

УДК 539.3:534.1

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТЫХ ПРОДОЛЬНО ПОДКРЕПЛЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ КОНЕЧНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ С УЧЕТОМ ЛОКАЛЬНОГО ВЫПУЧИВАНИЯ РЕБЕР-ПЛАСТИН

МАНЕВИЧ А. И.

При анализе результатов испытаний подкрепленных цилиндрических оболочек [1, 2] была показана необходимость решения задачи о нелинейном взаимодействии форм выпучивания («связанном выпучивании»), причем эксперименты свидетельствовали о существенном значении взаимодействия локальных перемещений тонких ребер («местного выпучивания ребер») с общей формой выпучивания.

Постановка задачи о связанном выпучивании предполагает отказ от ряда допущений, которые явно или неявно вводились в прежних решениях нелинейной задачи для подкрепленных оболочек [3, 4]. Первое решение этой задачи для подкрепленной оболочки [5] (см. также [6]) было основано на использовании условной модели ребра, позволявшей, однако, оценить главные эффекты. В отличие от вывода о падении чувствительности к несовершенствам с увеличением жесткости ребер, вытекающего из решений нелинейной задачи без учета связанности форм [3, 4], оказалось, что и в случае сильного подкрепления чувствительность к несовершенствам резко возрастает при близости критических нагрузок общей и местной форм в линейном расчете (т. е. в области оптимальных параметров).

Задача о связанном выпучивании продольно подкрепленной цилиндрической оболочки была рассмотрена на основе общей асимптотической теории устойчивости в [7], но в этой работе не исследовались эффекты локальной деформации ребер, а местная форма (под которой понималось только выпучивание обшивки) рассчитывалась упрощенно — без учета крутильной жесткости ребер.

Решения [5–7] описывают приближенно два крайних случая: тонкие ребра при относительно толстой обшивке; тонкая обшивка при относительно толстых ребрах. Как показывает решение аналогичной задачи для подкрепленной пластины [8], для расчета связанной неустойчивости подкрепленных оболочек в области параметров, близких к оптимальным, необходимо, чтобы ребра рассматривались как пластины (в случае прямоугольного сечения) или соединения пластин (для более сложных профилей), а местные формы линейной задачи, включающие перемещения обшивки и ребер, рассчитывались весьма точно.

Такое решение, полученное в публикуемой работе, выявляет ряд существенных черт поведения оболочки, которые не могли быть обнаружены в приближенных решениях [5–7], в частности эффект резкого уменьшения чувствительности к несовершенствам при определенных параметрах оболочки, обусловленный противоположным влиянием местных перемещений обшивки и ребер на нелинейную характеристику.

Используется метод «модифицированных» местных форм, близкий к методу «модуляции форм» [9], который, в отличие от асимптотического метода [10], примененного в [7], позволяет исследовать взаимодействие форм уже в первом нелинейном приближении, так как сохраняются члены третьей степени в функционале энергии.

1. Основные уравнения. Рассматривается цилиндрическая оболочка, подкрепленная продольными ребрами, шарнирно-опертая по торцам и нагруженная осевой сжимающей силой P . Предполагается, что критические нагрузки (в линейной задаче), соответствующие общей и хотя бы одной местной форме выпучивания, близки (под местной понимается форма с периодом в окружном направлении, равным удвоенному расстоянию между стрингерами $2a$).

Как отмечалось в [8], уравнения Кармана оказываются недостаточными для ребер-пластин при учете взаимодействия форм, так как не описывают эйлерово выпучивание узкой пластины в ее плоскости. При естественном в задачах устойчивости предположении о малости удлинений и сдвигов по сравнению с единицей и умеренной малости углов поворота (квадраты углов поворота порядка относительных удлинений) принимались следующие геометрические соотношения для срединной поверхности и соотношения упругости:

$$\varepsilon_x = e_x + \frac{1}{2}(v_{,x}^2 + w_{,x}^2), \quad \chi_x = -w_{,xx} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_y = e_y + \frac{1}{2}(u_{,y}^2 + w_{,y}^2), \quad \chi_y = -w_{,yy}$$

$$\varepsilon_{xy} = e_{xy} + w_{,x}w_{,y}, \quad \chi_{xy} = -w_{,xy}$$

$$T_1 = Eh(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)/(1-\nu^2), \dots, \quad S = Gh\varepsilon_{xy}, \quad (1.2)$$

$$M_1 = D(\chi_x + \nu\chi_y), \dots, \quad H = D(1-\nu)\chi_{xy}, \quad D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$$

где e_x, e_y, e_{xy} — линейные составляющие компонентов деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ (остальные обозначения общеприняты).

Общие уравнения теории устойчивости при конечных перемещениях, полученные в [10, 11], основываются на представлении поля перемещений в виде суммы определенных форм выпучивания линейной задачи (отметим, что главные члены в уравнениях метода Бубнова и асимптотического метода совпадают). Однако задача выпучивания подкрепленной оболочки имеет специфические особенности. Из приближенного решения [5, 6] и работы [9] следует, что тенденция к появлению связанных форм должна проявляться лишь на участках оболочки с определенным направлением прогиба по общей форме ξ_1 по отношению к ребрам. Так как общее волнообразование является осциллирующим, на поверхности оболочки должны чередоваться зоны с различным характером выпучивания, а при смене знака общего прогиба характер волнообразования на каждом участке должен меняться (переход с ветви связанного выпучивания на ветвь несвязанного и наоборот). Результирующая характеристика может иметь излом при $\xi_1 = 0$, и даже при симметричности характеристики по ξ_1 начальный наклон может быть ненулевым. Очевидно, в потенциальной энергии должны быть члены третьей степени относительно перемещений и их производных (главные нелинейные члены). Аппроксимация перемещений в виде суммы линейных форм, соответствующих минимальному собственному значению и близким к нему, при которой все члены третьей степени в энергии обращаются в нуль в силу условий периодичности и симметрии [7], становится неадекватной физической картине выпучивания.

Наиболее простой способ учета специфики задачи состоит в допущении, что на части поверхности оболочки с определенным знаком общего прогиба местные выпучины не появляются (это согласуется с экспериментальными наблюдениями [1, 2]). Выведем при таком допущении уравнения главного нелинейного приближения.

Следуя [7, 10], обозначим через u, ε, σ тензорные поля перемещений, деформаций и напряжений. Считая в докритическом состоянии все силовые и деформационные факторы пропорциональными параметру нагрузки λ , обозначим соответствующие поля через $\lambda u_0, \lambda \varepsilon_0, \lambda \sigma_0$. Будем использовать правило суммирования по повторяющимся индексам. Работу поля σ

на поле перемещений ε обозначим $\sigma \varepsilon = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV$. Зададим поле перемещений

$$u = \lambda u_0 + \xi_1 u_1 + \xi_s u_s^*, \quad u_s^* = u_s \eta(\pm u_1) \quad (1.3)$$

$$\eta(x) = 1 \quad (x \geq 0), \quad \eta(x) = 0 \quad (x < 0)$$

Здесь u_i — нормированные линейные формы выпучивания, соответствующие собственным значениям λ_i , ξ_i — обобщенные амплитуды перемеще-

ний (формы нормировались условием равенства максимального перемещения толщине обшивки). Индекс 1 соответствует общей форме, остальные индексы — местным формам. Учитывая, что местные формы имеют, как правило, густой спектр, принято, что имеется n местных форм с собственными значениями λ_s , близкими к λ_1 . Повторяющийся индекс s здесь и в дальнейшем указывает на суммирование по местным формам (от 2 до $n+1$), а индекс i (а также j, k) принимает значения от 1 до $n+1$. Знак при u_i в единичной функции $\eta(\pm u_i)$ определяется в ходе решения задачи.

Для выполнения условий гладкости перемещений и усилий в узловых линиях общей формы на поле (1.3) следует наложить дополнительное поле u^{**} , которое должно иметь характер погранслоя, быстро затухающего при удалении от узлов, если длина местной формы мала по сравнению с общей. Как и в [9], здесь энергией поля u^{**} пренебрегаем (в [9] отмечено, что погрешность, возникающая вследствие пренебрежения энергией состояния типа u^{**} , имеет порядок $(L_2/L_1)^2$, где L_1 и L_2 — некоторые характерные длины волн общей и местной форм).

Записывая соотношения (1.1), (1.2) в виде $\varepsilon = l_1(u) + {}^1/2 l_2(u)$, $\sigma = H_1(\varepsilon)$, где l_1, H_1 — линейные операторы, l_2 — квадратичный оператор, можно для потенциальной энергии Π , соответствующей полю (1.3), получить следующее выражение (члены четвертой степени относительно ξ_i отброшены, что соответствует диапазону применимости представления (1.3)):

$$2\Pi = -\lambda^2 \sigma_0 e_0 + \xi_i \xi_j [\lambda \sigma_0 l_{1i}(u_i, u_j) + \sigma_i l_1(u_j)] + \xi_i \xi_j \xi_k \sigma_i l_{11}(u_j, u_k) \quad (1.4)$$

где $\sigma_i = H(\varepsilon_i)$, $l_{11}(u, v)$ — ассоциированный с $l_2(u)$ билинейный оператор, определяемый тождеством $l_2(u+v) = l_2(u) + 2l_{11}(u, v) + l_2(v)$ (звездочки при u, v здесь и далее для простоты опущены).

Будем считать, что на одной полуволне общей формы укладывается несколько местных полуволн. Тогда можно пренебречь интегралами, зависящими от нечетной степени перемещений местной формы, т. е. полагать $\sigma_i l_1(u_j) = 0$ ($i \neq j$), $\sigma_i l_{11}(u_j, u_k) = 0$, за исключением случаев, когда один из индексов равен единице, а два остальных совпадают. Вследствие периодичности общей формы в кольцевом направлении тождественно $\sigma_1 l_2(u_1) = 0$ (функционал третьей степени относительно ξ_1).

Добавляя в энергию (1.4) слагаемые, связанные с наличием начальных несовершенств по всем формам $u^0 = \xi_i^0 u_i$, в соответствии с результатами общей теории [10], из (1.4) получим

$$\Pi = a_0 + {}^1/2 a_i (1 - \lambda/\lambda_i) \xi_i^2 + {}^1/2 b_i \xi_i \xi_i^0 - a_i \xi_i \xi_i^0 \lambda/\lambda_i \quad (1.5)$$

$$a_0 = -{}^1/2 \lambda^2 \sigma_0 e_0, \quad a_i = -\lambda_i \sigma l_2(u_i), \quad b_i = \sigma_1 l_2(u_i) + 2\sigma_i l_{11}(u_1, u_i) \quad (1.6)$$

где λ_i — собственные значения линейной задачи: $\lambda_i = -\sigma_i l_1(u_i) / \sigma_0 l_2(u_i)$. Знак коэффициентов b_i зависит от выбора знака при u_i в единичной функции $\eta(\pm u_i)$ (1.3). Как следует из (1.5), этот знак должен выбираться из условия $b_i \xi_i < 0$.

Из выражения (1.5) следуют уравнения равновесия (по s суммирование не производится)

$$a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \xi_1 + \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{n+1} b_r \xi_r^2 = \frac{\lambda}{\lambda_1} a_1 \xi_1^0 \quad (1.7)$$

$$a_s (1 - \lambda/\lambda_s) \xi_s + b_s \xi_s \xi_s^0 = a_s \xi_s^0 (\lambda/\lambda_s) \quad (s=2, 3, \dots, n+1) \quad (1.8)$$

Якобиан системы (1.7), (1.8) можно записать в виде

$$I = \left[a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) - \sum_{r=2}^{n+1} \frac{b_r \xi_r^2}{a_r (1 - \lambda/\lambda_r) + b_r \xi_1} \right] \prod_{s=2}^{n+1} \left[a_s \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) + b_s \xi_1 \right]$$

Условие обращения якобиана в нуль в точках бифуркации и предельных точках приводит к следующим соотношениям:

$$a_s(1-\lambda/\lambda_s) + b_s \zeta_1 = 0 \quad (s > 1) \quad (1.9)$$

$$a_1(1-\lambda/\lambda_1) - \sum_{r=2}^{n+1} \frac{(b_r \zeta_r)^2}{a_r(1-\lambda/\lambda_r) + b_r \zeta_1} = 0 \quad (1.10)$$

Из уравнения (1.8) видно, что условие (1.9) соответствует бифуркации по s -й форме при отсутствии начальной погиби по этой форме, а условие (1.10) — предельной точке при наличии погибей.

Совокупность уравнений (1.7), (1.8), (1.10) определяет зависимость предельного значения $\lambda = \lambda_*$ от амплитуд погибей. Если наряду с общей формой учитывается лишь одна местная форма, то из этой системы можно исключить ζ_1 и ζ_2 и получить одно уравнение [8], которое удобно решать методом итераций. Таким образом, решение нелинейной задачи включает следующие этапы: определение собственных значений и собственных форм линейной задачи, нахождение коэффициентов системы уравнений (1.7), (1.8), решение этой системы.

2. Линейная задача. Решение линейной задачи устойчивости подкрепленной оболочки как системы, состоящей из обшивки и тонкостенных стержней [12], не охватывает форм пластинчатого выпучивания ребер (местное выпучивание ребер). В приведенном ниже решении ребра рассматриваются как пластины. Основным этапом в решении составляет получение точных матриц жесткости ребра-пластины и участка обшивки между ребрами, связывающих амплитудные значения перемещений и усилий линии соединения этих элементов при синусоидальном изменении радиального прогиба в продольном направлении (принимаются граничные условия шарнирного опирания; для местных форм ввиду малости длины волны граничные условия несущественны).

1. Определим матрицу жесткости криволинейной панели для местных форм выпучивания. Для участка обшивки между ребрами исходными являются уравнения устойчивости, соответствующие напряженному состоянию с большим показателем изменчивости («теория пологих оболочек»):

$$L_{h1}u + L_{h2}v + L_{h3}w = 0 \quad (h=1, 2, 3) \quad (2.1)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad L_{12} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \varphi}$$

$$L_{13} = L_{31} = -\nu \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad L_{23} = L_{32} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$L_{33} = C^2(1-\nu^2) \nabla^4 + 1 - \frac{(1-\nu^2)\sigma_x}{E} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$$

$$\xi = x/R, \quad \varphi = y/R, \quad c^2 = h^2/[12R^2(1-\nu^2)]$$

Обозначения, которые не поясняются, а также правила знаков для усилий и смещений соответствуют принятым в [13]. Начало местной системы координат для панели выбирается на торце оболочки посередине между ребрами (фиг. 1, а). Принимая $u = Ue^{s\varphi} \cos \alpha_m \xi$, $v = Ve^{s\varphi} \sin \alpha_m \xi$, $w = We^{s\varphi} \sin \alpha_m \xi$ ($\alpha_m = m\pi R/L$) и подставляя в систему (2.1), получим характеристическое уравнение

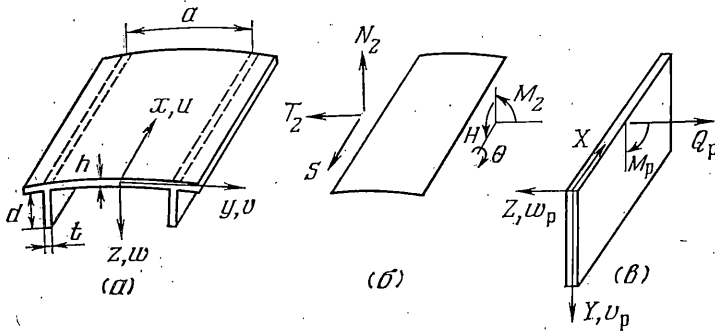
$$(\alpha_m^2 - s^2)^4 - \frac{\sigma_x \alpha_m^2}{Ec^2} (\alpha_m^2 - s^2)^2 + \frac{\alpha_m^4}{c^2} = 0$$

корни которого равны

$$s_{1-3} = \pm \left\{ \alpha_m^2 \pm \frac{\alpha_m}{c} \left[\frac{\sigma_x}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2c}{\sigma_x} \right)^2} \right) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \quad \left(\sigma_x^0 = \frac{\sigma_x}{E} \right)$$

В зависимости от величины осевого напряжения σ_x возможны два случая: $\sigma_x^\circ > 2c$ — когда четыре корня действительны, а остальные могут быть действительными либо мнимыми в зависимости от величины α_m , причем $s_{4+j} = -s_j$ ($j=1-4$), $s_{j+2}^2 - \alpha_m^2 = -(s_j^2 - \alpha_m^2)$; $\sigma_x^\circ < 2c$ — когда все корни комплексные и могут быть записаны в виде $s_{1-4} = \pm p_1 \pm iq_1$, $s_{5-8} = \pm p_2 \pm iq_2$.

Решение системы (2.1) удобно записать через потенциальную функцию Φ [13]. Симметричные и антисимметричные относительно оси x решения могут быть разделены. Далее для местных форм будем рассматривать только симметричные решения (им соответствуют, согласно расчетам в области параметров, близких к оптимальным, более низкие критические напряжения), для которых потенциальная функция $\Phi = h \sum C_k \Phi_k \sin \alpha_m \xi$. В первом случае $\Phi_k = \text{ch } s_k \varphi$ ($k=1-4$); во втором — $\Phi_k = \text{sh } p_k \varphi \sin q_k \varphi$, $\Phi_{k+2} = \text{ch } p_k \varphi \cos q_k \varphi$ ($k=1, 2$) (в первом варианте в случае мнимых корней s_3 и s_4 гиперболические функции переходят в тригонометрические).



Фиг. 1

Определяя обобщенные перемещения и усилия (фиг. 1, б) ($W, V, \theta, T_2, M_2, N_2$) $\sin \alpha_m \xi$, (U, S) $\cos \alpha_m \xi$ по потенциальной функции [13], получим выражения для вектора смещений $U(\varphi) = (U, W, V, -R\theta)^T / h$ и вектора усилий $S(\varphi) = [S, N_2, T_2, (M_2/R)]^T E h$,

$$U(\varphi) = A(\varphi)C, \quad S(\varphi) = hB(\varphi)C/R \quad (2.2)$$

где $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)^T$ — вектор произвольных постоянных, θ — угол поворота относительно оси x , индекс T обозначает транспонирование, матрицы $A = \{a_{ij}\}$ и $B = \{b_{ij}\}$ для первого варианта определяются выражениями (для случая комплексных корней матрицы не приводятся ввиду громоздкости):

$$\begin{aligned} a_{1j} &= -\alpha_m \rho_j \text{ch } s_j \varphi, & a_{2j} &= \Omega_j \text{ch } s_j \varphi, & a_{3j} &= -s_j \rho_{j+2} \text{sh } s_j \varphi, & a_{4j} &= -s_j \Omega_j \text{sh } s_j \varphi \\ b_{1j} &= -\alpha_m^3 s_j \text{sh } s_j \varphi, & b_{2j} &= c^2 s_j \tau_{j+2} \Omega_j \text{sh } s_j \varphi, & b_{3j} &= -\alpha_m^4 \text{ch } s_j \varphi, \\ & & b_{4j} &= -c^2 \Omega_j \tau_j \text{ch } s_j \varphi \\ \Omega_j &= (s_j^2 - \alpha_m^2)^2, & \rho_j &= s_j^2 + \nu \alpha_m^2, & \tau_j &= s_j^2 - \nu \alpha_m^2 \quad (j=1-4). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для местных форм в случае ребер с сечением, симметричным относительно нормали к оболочке, при рассматриваемой симметричной деформации на линии соединения обшивки и ребер (край $\varphi = \varphi_1$) равны нулю нормальные и осевые перемещения, сдвигающее и нормальное усилия

$$U = W = 0, \quad S = N_2 = 0 \quad \text{при } \varphi = \varphi_1 \quad (2.4)$$

а усилие T_2 и момент M_2 антисимметричны относительно ребра

$$T_2^+ = -T_2^-, \quad M_2^+ = -M_2^- \quad (2.5)$$

где индексы плюс и минус обозначают величины, относящиеся к концу данного участка обшивки и началу соседнего участка.

Разобьем матрицы **A** и **B** на блоки:

$$A = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{vmatrix} \quad (2.6)$$

Условия (2.4) позволяют исключить в равенствах (2.2) постоянные C_3, C_4 , а остальные постоянные выражаются через перемещения края φ_1 :

$$\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = -(A_2^{-1}A_1)_{\varphi=\varphi_1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = (A_3 - A_4A_2^{-1}A_1)_{\varphi=\varphi_1}^{-1} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} V \\ R\theta \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_1} \quad (2.7)$$

Подстановка выражений (2.7) во второе равенство (2.2) приводит к следующей матрице жесткости обшивки для местной формы:

$$\frac{1}{Eh} \begin{pmatrix} T_2 \\ M_2/R \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_1} = K_0(\varphi_1) \frac{1}{h} \begin{pmatrix} V \\ R\theta \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_1} \quad (2.8)$$

$$K_0(\varphi) = \frac{h}{R} [B_3(\varphi) - B_4(\varphi) (A_2^{-1}A_1)_{\varphi=\varphi_1}] [A_3 - A_4A_2^{-1}A_1]_{\varphi=\varphi_1}^{-1}$$

2. Определим матрицу жесткости ребра-пластины. При прогибе ребра (фиг. 1, ϵ). $w_p = W_p(\eta) \sin \alpha_m \xi$ ($\eta = y/R$), решая уравнение

$$W_p^{IV} - 2\alpha_m^2 W_p'' + \left(\alpha_m^2 - \frac{\sigma_x t R^2}{D_p} \right) \alpha_m^2 W = 0 \quad \left(D_p = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right)$$

можно выразить вектор

$$W_p = \frac{1}{h} \left(-W_p, -R\theta_p, \frac{Q_p^*}{Eq}, -\frac{M_p}{ERq} \right)^T, \quad Q_p^* = Q_p - \frac{\partial M_p}{R \partial \xi},$$

$$q = \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{R} \right)^3$$

через вектор произвольных постоянных ребра в виде

$$W_p = FC_p, \quad C_p = (C_1, C_2, C_3, C_4)^T \quad (2.9)$$

$$F = \begin{vmatrix} -\operatorname{ch} \beta_1 \eta & -\operatorname{sh} \beta_1 \eta & -\operatorname{ch} \beta_2 \eta & -\operatorname{sh} \beta_2 \eta \\ -\beta_1 \operatorname{sh} \beta_1 \eta & -\beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 \eta & -\beta_2 \operatorname{sh} \beta_2 \eta & -\beta_2 \operatorname{ch} \beta_2 \eta \\ \beta_1 \tau_2 \operatorname{sh} \beta_1 \eta & \beta_1 \tau_2 \operatorname{ch} \beta_1 \eta & \beta_2 \tau_1 \operatorname{sh} \beta_2 \eta & \beta_2 \tau_1 \operatorname{ch} \beta_2 \eta \\ \tau_1 \operatorname{ch} \beta_1 \eta & \tau_1 \operatorname{sh} \beta_1 \eta & \tau_2 \operatorname{ch} \beta_2 \eta & \tau_2 \operatorname{sh} \beta_2 \eta \end{vmatrix}$$

$$\tau_i = \beta_i - \nu \alpha_m^2 \quad (i=1, 2), \quad \beta_{1,2} = \alpha_m \pm \alpha_m \sqrt{12(1-\nu^2) \frac{\sigma_x^0}{E} (R/t)}$$

Разбивая матрицу **F** на блоки **F**₁–**F**₄ аналогично (2.6), из граничных условий свободного края (при $\eta = \eta_1 = d/R$, $Q_p^* = M_p = 0$) можно выразить постоянные C_i через перемещения края $\eta = 0$:

$$\begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = -(F_4^{-1}F_3)_{\eta=\eta_1} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = [F_1(0) - F_2(0) (F_4^{-1}F_3)_{\eta=\eta_1}]^{-1} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -W_p \\ -R\theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

и после подстановки C_i в равенства (2.9) получить матрицу жесткости ребра в виде

$$\frac{1}{Eh} \begin{pmatrix} Q_p \\ -M_p/R \end{pmatrix}_{\eta=0} = K_p(0) \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -W_p \\ -R\theta_p \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$$K_p(\eta) = q [F_3(\eta) - F_4(\eta) (F_4^{-1}F_3)_{\eta=\eta_1}] [F_1(0) - F_2(0) (F_4^{-1}F_3)_{\eta=\eta_1}]^{-1}$$

Наряду с матрицей K_p вычислялась аналогичная матрица ребра на основе стержневой схемы. Из уравнений элементарной теории изгиба и кручения стержней определялась диагональная матрица для величин, приведенных к оси стержня, а затем матрица преобразовывалась для величин, относящихся к линии соединения ребра и обшивки.

В случае ребер более сложного профиля матрица жесткости может быть получена комбинированием матриц отдельных пластин, составляющих ребро (см., например, [14]).

3. Условия сопряжения обшивки и ребер (с учетом (2.5))

$$\begin{pmatrix} -W_p \\ -R\theta_p \end{pmatrix}_{\eta=0} = \begin{pmatrix} V \\ -R\theta \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_1}, \quad \begin{pmatrix} Q_p \\ -M_p/R \end{pmatrix}_{\eta=0} = \\ = \begin{pmatrix} T_2 \\ M_2/R \end{pmatrix}^- - \begin{pmatrix} T_2 \\ M_2/R \end{pmatrix}^+ = -2 \begin{pmatrix} T_2 \\ M_2/R \end{pmatrix}^+$$

приводят после подстановки в (2.8), (2.11) к матричному уравнению

$$\|2K_0 + K_p\| \begin{pmatrix} V \\ -R\theta \end{pmatrix}_{\varphi=\varphi_1} = 0 \quad (2.12)$$

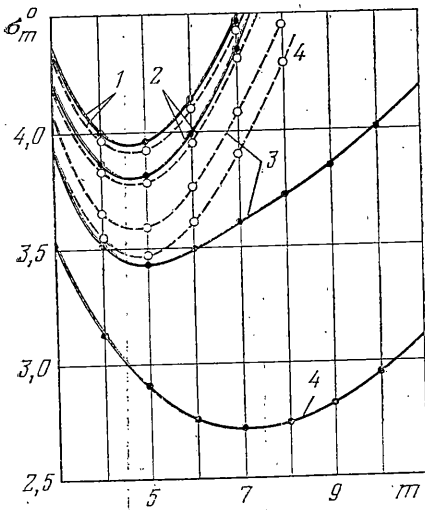
Условие равенства нулю определителя матрицы $\|2K_0 + K_p\|$ дает характеристическое уравнение для определения критических напряжений σ_x . После определения σ_x (с целочисленной минимизацией по числу продольных полуволн m) из уравнений (2.12), (2.2), (2.9) с учетом (2.7) и (2.10) определялись собственные формы.

3. Расчет общей формы и вычисление коэффициентов нелинейной системы уравнений. Ввиду относительно большой длины общей формы ребра в этом случае могут рассматриваться как стержни. Хотя точный подход, изложенный выше для местных форм, может быть распространен и на общие формы, в данной работе применялась конструктивно-ортотропная теория, которая, как показали многочисленные расчеты [15], дает результаты, практически совпадающие с данными расчета при учете дискретности стрингеров (для форм выпучивания, отличных от местных). Критические напряжения, поля перемещений и усилий в обшивке и ребрах рассчитывались по формулам [6, гл. 1].

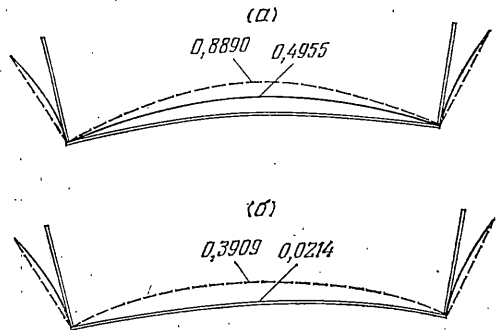
После решения линейной задачи определялись коэффициенты a_i и b_i по формулам (1.6). В интегралах, включающих перемещения или усилия местной формы, интегрирование производилось по области, охватывающей $k_c/2$ ребер (k_c — число стрингеров) и половину поверхности обшивки, для которой знак общего радиального прогиба противоположен знаку эксцентриситета ребра e (положительному при внутренних ребрах). Если при таком вычислении знак b_i оказывался отрицательным, то, как следует из формулы (1.6), именно зоны с указанным направлением общего прогиба обуславливают опасное взаимодействие общей и местной форм; при положительных нужно полагать в формуле (1.5) $\xi_1 < 0$ либо перейти к интегрированию по области с противоположным направлением общего прогиба, что приводит просто к смене знака b_i (в том случае неустойчивость закритической ветви обусловлена зонами, где общий прогиб направлен в сторону ребер (ср. [8])). Детали, относящиеся к вычислению интегралов, как и расчету общих форм, здесь опущены.

4. Численный анализ решения. В качестве основного варианта для численного анализа была выбрана оболочка с параметрами $L/R=0,5$; $R/h=300$; $k_c=60$; $\omega = td/ha=0,2$. Относительная толщина ребер t/d изменялась в интервале от 0,03 до 0,15. Расчеты проводились для внутреннего ($\text{sign } e = +1$) и внешнего ($\text{sign } e = -1$) подкреплений при использовании пластинчатой и стержневой схем ребра.

Результаты расчета собственных значений и собственных форм приводятся на фиг. 2, где построены зависимости безразмерных критических напряжений местных форм $\sigma_m^0 = \sigma_x \cdot 10^3 / E$ от числа продольных полуволн m при значениях $t/d=0,10$; 0,08; 0,06 и 0,05 (кривые 1-4). Темные точки (сплошные линии) на всех графиках соот-



Фиг. 2



Фиг. 3

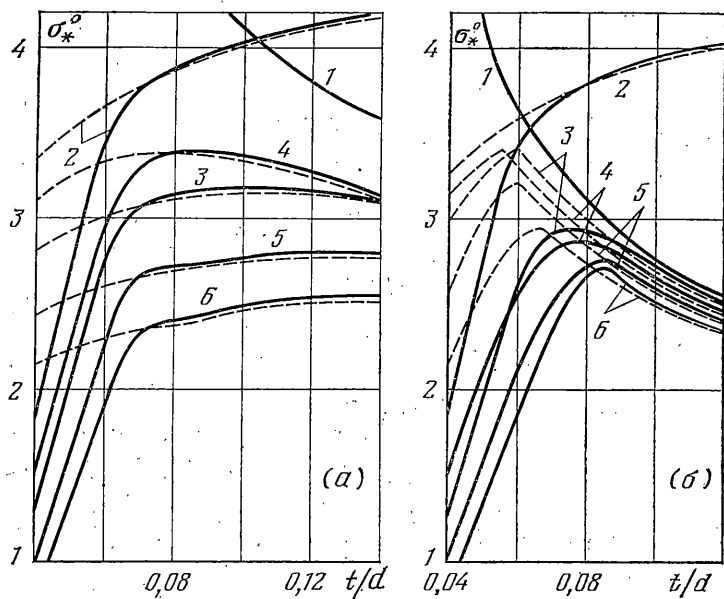
ветствуют расчёту по пластинчатой схеме, светлые точки (штриховые линии) — по стержневой. С уменьшением относительной толщины ребер спектр собственных значений становится более густым. При относительно толстых ребрах (при $t/d > 0,07$) обе расчетные схемы дают практически совпадающие значения; при более тонких ребрах уже при малых m стержневая схема приводит к завышению δ_m^0 и с увеличением m погрешность возрастает.

На фиг. 3 построены формы выпучивания для $t/d=0,06$ при $m=5$ (фиг. 3, а) и $m=12$ (фиг. 3, б) и указаны максимальные прогибы обшивки при единичном перемещении края ребра $\eta=\eta_1$. С увеличением m отношение прогибов обшивки и ребер уменьшается и при $m=12$ доходит до 0,0214. Стержневая схема (штриховые линии) для описания таких форм местного выпучивания ребра неприменима.

Результаты расчета коэффициентов нелинейной системы уравнений равновесия иллюстрируются таблицей, в которой приведены значения коэффициента $\delta_s = b_s/a_s$ (имеющего определяющее значение для чувствительности к несовершенствам [8]) при $m=3-10$ для различных значений t/d , при внешнем и внутреннем расположении ребер (первые строчки соответствуют пластинчатой, а вторые — стержневой схемам).

t/d	$m=3$	4	5	6	7	8	9	10
внешние стрингеры								
0,10	-0,0657	-0,0736	-0,0730	-0,0686	-0,0625	-0,0563	-0,0505	-0,0455
	-0,0688	-0,0778	-0,0779	-0,0737	-0,0676	-0,0612	-0,0551	-0,0496
0,08	-0,0761	-0,0866	-0,0879	-0,0852	-0,0821	-0,0810	-0,0854	-0,1012
	-0,0771	-0,0880	-0,0888	-0,0847	-0,0785	-0,0721	-0,0662	-0,0614
0,06	-0,1115	-0,1417	-0,1727	-0,2206	-0,2872	-0,3382	-0,3566	-0,3546
	-0,0928	-0,1074	-0,1101	-0,1070	-0,1018	-0,0969	-0,0936	-0,0931
0,05	-0,1863	-0,2827	-0,3992	-0,4976	-0,5496	-0,5644	-0,5559	-0,5339
	-0,1069	-0,1251	-0,1300	-0,1286	-0,1254	-0,1233	-0,1244	-0,1306
внутренние стрингеры								
0,10	0,0266	0,0299	0,0302	0,0288	0,0266	0,0239	0,0209	0,0178
	0,0270	0,0296	0,0290	0,0269	0,0242	0,0213	0,0184	0,0156
0,08	0,0171	0,0178	0,0158	0,0120	0,0063	-0,0022	-0,0158	-0,0391
	0,0209	0,0222	0,0209	0,0185	0,0155	0,0123	0,0089	0,0051
0,06	-0,0182	-0,0378	-0,0692	-0,1196	-0,1863	-0,2397	-0,2626	-0,2651
	0,0083	0,0065	0,0035	-0,0002	-0,0045	-0,0095	-0,0158	-0,0240
0,05	-0,0913	-0,1709	-0,2751	-0,3670	-0,4182	-0,4348	-0,4302	-0,4136
	-0,0037	-0,0086	-0,0137	-0,0192	-0,0255	-0,0335	-0,0442	-0,0588

В случае внешних ребер значения b_s и δ_s всегда отрицательны, при внутренних ребрах b_s , δ_s отрицательны в случае весьма тонких ребер ($t/d > 0,06$) и положительны для относительно толстых ($t/d > 0,10$). В промежуточном диапазоне (включающем



Фиг. 4

в данном случае область оптимальных параметров) величина δ_s меняет знак с плюса на минус при переходе от форм с небольшими m к формам местного выпучивания ребра, причем здесь δ_s весьма малы. Такой характер изменения δ_s объясняется следующим обстоятельством. Величина b_s (1.6) складывается из интегралов, вычисляемых по обшивке и ребрам, относительная величина которых зависит от соотношения амплитуд перемещений обшивки и ребра. При внешних стрингерах знаки интегралов одинаковы либо один из них значительно превосходит другой; при внутренних ребрах интегралы имеют разные знаки и частично или полностью погашают друг друга. Это приводит к значительно большей чувствительности к несовершенствам оболочек с внешними стрингерами (аналогичный эффект, обнаруженный в [3] на основе конструктивно-ортотропной теории, имеет другую природу, не связан со взаимодействием форм и относится к оболочкам с относительно слабым подкреплением).

Достаточно сложный характер зависимости δ_s от m (при котором максимум $|\delta_s|$ и минимум σ_m^* достигаются, в общем случае, при различных m) приводит к тому, что наиболее опасные местные формы в линейном и нелинейном расчетах могут быть различны (если ограничиться рассмотрением взаимодействия общей формы с каждой из местных по отдельности). Из таблицы видно также, что стержневая схема в случае тонких ребер приводит к недопустимой ошибке в определении коэффициента δ_s .

При вычислении предельной нагрузки оболочек с несовершенствами рассматривалось взаимодействие общей формы с каждой из местных форм по отдельности (в диапазоне $m=1,25$). Так как наиболее опасная форма заранее неизвестна, для каждой комбинации начальных погибей выбиралось m , приводящее к минимальному предельному напряжению σ_* . Некоторые результаты расчета оболочек указанных выше параметров представлены на фиг. 4 для внешнего (a) и внутреннего (б) расположения ребер. Кривые 1, 2 соответствуют значениям безразмерных критических напряжений общей и местной форм, кривые 3-6 - значениям $\sigma_*^* = \sigma_* \cdot 10^3 / E$ при следующих комбинациях начальных погибей: $\xi_1^0 = 0,1, \xi_2^0 = 0,1; (0,5; 0), (0,25; 0,25), (0; 0,5)$.

Снижение предельных напряжений при наличии несовершенств оказывается весьма большим - особенно при местной начальной погиби. Обнаруженный эффект резкого уменьшения чувствительности к несовершенствам при внутренних ребрах оказывает заметное влияние на оптимальное значение t/d и на сравнительную эффективность внешнего и внутреннего подкреплений (ср. [1, 2]).

Было проведено сравнение с результатами работы [7]. Рассчитывались оболочки с параметрами, соответствующими вариантам 3 и 4 указанной работы. Однако уже в линейном расчете обнаружили большие расхождения из-за неучета в [7] крутильной жесткости ребер. Это приводит к занижению критических напряжений общего выпучивания на 13-15%, напряжений местного выпучивания - на 55-60%. Эта погрешность превышает уточнение, которое дает учет связанности форм в нелинейной задаче, и не дает возможности сопоставить полученные результаты.

Для сравнения с решением [5] были выбраны параметры оболочек, для которых в местной форме преобладают перемещения ребер, и вводилась только общая по- гибь. Предельные напряжения оказывались, как правило, выше на 10–25% по сравнению с данными [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Маневич А. И., Демешко М. Ф., Красовский В. Л., Кучеренко В. М. Экспериментальное исследование устойчивости продольно подкрепленных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. — Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. М.: Стройиздат, 1971, вып. 14, с. 87–102.
2. Маневич А. И., Красовский В. Л., Кучеренко В. М. Влияние внутреннего давления на устойчивость эксцентрично подкрепленных цилиндрических оболочек при осевом сжатии. — Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. М.: Стройиздат, 1973, вып. 15, с. 26–35.
3. Hutchinson J. W., Amazigo J. C. Imperfection-sensitivity of eccentrically stiffened cylindrical shells. — AIAA Journal, 1967, v. 5, No. 3, p. 392–401. — Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1967, № 3, с. 11–22.
4. Немировский Ю. В. Устойчивость и выпучивание конструктивно-анизотропных и неоднородных оболочек и пластин. — Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. 155 с.
5. Маневич А. И. Связанная потеря устойчивости продольно подкрепленной цилиндрической оболочки. — Гидроаэромеханика и теория упругости: Сб. статей. Днепропетровск: Изд-е ДГУ, 1977, вып. 22, с. 104–114.
6. Маневич А. И. Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. К.— Донецк: Вища школа, 1979. 152 с.
7. Byskov E., Hutchinson J. W. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. — AIAA Journal, 1977, v. 15, No. 7, p. 941–948. — Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 7, с. 57–68.
8. Маневич А. И. Взаимодействие форм потери устойчивости сжатой подкрепленной панели. — Строит. механ. и расчет сооружений, 1981, № 5, с. 24–29.
9. Koiter W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures. — In: Lab. of Engng. Mech. Report Nr. 590. Delft, Holland, 1976. p. 41.
10. Койгер В. Т. Устойчивость и закритическое поведение упругих систем. — Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1960, № 5, с. 99–110.
11. Бологин В. В. Нелинейная теория упругости и устойчивость «в большом». — Расчеты на прочность: Сб. статей. М.: Машгиз, 1958, вып. 3, с. 310–354.
12. Wang J. T. S., Lin Y. J. Stability of discretely stringer-stiffened cylindrical shells. — AIAA Journal, 1973, v. 11, No. 6, p. 810–814. — Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 6, с. 53–58.
13. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
14. Williams F. W., Wittrick W. H., Plank R. J. Critical buckling loads of some prismatic plate assemblies. — In: Buckling of structures. В.: Springer, 1976, p. 17–26.
15. Singer J., Haftka R. T. Buckling of discretely stringer-stiffened cylindrical shells and elastically restrained panels. — AIAA Journal, 1975, v. 13, No. 7, p. 849–850. — Рус. перев.: Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 7, с. 12–14.

Днепропетровск

Поступила в редакцию
17.VI.1984