МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 539.3 : 534.1

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ВТОРОЙ ВАРИАЦИИ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧАХ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

ШАПОВАЛОВ Л. А.

Общая теория положений равновесия механических систем, энергия которых зависит от конфигурации системы и некоторого параметра, была впервые предложена А. Пуанкаре [1] при исследовании форм равновесия вращающейся жидкости; ее изложение можно найти в [2].

В [3] обращено внимание на тесную связь теории Пуанкаре с нелинейными задачами устойчивости упругих тел. Систематическое изложение теории устойчивости с общих позиций нелинейной теории упругости и теории бифуркаций дано в [4]. В работе [5] в развитие теории бифуркаций установлены аналитические признаки обмена устойчивостью в критическом состоянии системы.

Разработке теории ветвления пространственных кривых равновесия для систем с конечным числом степеней свободы посвящена работа [6]. Общая теория равновесия и устойчивости дискретных консервативных систем развита в [7]. Условия необходимости и достаточности статического критерия устойчивости и способы получения уравнений нейтрального равновесия исследованы в [8, 9].

В публикуемой работе изучается частный вопрос теории устойчивости упругих консервативных систем, связанный со структурой второй вариации энергии в критическом состоянии. На этой основе детализируется теорема Лагранжа – Дирихле [10] о безразличном равновесии системы с одной степенью свободы и устанавливается зависимость между структурой второй вариации энергии и характером особых точек кривых равновесия Пуанкаре[1].

В связи с исследованием критических состояний одномерной модели основному содержанию статьи предшествует обсуждение правомерности сведения системы с конечным числом степеней свободы к случаю, когда энергия зависит от одной переменной и параметра [1, 2]. Установлены различия критериев знакоопределенности второй вариации в полной системе переменных и в приведенной системе, которые в аналитической форме объясняют ограниченность приема сведения в теории бифуркаций.

1. При изложении общих понятий будем исходить из рассмотрения упругой дискретной системы с n степенями свободы. Будем считать, что конфигурация такой системы в деформированном состоянии задана лагранжевыми координатами u_i $(i=1,\ldots,n)$, которые представляют собой характерные перемещения, однозначно определяющие положение системы. Условимся называть u_i бифуркационными смещениями, если они отсчитываются от основного состояния, непосредственно предшествующего выпучиванию.

Пусть к данной системе приложены внешние силы P_s $(s=1,\ldots,m)$, каждая из которых пропорциональна общему параметру λ. Элементарная работа консервативных сил P_s в процессе деформирования имеет вид

$$\delta A=P_s\delta q_s=\lambda k_s\delta q_s,\quad P_s=\lambda k_s \qquad (1.1)$$

[1] См. *Шаповалов Л. А.* Структура второй вариации энергии упругих систем в задачах устойчивости и особые точки кривых равновесия Пункаре. V Всес. конф. по проблемам устойчивости в строительной механике: Тез. докл. Л.: Стройиздат, 1977, с. 19–20.

где q_s — перемещения, на которых совершают работу соответствующие им внешние силы P_s, k_s — коэффициенты пропорциональности. Переменные q_s представляют собой заданные функции лагранжевых координат u_i. Здесь и далее предполагается суммирование по дважды повторяющимся индексам.

Вводя обозначение $q=q(u_1, \ldots, u_n)=k_s q_s$, представим вариацию работы внешних сил (1.1) в форме $\delta A=\lambda\delta q$. Таким образом, пропорциональное нагружение упругой системы m консервативными силами P_s в энергетическом смысле равносильно действию на эту систему характерной силы $Q=\lambda$, совершающей работу на некотором перемещении q.

Учитывая, что в общем случае нагружения размерность переменной q не обязательно совпадает с размерностью перемещения, будем называть функцию $q(u_1, \ldots, u_n)$ обобщенным перемещением. Понятие обобщенного перемещения, связанное с энергетическим подходом к решению задач устойчивости, известно [11]. Параметр λ здесь играет роль обобщенной силы.

Обычно функция q носит вспомогательный характер и используется в качестве одного из переменных при описании кривых равновесия в нелинейных задачах устойчивости. Ниже, однако, будет показано, что понятие обобщенного перемещения имеет более широкий смысл, чем это принято считать, а его вариация $\delta q=(\partial q/\partial u_i)\delta u_i$ является существенной характеристикой, поведение которой в критическом состоянии определяет характер ветвления форм равновесия деформируемой системы.

Состояния равновесия консервативной системы могут быть найдены на основе принципа возможных перемещений

$$\delta\Pi=(\partial\Pi/\partial u_i)\delta u_i=[(\partial W/\partial u_i)-\lambda(\partial q/\partial u_i)]\delta u_i \tag{1.2}$$

где $\Pi=\Pi(u_1, \ldots, u_n, \lambda)$ — полная энергия, $W=W(u_1, \ldots, u_n)$ — потенциальная энергия деформации.

При независимых вариациях δu_i из вариационного уравнения Лагранжа (1.2) следуют уравнения равновесия

$$F_i=F_i(u_1, \ldots, u_n, \lambda)=\partial\Pi/\partial u_i=\partial W/\partial u_i-\lambda(\partial q/\partial u_i)=0 \tag{1.3}$$

совокупность которых определяет в $(n+1)$-мерном пространстве переменных u_i, λ кривую равновесия как линию пересечения семейства гиперповерхностей, отвечающих индексам $i=1, \ldots, n$ в формуле (1.3).

Характер равновесия механической системы с точки зрения его устойчивости или неустойчивости в соответствии с теоремой Лагранжа — Дирихле [10] устанавливается исследованием знакоопределенности второй вариации энергии

$$\delta^2\Pi=a_{ij}\,\delta u_i\,\delta u_j, \qquad a_{ij}=\frac{\partial^2\Pi}{\partial u_i\,\partial u_j} \quad (i, j=1,\ldots,n) \tag{1.4}$$

В состоянии безразличного равновесия (критическом состоянии), в котором квадратичная форма (1.4) полуопределена, имеет место равенство нулю определителя Гессе

$$\Delta=\det\left|\frac{\partial^2\Pi}{\partial u_i\,\partial u_j}\right|=0 \tag{1.5}$$

2. Согласно теории Пуанкаре, анализ устойчивости равновесия системы при $n\neq1$ может быть приведен к случаю, когда полная энергия зависит лишь от одной из переменных u_i и параметра λ [1, 2]. Остановимся на этом положении более подробно.

Рассмотрим, для определенности, сведение многомерной системы к переменной u_1. В этом случае в соответствии с теорией, развитой в [1, 2], для перехода к системе с одной степенью свободы необходимо разрешить $n-1$ последних уравнений равновесия (1.3) относительно координат $u_2, \ldots, u_n$ и представить потенциальную энергию $\Pi(u_1, \ldots, u_n, \lambda)$ в виде функции переменных u_1, λ. Уравнение равновесия приведенной системы находится далее, исходя из новой потенциальной функции $\Pi^\circ(u_1, \lambda) = \Pi(u_1, \ldots, u_n, \lambda)$:

$$\delta\Pi^\circ = (d\Pi/du_1)\delta u_1 = 0, \quad d\Pi^\circ/du_1 = f(u_1, \lambda) = 0 \tag{2.1}$$

Для исследования устойчивости положений равновесия приведенной системы найдем вторую вариацию полной энергии

$$\delta^2\Pi = \delta[(d\Pi^\circ/du_1)\delta u_1] = (d^2\Pi^\circ/du_1^2)\delta u_1^2 \tag{2.2}$$

Выражение для второй производной $d^2\Pi^\circ/du_1^2$ в формуле (2.2) получено в [2] дифференцированием потенциала Π° как сложной функции с учетом равенств (2.1). Удобнее, однако, вместо прямого вычисления этой производной преобразовать вторую вариацию энергии в полной системе переменных (1.4) к виду (2.2) и, таким образом, непосредственно найти искомое значение $\delta^2\Pi^\circ$. Варьируя с этой целью $n-1$ последних уравнений системы (1.3) в рамках метода возможных перемещений, имеем

$$\delta F_k = a_{kj}\delta u_j = 0 \quad {\scriptstyle (k=2,\ldots,n)} \tag{2.3}$$

Разрешая систему линейных алгебраических уравнений (2.3) относительно вариаций δu_1, найдем $\delta u_k = (A_{1k}/A_{11})\delta u_1$, где A_{11}, A_{1k} — алгебраические дополнения определителя (1.5). Данное равенство позволяет представить вторую вариацию (1.4) в форме

$$\delta^2\Pi = \left(\frac{1}{A_{11}} a_{1j}A_{1j} + \frac{A_{1k}}{A_{11}} a_{kj}A_{1j}\right)\delta u_2^1 = \delta^2\Pi^\circ \tag{2.4}$$

Учитывая основные свойства определителя (1.5), согласно которым $a_{1j}A_{1j} = \Delta$, $a_{kj}A_{1j} = 0$, из соотношения (2.4) получим

$$\delta^2\Pi^\circ = \Delta_n\Delta_{n-1}^{-1}\delta u_1^2, \quad \Delta_1 = a_{nn}, \ldots, \Delta_{n-1} = A_{11} = \partial\Delta/\partial a_{11}, \quad \Delta_n = \Delta \tag{2.5}$$

где Δ_p $(p=1,\ldots,n)$ — главные миноры, расположенные в правом нижнем углу матрицы $|a_{ij}|$. Коэффициент пропорциональности $\Delta_n\Delta_{n-1}^{-1}$ в формуле (2.5) совпадает со второй производной $d^2\Pi^\circ/du_1^2$, вычисленной в [2].

Преобразование второй вариации (1.4) к виду (2.5) с помощью зависимостей (2.3) представляет собой известный прием, применяемый для исследования знакоопределенности квадратичных форм с так называемыми связанными вариациями [12]. Случай связанных вариаций характерен для приведенных систем, получаемых в результате сведения многомерных задач к случаю $n=1$.

Условие положительной определенности второй вариации приведенной системы (2.5) имеет вид

$$\operatorname{sign}\Delta_{n-1} = \operatorname{sign}\Delta_n \tag{2.6}$$

В полной системе переменных, когда вариации лагранжевых координат квадратичной формы (1.4) являются независимыми переменными (δu_i — несвязанные вариации), условия положительной определенности второй вариации энергии выражаются в форме детерминантного критерия Сильвестра $D_p > 0$ $(p=1,\ldots,n)$, где D_p — главные миноры, расположенные в левом верхнем углу матрицы $|a_{ij}|$.

Поскольку любой главный минор матрицы $|a_{ij}|$ при надлежащей перенумерации переменных u_i можно поместить в ее левый верхний угол, для положительно-определенной квадратичной формы (1.4) справедливы следствия теоремы Сильвестра [13]:

$$\Delta_1 > 0, \ldots, \Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n > 0 \tag{2.7}$$

Из формул (2.6), (2.7) непосредственно заключаем, что условия положительной определенности квадратичных форм (1.4) и (2.5) не совпадают. Действительно, из неравенства $\delta^2\Pi > 0$, например, вытекает $\delta^2\Pi^\circ > 0$, однако обратное утверждение является неверным. Поэтому состояние приведенной системы, характеризуемое как устойчивое положение равновесия, в полной системе переменных может оказаться равновесием неустойчивым. В то же время для состояний безразличного равновесия (критических состояний) из уравнений (1.5), (2.5) следует, что каждой критической точке ($\Delta=\Delta_n=0$) в полной системе переменных отвечает критическая точка приведенной системы ($\delta^2\Pi^\circ=0$) и наоборот [14].

Различия условий знакоопределенности вторых вариаций $\delta^2\Pi$ и $\delta^2\Pi^\circ$ приводят к нарушению правил чередования устойчивых и неустойчивых положений равновесия приведенной системы, которые имеют место для дискретных механических моделей с одной степенью свободы [1, 2].

Результатам, связанным с исследованием вторых вариаций основной и приведенной систем, может быть дано геометрическое толкование. Действительно, геометрический смысл операции приведения системы $n\neq 1$ к одномерному случаю заключается в замене пространственной кривой равновесия (1.3) ее проекцией на координатную плоскость u_1, λ. При проектировании критические точки пространственной кривой (1.3), как неустранимые особенности этой кривой, сохраняются и на плоскости u_1, λ. Может измениться лишь характер особенности, если переменные u_i представляют собой нормальные координаты системы [15].

Обратное утверждение о соответствии особенностей плоской кривой критическим точкам пространственной кривой равновесия неверно, так как пересечение проекций двух кривых на плоскость не означает пересечения двух пространственных кривых. Это положение, свидетельствующее об ограниченности приема «сведения» в теории бифуркаций многомерных систем, сформулировано в [4].

Таким образом, плоское отображение кривой равновесия (1.3), наряду с действительными критическими точками, в которых вторая вариация (1.4) полуопределена и определитель Гессе полной энергии (1.5) равен нулю, может содержать и такие точки самопересечения, где условие (1.5) не удовлетворяется. В этих «ложных точках бифуркации» значения параметров u_i на различных ветвях, проходящих через точку самопересечения, не совпадают.

Вследствие неоднозначности процедуры исключения переменных $u_2, \ldots, u_n$ в ложной точке бифуркации, кривая равновесия приведенной системы в малой окрестности этой точки распадается на две пересекающиеся ветви и каждая в данной окрестности имеет знакопостоянные вторые вариации $\delta^2\Pi^{\circ(1)}\neq\delta^2\Pi^{\circ(2)}$, не равные нулю в точке пересечения.

3. Будем рассматривать далее систему с одной степенью свободы. Если эта система получена приведением к одномерному случаю (2.1), условимся исследовать ее равновесие в малой окрестности действительного критического состояния, в котором выполняются условия (1.5).

В соответствии с вариационным уравнением Лагранжа (1.2) для случая $n=1$ имеем

$$\delta\Pi=\left(\frac{dW}{du}-\lambda\frac{dq}{du}\right)\delta u=\left(\frac{dV}{dq}-\lambda\right)\delta q, \qquad \delta q=\frac{dq}{du}\delta u$$

$$\frac{dW}{du}=\frac{dV}{dq}\frac{dq}{du}, \qquad \frac{dV}{dq}=\frac{dW}{du}\left(\frac{dq}{du}\right)^{-1}=Z(u)X(q) \tag{3.1}$$

Здесь $u=u_1$, $V(q)=V[q(u)]=W(u)$ — потенциальная энергия деформации, выраженная в функции обобщенного перемещения q или бифуркационного смещения u.

Из вариационного уравнения (3.1) следует, что в силу зависимости $q=q(u)$ для случая $n=1$ допустимы две равносильные формы записи уравнения равновесия системы

$$R(u,\lambda)=\frac{dW}{du}-\lambda\frac{dq}{du}=0, \qquad S(q,\lambda)=\frac{dV}{dq}-\lambda=0 \tag{3.2}$$

Уравнение $R(u, \lambda)=0$, рассматриваемое в теории бифуркаций, при заданной нагрузке λ имеет неоднозначное решение, изображаемое на плоскости u, λ серией кривых равновесия [1, 2]. Знак производной $\partial R/\partial u$

определяет знак второй вариации полной энергии

$$\delta^2\Pi=\delta[R(u,\ \lambda)\delta u]=(\partial R/\partial u)\,\delta u^2 \tag{3.3}$$

В соответствии с теоремой Лагранжа — Дирихле [10] выражение (3.3) позволяет различать устойчивые ($\delta^2\Pi>0$, $\partial R/\partial u>0$) и неустойчивые ($\delta^2\Pi<0$, $\partial R/\partial u<0$) ветви кривых равновесия. В состоянии безразличного (нейтрального) равновесия необходимое условие критического состояния системы $n=1$ имеет вид $\delta^2\Pi=0$.

Состояния безразличного равновесия механической системы, найденные из условия равенства нулю второй вариации энергии, могут существенно различаться между собой. Эти различия определяются взаимным расположением устойчивых и неустойчивых ветвей кривых равновесия и тесно связаны с характером особых точек функции $R(u,\ \lambda)$ [1—4].

Учитывая выражения (3.3), воспользуемся также альтернативной формой представления второй вариации полной энергии, отвечающей варьированию энергии по обобщенному перемещению q. Из уравнений (3.1), (3.2) имеем

$$\delta^2\Pi=\delta[S(q,\ \lambda)\delta q]=\delta(dV/dq)\,\delta q \tag{3.4}$$

При вычислении второй вариации (3.5) в рамках метода возможных перемещений параметр внешней нагрузки λ не варьируется.

Рассматривая уравнение равновесия $S(q,\ \lambda)=0$ (3.2) как некоторую функциональную зависимость между переменными q и λ, формальным варьированием найдем

$$\frac{dV}{dq}=X(q)=\lambda,\qquad \delta\left(\frac{dV}{dq}\right)=\frac{dX}{dq}\delta q=\delta\lambda \tag{3.5}$$

Вариация $\delta\lambda$ (3.5), представляющая собой обозначение вариации функции $X(q)=dV/dq$, выступает здесь в качестве зависимой вариации переменной q.

Сопоставляя выражения (3.4), (3.5) и учитывая, что параметр λ представляет собой обобщенную силу, найдем

$$\delta^2\Pi=\delta Q\delta q,\qquad Q=\lambda \tag{3.6}$$

Представление второй вариации энергии в форме (3.6) позволяет трактовать теорему Лагранжа — Дирихле о безразличном равновесии для системы с одной степенью свободы как условие ортогональности вариаций векторов обобщенной силы $\Phi=Q\mathbf{e}$ и обобщенного перемещения $\varphi=q\mathbf{e}$

$$\delta^2\Pi=(\delta\Phi,\ \delta\varphi)=\delta Q\delta q \tag{3.7}$$

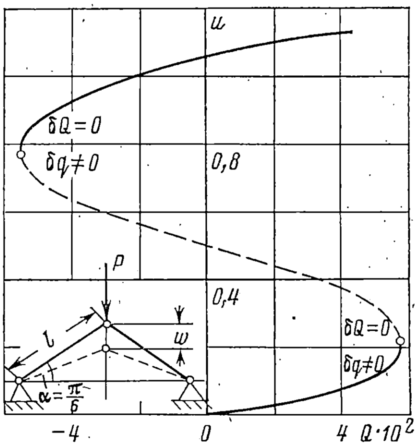
Здесь и в дальнейшем в силу формул (3.1), (3.2), (3.6) будем рассматривать обобщенную силу Q и обобщенное перемещение q как функции бифуркационного смещения u.

Уравнению в вариациях (3.7) можно удовлетворить одним из трех способов:

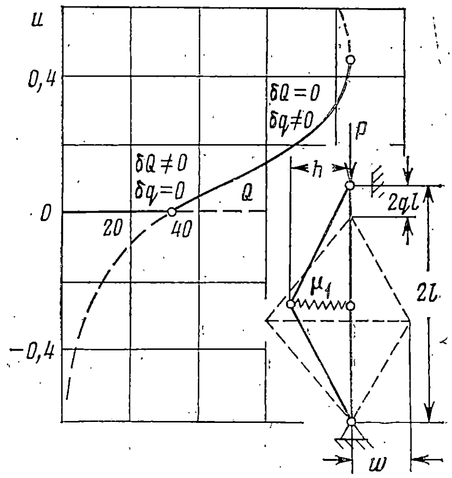
$$\delta Q=0,\quad \delta q\neq0;\quad \delta Q\neq0,\quad \delta q=0;\quad \delta Q=0,\quad \delta q=0 \tag{3.8}$$

Равенства (3.8) не противоречат представлению о функции δq в вариационном уравнении Лагранжа (3.1), как о независимой вариации. Они лишь допускают включение в класс независимых (произвольных) вариаций также и тех частных значений, когда $\delta q=0$.

4. Покажем, что каждое из трех возможных решений (3.8) уравнения (3.7) отвечает вполне определенной особой точке на кривых равновесия.



Фиг. 1



Фиг. 2

Исходя из зависимостей (3.2) при $\lambda=Q$ имеем

$$R(u,Q)=\frac{dW}{du}-Q\frac{dq}{du}=0,\qquad Q=\frac{dW}{du}\left(\frac{dq}{du}\right)^{-1}=Z(u)$$

$$\frac{du}{dQ}=-\frac{\partial R}{\partial Q}\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^{-1},\qquad \frac{\partial R}{\partial Q}=-\frac{dq}{du},\qquad \frac{\partial R}{\partial u}=\frac{dq}{du}\frac{dZ}{du}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial Q^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial Q\,\partial u}=\frac{d^2q}{du^2},\qquad \frac{\partial^2 R}{\partial u^2}=\frac{dq}{du}\frac{d^2Z}{du^2}+2\frac{d^2q}{du^2}\frac{dZ}{du}\tag{4.1}$$

Положим вначале $\delta Q=0$, $\delta q=0$. Согласно уравнениям (4.1), найдем

$$\delta Q=\frac{dZ}{du}\delta u=-\frac{\partial R}{\partial u}\left(\frac{\partial R}{\partial Q}\right)^{-1}\delta u\tag{4.2}$$

При $\delta u\neq0$, $\delta Q=0$ из соотношения (4.2) следует равенство $(\partial R/\partial u)\times\times(\partial R/\partial Q)^{-1}=0$, которое в силу формул (4.1) определяет на кривой равновесия $R(u,Q)=0$ особую точку со значением производной $(du/dQ)\to\infty$. Согласно теории Пуанкаре, особенность такого рода отвечает предельной точке кривой $R(u,Q)=0$ [1, 2].

В качестве примера механической системы, в критическом состоянии которой $\delta Q=0$, $\delta q\neq0$, приведем ферму Мизеса, нагруженную сжимающей силой P (фиг. 1). Для данного примера $Q=P/EF=(1-2u)(1-u-u^2)^{-1/2}-1+2u$, $q=u=w/l$, где EF — жесткость стержня; сплошные и штриховые линии на кривых равновесия относятся соответственно к устойчивым и неустойчивым ветвям.

Решение $\delta Q\neq0$, $\delta q=0$ с учетом зависимости $\delta q=(dq/du)\delta u$ при $\delta u\neq0$ дает $dq/du=0$. Отсюда, пользуясь равенствами (4.1), находим

$$\frac{\partial R}{\partial Q}=\frac{\partial R}{\partial u}=0,\qquad \Delta^+=\frac{\partial^2 R}{\partial Q^2}\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}-\left(\frac{\partial^2 R}{\partial Q\,\partial u}\right)^2=-\left(\frac{d^2q}{du^2}\right)^2\tag{4.3}$$

Соотношения (4.3) при $\Delta^+<0$ определяют на кривой равновесия двойную точку (точку бифуркации) [1, 2]. Угловые коэффициенты касательных k_1, k_2 в этой точке определяются при помощи равенств

$$k^2\frac{\partial^2 R}{\partial u^2}+2k\frac{\partial^2 R}{\partial Q\,\partial u}+\frac{\partial^2 R}{\partial Q^2}=0,\qquad k_1=0,\qquad k_2=\left(\frac{dZ}{du}\right)^{-1}\tag{4.4}$$

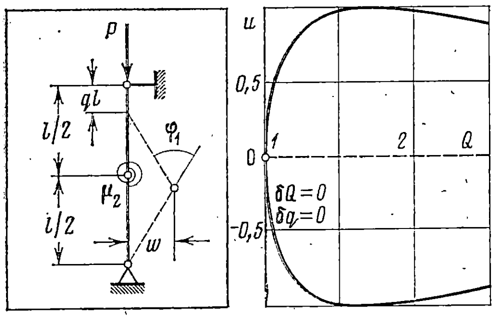
Оба угловых коэффициента имеют здесь конечные значения.

На фиг. 2 изображена дискретная система, кривые равновесия которой в качестве одной из особых точек содержат точку бифуркации при $\delta Q\neq 0$, $\delta q=0$. Система состоит из четырех абсолютно жестких стержней, сжатых силой P, и упругой пружины с жесткостью μ_1. В этом примере

$$Q=\frac{4Pl}{h\mu_1}=\frac{8(1-u^2)^{1/2}s(u)}{ur(u)},\qquad r(u)=(1+16u^2)^{1/2}$$

$$s(u)=(r\pm 4u)(r+4u-1),\qquad q=1-(1-u^2)^{1/2},\qquad u=\frac{w}{l},\qquad \frac{l}{h}=4$$

Третье из возможных решений уравнения (3.7) $\delta Q=0$, $\delta q=0$ в соответствии с формулами (3.1), (4.2) при $\delta u\neq 0$ приводит к равенствам $dq/du=0$, $dZ/du=0$ и выражению (4.3). В точке ветвления, отвечающей этому случаю, угловые коэффициенты касательных определяются формулами (4.4) и составляют $k_1=0$, $k_2\to\infty$. Данное решение определяет на кривой равновесия точку бифуркации с вертикальной касательной [1, 2].



Фиг. 3

Примером механической системы, для которой в критическом состоянии обращаются в нуль как вариация обобщенного перемещения, так и вариация обобщенной силы, может служить модель шарнирно-опертого эйлерова стержня (фиг. 3). Упругий элемент с жесткостью μ_2 препятствует взаимному повороту φ_1 абсолютно жестких половин стержня. Зависимости для обобщенных характеристик данной системы имеют вид

$$Q=\frac{Pl}{4\mu_2}=[q(2-q)]^{-1/2}\arccos(1-q),\qquad q=1-(1-u^2)^{1/2},\qquad u=\frac{2w}{l}$$

Следует указать на аналогию между условием ортогональности векторов обобщенной силы и обобщенного перемещения в критическом состоянии (3.7) и постулатом Друккера для идеально пластического материала [16].

На это сходство обратил внимание В. Л. Бидерман при обсуждении публикуемой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur l'equilibre d'une masse fluide animee d'un mouvement de rotation.— Acta math., 1885, v. 7, p. 259—380.
2. *Аппелль П.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.– М.: ОНТИ, 1936. 375 с.
3. *Джанелидзе Г. Ю.* Устойчивость равновесия нелинейно-деформируемых систем. — Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1955, № 178, с. 112—117.
4. *Болотин В. В.* Нелинейная теория упругости и устойчивость в большом. – Расчеты на прочность: Сб. статей. Вып. 3. М.: Машгиз, 1958, с. 310—354.
5. *Koiter W. T.* Elastic stability and post-buckling behaviour. — In: Proc. Sympos. Nonlinear Problems. Madison: Univ. Wisconsin Press, 1963, p. 257—275.
6. *Sewell M. J.* A general theory of equilibrium paths through critical points. Pt 1, 2. – Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1968; Pt 1, v. 306, No. 1485, p. 201—223; Pt 2, v. 306, No. 1485, p. 225—238.
7. *Thompson J. M. T.* A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems. — Z. angew. Math. and Phys., v. 20, No. 6, p. 797–846.
8. *Броуде Б. М.* Потеря устойчивости как предельное состояние. — Строит. механ. и расчет сооружений, 1970, № 6, с. 4—7.

9. *Броуде Б. М.* О варьировании уравнений равновесия. – Строит. механ. и расчет сооружений, 1973, № 5, с. 37—40.
10. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. 1. М. — Л.: Гостехиздат, 1950. 594 с.
11. *Hutchinson J. W., Koiter W. T.* Post-buckling theory. — Appl. Mech. Revs, 1970, v. 23, No. 12, p. 1353–1366.
12. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1976. 351 с.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
14. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
15. *Thompson J. M. T.* Basic principles in the general theory of elastic stability. — Mech. and Phys. Solids, 1963, v. 11, No. 1, p. 13—20.
16. *Клюшников В. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Изд-во МГУ, 1979. 207 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1981