

УДК 539.3:534.1

## УСТОЙЧИВОСТЬ ПАЛУБНЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ С БИРЕГУЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ БИМСОВ

БЕЛИНСКАЯ Е. Ш., БЕЛИНСКИЙ Б. П.

Рассматривается устойчивость палубных перекрытий, состоящих из большого числа сжатых продольных балок и бирегулярной системы поперечных балок (бимсов).

Исследование устойчивости такого рода перекрытий сводится к задаче об устойчивости балки, опертой на бирегулярную систему упругих опор. Эта задача формулируется в виде системы однородных уравнений в конечных разностях. Условие ее разрешимости дает выражение для искомых жесткостей опор.

Задача об устойчивости палубных перекрытий впервые рассматривалась И. Г. Бубновым [1] в связи с вычислением необходимой жесткости поперечных ребер, обеспечивающих устойчивость пластин. Дальнейшее развитие задача получила в [2], где использован метод Ритца. В [3] эта задача сведена к системе конечно-разностных уравнений. Во всех указанных работах предполагается, что поперечные балки одинаковы. В [4] рассмотрена устойчивость стержня, подкрепленного в пролете упругими стержнями разной длины. Исследуется вопрос о критической силе при заданном законе изменения упругости подкрепляющих стержней. Приближенное решение ищется по методу Ритца, причем удерживаются два члена ряда по некоторой ортогональной системе функций.

В публикуемой работе исследуется устойчивость перекрытия, состоящего из большого числа продольных балок, подкрепленных бирегулярной системой бимсов [5]. Система образована регулярным набором основных опор, между которыми расположено одинаковое в каждом пролете число промежуточных опор. Найдена необходимая жесткость основных опор при заданной жесткости промежуточных.

1. Рассмотрим перекрытие, состоящее из большого числа продольных балок с моментом инерции  $i$  и бирегулярной системы бимсов (фиг. 1). Число основных бимсов с моментом инерции  $I_0$  обозначим  $g$ , а число промежуточных в каждом периоде с моментом инерции  $I_1$  обозначим  $m-1$ . Устойчивость перекрытия под действием сжимающей силы  $T$  описывается следующей системой уравнений для упругой поверхности  $w(x, y)$  ( $b$  — расстояние между продольными балками,  $j$  — номер бимса):

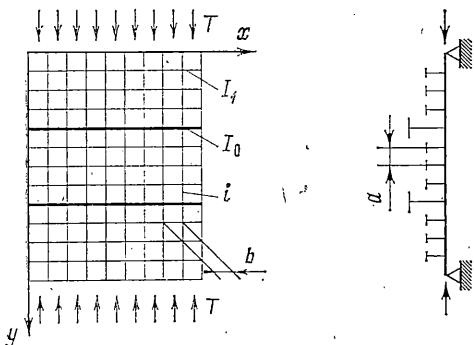
$$Ei \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + T \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$Ei \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Big|_{y_j=0}^{y_j=b} = -bEI_t \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (t=0,1)$$

Последнее уравнение описывает условие сопряжения в месте пересечения балок.

Как известно [2], поставленная задача распадается на две: задачу об устойчивости сжатого

стержня на упругих опорах и задачу об определении наименьшей частоты свободных колебаний бимса с равномерно распределенной массой. Отыс-



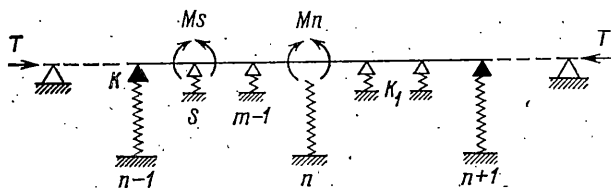
Фиг. 1

кивая решение в виде ряда по формам  $X_p(x)$  свободных колебаний балки  $w(x, y) = \sum F_p(y) X_p(x)$ , получим уравнения для коэффициентов  $F_p(y)$

$$EiF_p^{IV}(y) + TF_p''(y) = 0, \quad EiF_p'''(y) \Big|_{y_j-0}^{y_j+0} = -bEI_1 \left( \frac{\mu_p}{l} \right)^4 F_p(y) \quad (1.2)$$

При этом величина  $(\mu_p/l)^4$  пропорциональна квадрату собственной частоты для  $p$ -й формы. Значение безразмерного частотного параметра  $\mu_p$  определяется из задачи о колебаниях бимса на основании условий его закрепления.

Таким образом, задача об устойчивости перекрытия сведена к задаче об устойчивости балки, опертой на бирегулярную систему упругих опор



Фиг. 2

(фиг. 2). При этом жесткости основных и промежуточных опор задаются соотношениями

$$k = bEI_0(\mu_p/l)^4, \quad k_1 = bEI_1(\mu_p/l)^4 \quad (1.3)$$

2. Будем характеризовать состояние балки на  $s$ -й промежуточной опоре, лежащей в периоде между  $n-1$  и  $n$  основными опорами, двумерным вектором  $\tau_s$  (символ  $T$  означает транспонирование)

$$\tau_s = (Eif_s/a^2, M_s)^T \quad (1 \leq s \leq m-1) \quad (2.1)$$

Здесь  $f_s$  — просадка опоры,  $M_s$  — момент на опоре. Аналогично, для  $n$ -й основной опоры введем вектор

$$t_n = (Eif_n/a^2, M_n)^T \quad (0 \leq n \leq g+1) \quad (2.2)$$

При этом, по определению,  $\tau_0 = t_{n-1}$ ,  $\tau_m = t_n$ . Записывая условия равенства углов поворота на опорах и уравнения равновесия каждой из опор, приходим к однородной системе уравнений в конечных разностях

$$A\tau_{s-1} + B(\kappa)\tau_s + A\tau_{s+1} = 0 \quad (1 \leq s \leq m-1) \quad (2.3)$$

$$A = \begin{vmatrix} 4u^2 & 1 \\ -3/2 & \psi_2/4 \end{vmatrix}, \quad B(\kappa) = \begin{vmatrix} \kappa a^3/Ei - 8u^2 & -2 \\ 3 & \psi_1 \end{vmatrix}$$

$$\psi_1 = \frac{3(\sin 2u - 2u \cos 2u)}{4u^2 \sin 2u}, \quad \psi_2 = \frac{6(2u - \sin 2u)}{4u^2 \sin 2u}$$

$$2u = \pi \sqrt{T/T_*}, \quad T_* = \pi^2 Ei/a^2$$

Здесь  $\psi_1, \psi_2$  — функции И. Г. Бубнова [6],  $T_*$  — эйлера сила для однопролетного стержня длиной  $a$ , являющаяся верхней границей для сжимающей силы  $T$ . В случае, если система уравнений (2.3) записывается для основной опоры, следует положить  $\kappa = k$ , а для промежуточной  $\kappa = k_1$ .

Опишем схему решения поставленной задачи. Используя систему уравнений (2.3) для внутреннего периода, лежащего между  $n-1$ -й и  $n$ -й основными опорами, выразим векторы  $\tau_s$  через  $t_{n-1}$  и  $t_n$ . Применяя, далее, систему (2.3) для  $n$ -й основной опоры ( $1 \leq n \leq g$ ), придем для векторов  $t_n$  к однородной конечно-разностной системе с граничными условиями, описывающими характер закрепления продольных балок. Условие разрешимости последней даст искомое соотношение жесткостей  $k$  и  $k_1$ .

3. Исследование системы уравнений (2.3) для внутреннего периода проведем используя ее аналогию с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами [4, 5]. Будем искать частное решение в виде  $\tau_s = \varphi q^s$ . Подставляя его в систему уравнений (2.3), получим уравнение для неизвестного вектора  $\varphi$ :

$$(A/q + B(k_1) + qA)\varphi = 0 \quad (3.1)$$

Условие существования нетривиального решения последнего дает характеристическое уравнение для неизвестной величины  $q$ :

$$\det(A + qB(k_1) + q^2A) = 0 \quad (3.2)$$

Подстановка  $p = q + 1/q$  приводит уравнение четвертой степени (3.2) к квадратному

$$p^2 + \left[ -2(1 + \cos 2u) + k_1^\circ \psi_2 \frac{\sin 2u}{12u} \right] p + \frac{k_1^\circ \psi_1 \sin 2u}{3u} + 4 \cos 2u = 0, \quad k_1^\circ = \frac{k_1 a^3}{Ei} \quad (3.3)$$

Ниже при конкретных расчетах жесткость  $k_1^\circ$  выбирается из следующих соображений. Рассмотрим устойчивость одного периода конструкции, т. е. балки, подкрепленной  $m-1$  промежуточными упругими опорами жесткости  $k_1$  и свободно опертой по концам на абсолютно жесткие опоры. Пусть балка сжата силой  $T_1$ . Тогда выражение для необходимой жесткости имеет вид [2, 6]

$$k_1^\circ = \max \left\{ 16u_1^3 \frac{(\theta - \cos 2u_1)(1 - \theta)}{\theta(2u_1 - \sin 2u_1) + \sin 2u_1 - 2u_1 \cos 2u_1} \right\} \quad (3.4)$$

$$\theta = \cos(\pi j/m), \quad 2u_1 = \pi(T_1/T_*)^{1/2}$$

При рассмотрении устойчивости исходной конструкции следует ввести ограничение  $T < T_1$  или, в силу монотонности зависимости (3.4),  $u < u_1$ , так как при действии сжимающей силы  $T = T_1$  устойчивость будет потеряна уже во внутреннем периоде конструкции. Иначе говоря, уравнение (3.3) следует рассматривать на множестве  $\Omega$  значений параметров

$$\Omega = \{k_1^\circ > 0, \quad 0 < u < u_1\} \quad (3.5)$$

Первое из этих неравенств означает, что промежуточные опоры действительно участвуют в работе перекрытия.

Опишем качественно траектории корней уравнения (3.3) при изменении параметров на множестве  $\Omega$ . Траектории непрерывны. Корни  $p = -2$  и  $p \geq 2$  отсутствуют. Существует значение жесткости  $k_1^*$ , такое, что при  $k_1^\circ < k_1^*$  корни вещественные, а при  $k_1^\circ > k_1^*$  — комплексные. При  $k_1^\circ = k_1^*$  корень  $p$  двукратный. Он лежит на промежутке  $p \in (-2, 2)$ . Следовательно, если бы корень попал на множество  $\{p < -2\}$ , он при вариации параметров на  $\Omega$  не мог бы оттуда уйти. Однако асимптотическое рассмотрение при малых  $u$  показывает, что существование корня на множестве  $\{p < -2\}$  невозможно. Таким образом, корни  $p$  либо комплексно-сопряженные, либо вещественные, различные или кратные, лежащие на промежутке  $(-2, 2)$ . Отметим, что во всех доказательствах используется тот факт, что жесткость  $k_1^\circ$  выбрана согласно формуле (3.4), в частности  $k_1^\circ < 4\pi^2$ .

Рассмотрим случай комплексно-сопряженных корней  $p = \text{Re } p \pm i \text{Im } p$  уравнения (3.3). Тогда четыре корня уравнения (3.2) будут иметь вид  $q = R^{\pm 1} \exp(\pm i\alpha)$ . При этом общее решение системы уравнений (2.3) можно представить в вещественной форме

$$\tau_s = [R^s(d_1 \cos \alpha s - d_2 \sin \alpha s) + R^{-s}(d_3 \cos \alpha s + d_4 \sin \alpha s)] \text{Re } \varphi - [R^s(d_1 \sin \alpha s + d_2 \cos \alpha s) + R^{-s}(d_4 \cos \alpha s - d_3 \sin \alpha s)] \text{Im } \varphi \quad (3.6)$$

$$\operatorname{Re} \varphi = \left\| \begin{array}{c} a_{12} \operatorname{Re} p + b_{12} \\ -a_{11} \operatorname{Re} p - b_{11} \end{array} \right\|, \quad \operatorname{Im} \varphi = \left\| \begin{array}{c} a_{12} \operatorname{Im} p \\ -a_{11} \operatorname{Im} p \end{array} \right\|$$

Здесь и ниже  $a_{\alpha\beta}$ ,  $b_{\alpha\beta}$  — элементы матриц  $A$ ,  $B$ , а  $d_1, \dots, d_4$  — произвольные постоянные.

В случае различных вещественных корней  $p=p_1, p_2$  ( $|p_{1,2}| < 2$ ) получаем  $q = \exp(\pm i\alpha_1)$ ,  $\exp(\pm i\alpha_2)$ . Общее решение имеет вид

$$\tau_s = (d_1 \cos \alpha_1 s + d_2 \sin \alpha_1 s) \varphi_1 + (d_3 \cos \alpha_2 s + d_4 \sin \alpha_2 s) \varphi_2 \quad (3.7)$$

$$\varphi_\beta = \left\| \begin{array}{c} a_{12} p_\beta + b_{12} \\ -a_{11} p_\beta - b_{11} \end{array} \right\| \quad (\beta=1,2)$$

В случае кратных корней  $p=p_1=p_2$  ( $|p| < 2$ ) имеем лишь два различных корня  $q = \exp(\pm i\alpha)$  в уравнении (3.2). Общее решение имеет вид

$$\tau_s = [(d_1 \cos \alpha s + d_2 \sin \alpha s) + s(d_3 \cos \alpha s + d_4 \sin \alpha s)] \varphi + (d_4 \cos \alpha s - d_3 \sin \alpha s) \chi \quad (3.8)$$

$$\chi = \left\| \begin{array}{c} -2 \sin \alpha \frac{a_{11} b_{12} - a_{12} b_{11}}{a_{11} p + b_{11}} \\ 0 \end{array} \right\|$$

При этом вектор  $\varphi$  тот же, что и в (3.7).

4. Произвольные постоянные  $d_1, \dots, d_4$  в каждом из случаев (3.6) — (3.8) следует искать из условий на границах периода, т. е. на  $n-1$ -й и  $n$ -й основных опорах

$$\tau_0 = t_{n-1}, \quad \tau_m = t_n \quad (4.1)$$

Вектор  $\tau_s$  после определения этих постоянных выразится через векторы  $t_{n-1}$  и  $t_n$

$$\tau_s = V_s t_{n-1} + W_s t_n \quad (4.2)$$

с некоторыми матрицами  $V_s$  и  $W_s$ .

Следует отметить, что представление (4.2) основано на предположении об однозначной разрешимости системы для произвольных постоянных  $d_1, \dots, d_4$ , возникающей из условий (4.1). Это предположение имеет четкий физический смысл. В самом деле, в отсутствие однозначной разрешимости существует деформированное состояние балки  $\tau_s$  ( $0 \leq s \leq m$ ) при  $t_{n-1} = t_n = 0$ , т. е. теряет устойчивость уже внутренний период конструкции. Итак, условие обращения определителя указанной системы в нуль приводит к значению  $u = u_1$ , не принадлежащему множеству значений  $\Omega$ .

Найдем матрицы  $V_s$  и  $W_s$ . Общее решение системы (2.3) можно представить в форме (ниже везде суммирование по  $j$  от 1 до 4)  $\tau_s = \sum d_j \xi_j(s)$ , причем явное выражение для векторов  $\xi_j(s) = (\xi_{j1}(s), \xi_{j2}(s))^T$  можно найти в каждом из случаев (3.6) — (3.8). Граничные условия (4.1) приводят к системе уравнений для коэффициентов  $d_j$ :

$$\sum d_j \xi_j(0) = t_{n-1}, \quad \sum d_j \xi_j(m) = t_n \quad (4.3)$$

Введем матрицу  $M$

$$\| M_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{array}{cccc} \xi_{11}(0) & \xi_{21}(0) & \xi_{31}(0) & \xi_{41}(0) \\ \xi_{12}(0) & \xi_{22}(0) & \xi_{32}(0) & \xi_{42}(0) \\ \xi_{11}(m) & \xi_{21}(m) & \xi_{31}(m) & \xi_{41}(m) \\ \xi_{12}(m) & \xi_{22}(m) & \xi_{32}(m) & \xi_{42}(m) \end{array} \right\| \quad (4.4)$$

Тогда

$$(d_1, d_2, d_3, d_4)^T = M(t_{n-1,1}, t_{n-1,2}, t_{n,1}, t_{n,2})^T \quad (4.5)$$

$$t_{n-1} = (t_{n-1,1}, t_{n-1,2})^T, \quad t_n = (t_{n,1}, t_{n,2})^T$$

В итоге получим

$$\tau_s = \Sigma (M_{j_1 t_{n-1, 1}} + M_{j_2 t_{n-1, 2}} + M_{j_3 t_{n, 1}} + M_{j_4 t_{n, 2}}) \zeta_j(s) \quad (4.6)$$

Сравнивая последнюю формулу с представлением (4.2), найдем иско-  
мые матрицы

$$V_s = \Sigma \left\| \begin{array}{cc} M_{j_1 \zeta_{j_1}(s)} & M_{j_2 \zeta_{j_1}(s)} \\ M_{j_1 \zeta_{j_2}(s)} & M_{j_2 \zeta_{j_2}(s)} \end{array} \right\|, \quad W_s = \Sigma \left\| \begin{array}{cc} M_{j_3 \zeta_{j_1}(s)} & M_{j_4 \zeta_{j_1}(s)} \\ M_{j_3 \zeta_{j_2}(s)} & M_{j_4 \zeta_{j_2}(s)} \end{array} \right\| \quad (4.7)$$

Отметим еще соотношения ( $I$  — единичная матрица)  $V_0 = I$ ,  $V_m = 0$ ,  $W_0 = 0$ ,  $W_m = I$ ,  $V_s = W_{m-s}$ , проверка которых при численной реализации ме-  
тода служит контролем правильности формирования матриц  $V_s$  и  $W_s$ .

5. Занишем систему уравнений (2.3) для  $n$ -й основной опоры

$$A\tau_{m-1} + B(k)t_n + A\tau_1' = 0 \quad (5.1)$$

Здесь вектор  $\tau_1'$  характеризует состояние первой промежуточной опо-  
ры в пролете между  $n$ -й и  $n+1$ -й основными, причем, согласно представле-  
нию (4.2),  $\tau_1' = V_1 t_n + W_1 t_{n+1}$ . В результате приходим к следующей системе  
уравнений в конечных разностях:

$$AW_1 t_{n-1} + (2AV_1 + B(k))t_n + AW_1 t_{n+1} = 0 \quad (5.2)$$

Пусть граничными условиями для продольных балок перекрытия будут  
условия свободного опирания на абсолютно жесткие опоры  $t_0 = t_{g+1} = 0$ .  
Анализ, проведенный в п. 3, полностью применим к уравнению (5.2).  
Можно показать, что с данными граничными условиями совместимо толь-  
ко общее решение вида

$$t_n = t \sin [\pi n j / (g+1)] \quad (5.3)$$

с неизвестным вектором  $t$ . Целое число  $j$  равно числу полуволн в форме  
потери устойчивости (5.3) и меняется от 1 до  $g$ , так как при этом основные  
опоры еще участвуют в деформации [6]. Подставляя это решение в урав-  
нение (5.2), из условия существования ненулевого вектора  $t$  находим

$$\det (2AW_1 \cos [\pi j / (g+1)] + 2AV_1 + B(k)) = 0 \quad (5.4)$$

Вводя матрицу  $R$

$$\left\| \begin{array}{cc} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{array} \right\| = 2AW_1 \cos \frac{\pi j}{g+1} + 2AV_1 + \left\| \begin{array}{cc} -8u^2 & -2 \\ 3 & \psi_1 \end{array} \right\| \quad (5.5)$$

получим окончательное выражение для искомой жесткости основных опор

$$ka^3/Ei = R_{12}R_{21}/R_{22} - R_{11} \quad (5.6)$$

При большом числе  $m-1$  промежуточных опор формулы могут быть  
упрощены. Если корни уравнения (3.3) комплексные, то в задаче появ-  
ляется большой параметр  $R^m$  ( $R = |q| > 1$ ). Можно доказать, что при этом  
матрица  $W_1 = o(1)$  (основные опоры, отделенные друг от друга большим  
количеством промежуточных, мало влияют друг на друга). Уравнения  
(5.4) — (5.6) показывают, что в этом случае исчезает зависимость жест-  
кости  $k$  от числа полуволн  $j$  и числа основных опор  $g$ . Численные расчеты  
подтверждают это обстоятельство при  $m \geq 6$  с тем большей точностью, чем  
больше  $R$ .

Алгоритм расчета жесткости  $k$  сводится к следующему: выбор жест-  
кости  $k_1$ ; решение уравнения (3.3); построение общего решения (3.6) —  
(3.8); вычисление элементов матриц  $V_1$ ,  $W_1$  по формулам (4.7); вычисле-  
ние жесткости  $k$  по формуле (5.6); выбор максимальной жесткости  $k$   
в зависимости от числа полуволн  $j$ .

Описанный алгоритм реализован на языке FORTRAN-4 и требует в качестве матобеспечения операции не сложнее обращения матриц четвертого порядка.

По известной жесткости  $k$  можно по формуле (1.3) найти момент инерции  $I_0$  основных бимсов.

В таблице приводятся значения жесткости  $k^\circ = ka^3/Ei$  для числа основных опор  $g=3$ ,  $T_1/T_* = 0,9$  и  $m=3$  ( $k_1^\circ = 22,86$ ), 5 ( $k_1^\circ = 21,06$ ), 9 ( $k_1^\circ = 23,18$ ).

$T/T_*$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=2$
0,3	-3,66	-3,55	-3,51	-3,45	-3,43	-3,41	-3,62
0,4	-1,31	-1,54	-1,84	-1,52	-1,44	-1,35	-1,60
0,5	1,41	0,68	-0,11	0,61	0,81	1,02	0,65
0,6	4,61	3,19	1,73	3,02	3,42	3,82	3,24
0,7	8,52	6,11	3,70	5,96	6,69	7,38	6,41
0,8	13,56	9,75	5,91	10,27	11,59	12,49	10,79

Для  $m=9$  значения  $k^\circ$  для всех  $j$  с большой точностью одинаковы, т. е. наблюдается установление значений  $k^\circ$  независимо от  $j$ , поэтому приведены только значения для  $j=2$ , когда первое слагаемое в формуле (5.5) точно равно нулю.

Метод допускает обобщение на случай упругой заделки концов продольных балок.

Авторы благодарят А. З. Локшина за постоянное внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бубнов И. Г. Строительная механика корабля. Ч. 1. СПб.: Тип. Морск. м-ва, 1912. 330 с.
2. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Ч. 2. Л.: Судпромгиз, 1941. 960 с.
3. Курдюмов А. А. Устойчивость перекрытий, подкрепленных карленгами. - Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1953, вып. 11, с. 21-46.
4. Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений. Харьков.: Гос. научн-техн. изд-во Украины, 1936. 378 с.
5. Игнатьев В. А. Расчет регулярных статически неопределимых стержневых систем. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1979. 295 с.
6. Короткин Я. И., Постнов В. А., Сиверс Н. А. Строительная механика корабля и теория упругости. Ч. 1. Л.: Судостроение, 1968. 423 с.

Ленинград

Поступила в редакцию  
22. VI.1981