стержня, поврежденного между заклепками в пролете s , можно также получить из решения (2.1). Для этого достаточно в правой его части заменить m на $m-s-1$.

2. *Однократное повреждение стержня по заклепке.* Как и ранее, без ущерба для общности будем считать, что стержень разрушен по сечению, проходящему через центр нулевой заклепки. Тогда $\delta_m=0$ при всех $m \neq -1, 0$ и в формулах (2.7), (2.8) следует принять

$$P_m^{(2)} = (g_{m+1} - g_m)\delta_{-1} + (g_m - g_{m-1})\delta_0 \quad (3.4)$$

$$N_m^{(2)} = (g_{m+1}\delta_{-1} + g_m\delta_0) / \omega \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Для определения несовместностей δ_{-1} , δ_0 имеем систему

$$\omega N_{-1} = g_0\delta_{-1} + g_1\delta_0 + \omega N_{-1}^{(1)} = 0, \quad \omega N_0 = g_1\delta_{-1} + g_0\delta_0 + \omega N_0^{(1)} = 0$$

Решая ее, с учетом (2.7), (2.8), (3.4) найдем

$$P_m = P_m^{(1)} + \frac{\omega}{g_0^2 - g_1^2} [(g_0 N_{-1}^{(1)} - g_1 N_0^{(1)}) (g_m - g_{m+1}) + (g_1 N_{-1}^{(1)} - g_0 N_0^{(1)}) (g_m - g_{m-1})] \quad (3.5)$$

$$N_m = N_m^{(1)} + \frac{g_1 g_m - g_0 g_{m+1}}{g_0^2 - g_1^2} N_{-1}^{(1)} + \frac{g_1 g_{m+1} - g_0 g_m}{g_0^2 - g_1^2} N_0^{(1)}, \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$N_0^{(1)} = N_{-1}^{(1)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m P_m^* - P_0^*$$

где $N_{-1}^{(1)}$ по-прежнему определяется формулой (3.2).

В частности, если на упругую систему действует только однородное внешнее поле нагрузок пластины, то

$$\frac{P_m}{\omega\gamma} = \frac{g_{m-1} - g_{m+1}}{g_0 + g_1}, \quad \frac{N_m}{\gamma} = 1 - \frac{g_m + g_{m+1}}{g_0 + g_1} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.6)$$

при этом имеет место условие симметрии: $P_m = -P_{-m}$, $N_m = N_{-m-1}$.

Некоторые результаты вычислений по первой формуле (3.6) при прежних значениях ν , ϵ и η показаны на фиг. 2 штриховыми линиями.

Общее решение, отвечающее повреждению стержня по заклепке s , получится из (3.5) после замены в его правой части m на $m-s$.

3. *Повреждение заклепки.* Будем считать, что повреждена нулевая заклепка. В этом случае остаются верными формулы (3.4). Однако теперь несовместности δ_{-1} и δ_0 следует отыскивать из условий (1.10) при $s=0$. В этом случае $\delta_{-1} = -\delta_0 = = 0,5P_0^{(1)} / (g_0 - g_1)$ и решение задачи принимает вид

$$P_m = P_m^{(1)} + \frac{g_{m-1} - 2g_m + g_{m+1}}{2(g_0 - g_1)} P_0^{(1)}, \quad N_m = N_m^{(1)} - \frac{g_m - g_{m+1}}{2\omega(g_0 - g_1)} P_0^{(1)} \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (3.7)$$

Если внешнее поле нагрузок пластины отсутствует и из всех P_m^* отлична от нуля лишь сила P_0^* , то

$$\frac{P_m}{P_0^*} = g_m K_m \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \frac{\omega N_m}{P_0^*} = \sum_{j=-\infty}^m g_j - \theta_m - \frac{g_m - g_{m+1}}{2(g_0 - g_1)} g_0 \quad (3.8)$$

$$\theta_m = 1 \quad (m=0, 1, 2, \dots), \quad \theta_m = 0 \quad (m=-1, -2, \dots), \quad K_m = \frac{g_0}{g_0 - g_1} \left(\frac{g_{m+1} - g_{m-1}}{2g_m} - 1 \right)$$

$$(m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Последние величины можно назвать коэффициентами концентрации сил P_m , вызванной повреждением нулевой заклепки. Их зависимость от параметра жесткости системы для тех же значений ν , ε , η и $m=1, 2, 3$ показана на фиг. 3.

Чтобы перенести результаты (3.7) на случай повреждения заклепки с номером s , достаточно в их правой части заменить m на $m-s$.

4. *Технологическое несовершенство.* В качестве примера рассмотрим случай, когда в пластине имеется одно технологическое несовершенство: центр нулевой заклепки смещен относительно запланированного его положения z_0 вдоль оси стержня на величину Δ . Постановка нулевой заклепки вызовет лишь начальные несовместности $\delta_0 = -\delta_{-1} = \Delta$ (см. (1.14)); все α_m , за исключением α_0 , равного Δ , и все β_m равны нулю). И в этом случае вновь сохраняют силу формулы (3.4), а полное решение (см. (2.7), (2.8)) принимает вид

$$P_m = P_m^{(1)} - \Delta(g_{m-1} - 2g_m + g_{m+1}), \quad N_m = N_m^{(1)} + \frac{\Delta}{\omega_j} (g_m - g_{m+1}) \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

При отсутствии внешних сил в системе возникает начальное напряженно-деформированное состояние, которое определяется следующими зависимостями: $P_m/\Delta = 2g_m - g_{m+1} - g_{m-1}$, $\omega N_m/\Delta = g_m - g_{m+1}$, где величины P_m/Δ с точностью до постоянной совпадают с величинами P_m/P_0^* из формул (3.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Budiansky B., Wu Tai Te.* Transfer of load to a sheet from a rivet-attached stiffener. — J. Math and Phys., 1961, v. 40, No. 2, p. 142—162.
2. *Рыбаков Л. С., Черепанов Г. П.* Дискретное взаимодействие пластины с полубесконечным стрингером. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 2, с. 322—328.
3. *Черепанов Г. П., Рыбаков Л. С.* К расчету клепаных панелей. — Прикл. механ., 1977, т. 13, № 8, с. 3—8.
4. *Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С., Лукашина Н. В.* О дискретном взаимодействии пластины и стержня. — Прикл. механ., 1979, т. 15, № 11, с. 82—87.
5. *Лукашина Н. В., Образцов И. Ф., Рыбаков Л. С.* Дискретное взаимодействие бесконечной пластины и полубесконечной балки. — Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 4, с. 170—177.
6. *Рыбаков Л. С.* О дискретном взаимодействии пластины и поврежденного стрингера. — ПММ, 1981, т. 45, вып. 1, с. 171—179.
7. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
10. *Фельд Я. Н.* О бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, связанных с задачами о полубесконечных периодических структурах. — Докл. АН СССР, 1955, т. 102, № 2, с. 257—260.

Москва

Поступила в редакцию
22.VI.1981