МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 531.36

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИНФОРМАЦИИ О ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЕ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ

МАТАСОВ А. И.

Известно [1, 2], что исследование уравнений инерциальной навигации приводится к исследованию движения двух материальных точек M и M', движущихся в поле сил притягивающего центра под действием одной и той же внешней негравитационной силы. Материальная точка M – чувствительная масса пространственного акселерометра, установленного на объекте, M' – модельная материальная точка, траектория которой формируется вычислителем инерциальной системы. При таком подходе задача о наблюдаемости для уравнений инерциальной навигации при движении объекта на известном постоянном удалении r_0 от притягивающего центра приводится к задаче определения многообразия траекторий модельных материальных точек, которые во все время движения находятся на сфере радиуса r_0.

В работе [3] эта задача решена для двух частных случаев: при движении рассматриваемых точек по кругу радиуса r_0 и при движении одной из них с постоянной скоростью по дуге большого круга сферы радиуса r_0. Кроме того, для общего пространственного случая было доказано одно свойство указанного многообразия движений материальных точек.

Цель данной работы – показать, что исследуемое многообразие, как правило, состоит не более, чем из четырех точек.

1. Согласно известной теоретико-механической интерпретации уравнений инерциальной навигации [1, 2], задача о наблюдаемости для уравнений инерциальной навигации при движении объекта на известной постоянной высоте эквивалентна следующей задаче [3].

Введем инерциальную систему координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$. Рассмотрим материальную точку M единичной массы, движущуюся в поле сил ньютоновского притягивающего центра O под действием внешней силы $\mathbf{f}$ негравитационной природы. Положение точки M в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ определим радиус-вектором $\mathbf{r}=OM$.

Уравнения движения точки M, очевидно, примут вид (μ — постоянная тяготения)

$$d\mathbf{r}/dt=\mathbf{v},\qquad d\mathbf{v}/dt=-\mu\mathbf{r}/r^3+\mathbf{f},\qquad r=|\mathbf{r}| \tag{1.1}$$

Допустим, что начальные условия движения и сила $\mathbf{f}$ таковы, что точка M во все время движения находится на известном постоянном удалении r_0 от притягивающего центра O.

Тогда фазовые переменные системы (1.1) подчиняются ограничению

$$\mathbf{r}^2-r_0^2=0 \tag{1.2}$$

Ставится задача определения многообразия V решений уравнений (1.1) (при фиксированной внешней силе и разных начальных условиях), подчиняющихся ограничению (1.2) на всем рассматриваемом отрезке времени.

2. Обозначим через $\{M_\alpha\}$ множество материальных точек, движущихся согласно уравнениям (1.1) и (1.2) при $t\in[0, T^\circ]$, $T^\circ=\pi(r_0^3/\mu)^{1/2}$.

Имеет место

Утверждение [3]. Пусть движение одной из точек $\{M_\alpha\}$ — точки M происходит со скоростью, меньшей первой космической: $v<(\mu/r_0)^{1/2}$. Тогда все точки из $\{M_\alpha\}$ лежат в одной плоскости.

Докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть выполняется условие утверждения. Тогда, если направление вектора $\mathbf{f}$ изменяется в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$, то $\{M_\alpha\}$ состоит не более, чем из четырех точек; если направление вектора $\mathbf{f}$ постоянно в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$, то $\{M_\alpha\}$ состоит из двух однопараметрических семейств.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{r}$ радиус-вектор точки M, а через $\mathbf{r}_\alpha$, $\alpha\in\Gamma$ — радиус-векторы остальных точек из $\{M_\alpha\}$. Введем $\mathbf{\Delta}_\alpha=\mathbf{r}_\alpha-\mathbf{r}$ и обозначим множество этих векторов при $\alpha\in\Gamma$ через Σ. Согласно утверждению, любые $\mathbf{\Delta}_1$, $\mathbf{\Delta}_2$, $\mathbf{\Delta}_3\in\Sigma$ лежат в одной плоскости $S(t)$, т. е.

$$(\mathbf{\Delta}_1\times\mathbf{\Delta}_2)\mathbf{\Delta}_3=0 \tag{2.1}$$

Кроме того, согласно (1.2), все концы векторов $\mathbf{\Delta}_i$ лежат на одной окружности $P(t)$. Так как

$$\mathbf{\Delta}_i^{\cdot\cdot}+\omega_0^2\mathbf{\Delta}_i=\mathbf{0},\qquad \omega_0^2=\mu/r_0^3 \tag{2.2.1}$$

то, очевидно, (a_i, b_i — постоянные векторы)

$$\mathbf{\Delta}_i=\mathbf{a}_i\cos\tau+\mathbf{b}_i\sin\tau,\qquad \tau=\omega_0 t \tag{2.2.2}$$

Отметим, что $t=T^\circ$ при $\tau=\pi$.

Подставляя (2.2) в (2.1), нетрудно получить систему уравнений

$$(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_3=0,\qquad (\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_3=0 \tag{2.3.1}$$

$$\begin{gathered}(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_3+(\mathbf{b}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_3+(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{b}_3=0\\ (\mathbf{b}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{a}_3+(\mathbf{a}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_3+(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_3=0\end{gathered} \tag{2.3.2}$$

Разобьем дальнейшее доказательство на четыре стадии (A), (B), (C), (D).

Стадия (A). Покажем, что если S изменяет ориентацию в осях $O\xi_1\xi_2\xi_3$ и $\{M_\alpha\}$ состоит более, чем из четырех точек, то существуют два вектора $\mathbf{\Delta}_1$ и $\mathbf{\Delta}_2\in\Sigma$, такие, что для любого вектора $\mathbf{\Delta}_3\in\Sigma$ выполняется условие

$$\mathbf{\Delta}_3=c_1\mathbf{\Delta}_1+c_2\mathbf{\Delta}_2,\qquad \tau\in[0,\pi],\qquad c_1,\ c_2=\mathrm{const} \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. Пусть S изменяет ориентацию. Если для $\mathbf{\Delta}_1$ и $\mathbf{\Delta}_2$ (2.4) не выполняется, то один из трех векторов $\mathbf{\Delta}_1$, $\mathbf{\Delta}_2$, $(\mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1)$ сохраняет ориентацию.

Доказательство. Если один из векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ равен нулю, то $\mathbf{\Delta}_1$ или $\mathbf{\Delta}_2$, очевидно, сохраняет ориентацию. Поэтому пусть $\mathbf{a}_1=\mathbf{\Delta}_1(0)\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_2=\mathbf{\Delta}_2(0)\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}_1=\mathbf{\Delta}_1(\pi/2)\neq\mathbf{0}$, $\mathbf{b}_2=\mathbf{\Delta}_2(\pi/2)\neq\mathbf{0}$. Если при этом $\mathbf{a}_1\|\mathbf{a}_2$ или $\mathbf{b}_1\|\mathbf{b}_2$, то, так как M, M_1, M_2 лежат на окружности P ограниченного радиуса ($\tau\in[0,\pi]$), $\mathbf{a}_1=\mathbf{a}_2$ или $\mathbf{b}_1=\mathbf{b}_2$, а значит, $\mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1$ имеет вид $\mathbf{k}\sin\tau$ или $\mathbf{k}\cos\tau$ и сохраняет ориентацию. Поэтому пусть $\mathbf{a}_1$ не коллинеарен $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$ не коллинеарен $\mathbf{b}_2$.

Тогда из (2.3.1) следует, что

$$\mathbf{a}_3=\lambda_1\mathbf{a}_1+\lambda_2\mathbf{a}_2,\qquad \mathbf{b}_3=\mu_1\mathbf{b}_1+\mu_2\mathbf{b}_2$$

а из (2.3.2) следует, что

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1(\lambda_1-\mu_1)+(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2(\lambda_2-\mu_2)=0\\ (\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_1(\lambda_1-\mu_1)+(\mathbf{b}_1\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2(\lambda_2-\mu_2)=0\end{gathered} \tag{2.5}$$

При этом $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1\neq0$ или $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2\neq0$, иначе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ лежат в одной плоскости и S не меняет ориентации, что противоречит условиям леммы.

Пусть $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1\neq0$ и, следовательно, $\mathbf{b}_2=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2+\beta_1\mathbf{b}_1$. Тогда определитель системы (2.5) примет вид $[(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_1]^2(\alpha_2\beta_1+\alpha_1)$. Если он отличен от нуля, то $\lambda_1=\mu_1$, $\lambda_2=\mu_2$ и (2.4) выполняется, что противоречит условиям леммы. Поэтому

$$\alpha_2\beta_1+\alpha_1=0 \tag{2.6}$$

Рассмотрим уравнение (относительно $\tau\in[0, \pi]$)

$$\mathbf{\Delta}_1(\tau)=\lambda\mathbf{\Delta}_2(\tau), \quad \lambda=\mathrm{const} \tag{2.7}$$

или с учетом (2.6):

$$(\cos\tau+\lambda\alpha_2\beta_1\sin\tau)\mathbf{a}_1-(\lambda\cos\tau+\lambda\alpha_2\sin\tau)\mathbf{a}_2+$$
$$+(\sin\tau-\lambda\beta_1\sin\tau)\mathbf{b}_1=\mathbf{0}$$

Если $\beta_1=0$, то из (2.6) $\alpha_1=0$, $\mathbf{b}_2=\alpha_2\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{\Delta}_2$ сохраняет ориентацию. Поэтому можно считать, что $\beta_1\neq0$. Выбирая $\lambda=1/\beta_1$ и замечая, что уравнение $\cos\tau+\alpha_2\sin\tau=0$ всегда имеет решение, получаем, что (2.7) имеет решение $\tau^*\in[0, \pi]$. Так как M, M_1 и M_2 лежат на P, $\lambda=1$, следовательно, $\mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1$ имеет вид $\mathbf{k}\cos(\tau+\varphi)$ и не меняет ориентацию. В случае $(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2\neq0$ получается аналогичный результат. Лемма доказана.

Допустим, что из $\{M_\alpha\}$ имеется пять точек: M, M_1, M_2, M_3, M_4. Рассматривая различные тройки из них и считая, что ни для одной из них не выполняется (2.4) (с соответствующей перенумерацией), согласно лемме 2.1 получим, что один из векторов в каждой тройке

$$T_1=\{\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1\},\quad T_2=\{\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_3, \mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_1\},\quad T_3=\{\mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_3, \mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_2\}$$
$$T_4=\{\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_4, \mathbf{\Delta}_4-\mathbf{\Delta}_1\},\quad T_5=\{\mathbf{\Delta}_2, \mathbf{\Delta}_4, \mathbf{\Delta}_4-\mathbf{\Delta}_2\},\quad T_6=\{\mathbf{\Delta}_3, \mathbf{\Delta}_4, \mathbf{\Delta}_4-\mathbf{\Delta}_3\}$$

сохраняет ориентацию. Среди них найдутся два, имеющие общую вершину. Действительно, если они не содержатся в T_1, T_2, T_3, то сохраняют ориентацию лишь $\mathbf{\Delta}_1$ с $\mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_2$ или $\mathbf{\Delta}_2$ с $\mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_1$ или $\mathbf{\Delta}_3$ с $\mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1$. В первом случае один из векторов T_5 имеет общую вершину с $\mathbf{\Delta}_1$ или с $\mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_2$, во втором случае один из векторов T_4 имеет общую вершину с $\mathbf{\Delta}_2$ или $\mathbf{\Delta}_3-\mathbf{\Delta}_1$, в третьем случае один из векторов T_5 имеет общую вершину с $\mathbf{\Delta}_3$ или с $\mathbf{\Delta}_2-\mathbf{\Delta}_1$. Следовательно, S не меняет ориентации, что противоречит исходному условию.

Таким образом, учитывая соответствующую перенумерацию, утверждение (A) доказано.

Стадия (B). Покажем, что если S изменяет ориентацию, то $\{M_\alpha\}$ состоит не более, чем из четырех точек.

Предположим, что это не так. Тогда, согласно утверждению (A), существуют $\mathbf{\Delta}_1$, $\mathbf{\Delta}_2\in\Sigma$, такие, что

$$\mathbf{\Delta}_3=c_1\mathbf{\Delta}_1+c_2\mathbf{\Delta}_2, \quad \mathbf{\Delta}_4=d_1\mathbf{\Delta}_1+d_2\mathbf{\Delta}_2 \tag{2.8}$$

Ясно, что при этом c_1, c_2, d_1, d_2 не равны нулю, иначе $\mathbf{\Delta}_j=\mathbf{\Delta}_k$, так как концы $\mathbf{\Delta}_i$ лежат на P.

Из (1.2) следует, что $(\mathbf{r}+\mathbf{\Delta}_i)^2=r_0^2$ или

$$(\mathbf{\Delta}_i, \mathbf{r})=-{}^1/_2\mathbf{\Delta}_i^2 \quad (i=1, \ldots, 4) \tag{2.9}$$

Согласно (2.8) и (2.9), имеем

$$\begin{gathered} c_1\mathbf{\Delta}_1^2+c_2\mathbf{\Delta}_2^2=(c_1\mathbf{\Delta}_1+c_2\mathbf{\Delta}_2)^2 \\ d_1\mathbf{\Delta}_1^2+d_2\mathbf{\Delta}_2^2=(d_1\mathbf{\Delta}_1+d_2\mathbf{\Delta}_2)^2 \end{gathered} \tag{2.10}$$

или

$$\begin{gathered} \varphi_1\mathbf{\Delta}_1^2+\varphi_2\mathbf{\Delta}_2^2=(\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2), \quad \psi_1\mathbf{\Delta}_1^2+\psi_2\mathbf{\Delta}_2^2=(\mathbf{\Delta}_1, \mathbf{\Delta}_2) \\ \varphi_1=(1-c_1)/2c_2, \quad \varphi_2=(1-c_2)/2c_1 \\ \psi_1=(1-d_1)/2d_2, \quad \psi_2=(1-d_2)/2d_1 \end{gathered} \tag{2.11}$$

Из (2.11) следует, что $(\varphi_1-\psi_1)\mathbf{\Delta}_1^2+(\varphi_2-\psi_2)\mathbf{\Delta}_2^2=0$; при этом $\varphi_1-\psi_1\neq0$, $\varphi_2-\psi_2\neq0$, иначе, как нетрудно убедиться, $c_1+c_2=d_1+d_2=1$, $\varphi_1=\varphi_2={}^1/_2$,

$(\boldsymbol{\Delta}_1-\boldsymbol{\Delta}_2)^2=0$ и $\boldsymbol{\Delta}_1=\boldsymbol{\Delta}_2$. Следовательно, $\boldsymbol{\Delta}_1^2=k_1\boldsymbol{\Delta}_2^2$ и $(\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2)=k\boldsymbol{\Delta}_1^2$, $k_1, k=$ $=\mathrm{const}$.

Лемма 2.2. Пусть $\boldsymbol{\Delta}_1^2=k_1\boldsymbol{\Delta}_2^2$, $(\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2)=k\boldsymbol{\Delta}_1^2$, $\boldsymbol{\Delta}_1$ тождественно не коллинеарен $\boldsymbol{\Delta}_2$, $\tau\in[0, \pi]$. Тогда плоскость, натянутая на $\boldsymbol{\Delta}_1$ и $\boldsymbol{\Delta}_2$, не меняет ориентации.

Доказательство. Ясно, что без уменьшения общности можно положить $k_1=1$, $\mathbf{a}_1^2=1$. Тогда, учитывая (2.2)

$$\begin{gathered}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)=k, \quad (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)=k\mathbf{b}_1^2\\ (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2)+(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1)=2k(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)\\ \mathbf{a}_1^2=\mathbf{a}_2^2=1, \quad \mathbf{b}_1^2=\mathbf{b}_2^2, \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)=(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)\end{gathered} \tag{2.12}$$

Отметим, что $\mathbf{a}_1$ не коллинеарен $\mathbf{a}_2$, иначе, согласно первому уравнению (2.12), $k=1$, а тогда $(\boldsymbol{\Delta}_1, \boldsymbol{\Delta}_2)=\boldsymbol{\Delta}_1^2=\boldsymbol{\Delta}_2^2$ и $\boldsymbol{\Delta}_1=\pm\boldsymbol{\Delta}_2$, что противоречит условиям леммы.

Представим $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ в виде $\mathbf{b}_1=\mathbf{p}_1+\mathbf{q}_1$, $\mathbf{b}_2=\mathbf{p}_2+\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_1=\alpha_1\mathbf{a}_1+\alpha_2\mathbf{a}_2$, $\mathbf{q}_2=$ $=\beta_1\mathbf{a}_1+\beta_2\mathbf{a}_2$, $(\mathbf{a}_i, \mathbf{p}_i)=0$ $(i=1, 2)$.

Тогда из (2.12) имеем

$$\begin{gathered}(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)+k(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)=k(\alpha_1^2+\alpha_2^2+2k\alpha_1\alpha_2)+k\mathbf{p}_1^2\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+2k\alpha_1\alpha_2+\mathbf{p}_1^2=\beta_1^2+\beta_2^2+2k\beta_1\beta_2+\mathbf{p}_2^2\\ \beta_1+k\beta_2+\alpha_2+k\alpha_1=2k(\alpha_1+k\alpha_2)\\ \alpha_1+k\alpha_2=\beta_2+k\beta_1\end{gathered} \tag{2.13}$$

Из последних двух уравнений (2.13) получаем $(1-k^2)(\alpha_2+\beta_1)=0$. При $\alpha_2+\beta_1=0$ из (2.13) следует, что $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)=k\mathbf{p}_1^2$, $\mathbf{p}_1^2=\mathbf{p}_2^2$ и поэтому $k^2=1$; но тогда $\boldsymbol{\Delta}_1=\pm\boldsymbol{\Delta}_2$, $\tau\in[0, \pi]$, что противоречит условиям леммы. Лемма доказана.

Из леммы 2.2 следует утверждение (B).

Стадия (C). Покажем, что если S не меняет ориентации и $\{M_\alpha\}$ состоит более, чем из четырех точек, то $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$, где $\mathbf{f}_S$ — проекция $\mathbf{f}$ на S.

Уравнение (2.2.1) описывает плоское движение некоторой материальной точки под действием центральной силы. Это движение происходит по эллипсу, который может вырождаться в отрезок. Для этого движения справедлив закон площадей (φ_* — полярный угол)

$$\rho^2 d\varphi_*/dt=p, \quad p=(\boldsymbol{\Delta}\times\boldsymbol{\Delta}^\cdot)_3|_{t=0}, \quad \rho^2=\boldsymbol{\Delta}^2 \tag{2.14}$$

Отметим, что, согласно условию утверждения (C), все $\boldsymbol{\Delta}\in\Sigma$ лежат в одной плоскости S и могут считаться двумерными.

Лемма 2.3. Пусть функция комплексной переменной z
$g(z)=(a_3+b_3\cos(z+\psi_3))^2(a_2+b_2\cos(z+\psi_2))/(a_1+b_1\cos(z+\psi_1))$
с вещественными параметрами и $|a_1|>|b_1|\neq0$ является целой. Тогда, либо

$$(a_3+b_3\cos(z+\psi_3))/(a_1+b_1\cos(z+\psi_1))=\mathrm{const}$$

либо $(a_2+b_2\cos(z+\psi_2))/(a_1+b_1\cos(z+\psi_1))=\mathrm{const}$.

Доказательство. Очевидно, при $b_2\neq0$ и $b_3\neq0$ можно считать, что $g(z)=$ $=c(q_3-\cos(z+\varphi_3))^2(q_2-\cos(z+\varphi_2))/(q_1-\cos(z+\varphi_1))$, $q_1>1$, $q_2>0$, $q_3>0$. Нули уравнения $q=\cos(z+\varphi)$ имеют вид [4]:

$$z=\arccos q-\varphi=\pm\ln(q+\sqrt{q^2-1})-\varphi+2\pi k, \quad k \text{ — целое.}$$

Ясно, что

$$\begin{gathered}\operatorname{Re} z=2\pi k-\varphi, \quad \operatorname{Im} z=\pm\ln(q+\sqrt{q^2-1}) \quad (q>1)\\ \operatorname{Re} z=2\pi k-\varphi\pm\arg(q+i\sqrt{1-q^2}), \quad \operatorname{Im} z=0 \quad (q\leqslant1)\end{gathered}$$

причем при $q=1$ корни имеют двойную кратность. Отсюда следует, что если $g(z)$ — целая функция, то $q_j=q_1$, $\varphi_j=\varphi_1$ для j, равного двум или трем и, таким образом, при $b_2 \neq 0$ и $b_3 \neq 0$ лемма доказана. Из доказательства ясно, что утверждение леммы сохраняется и при $b_2=0$ или $b_3=0$. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $\Delta_1^2=k\Delta_2^2$ или Δ_1, Δ_2 сохраняют ориентацию или $(\Delta_1, \Delta_2)=0$, $\Delta_1, \Delta_2 \in \Sigma$, $\tau \in [0, \pi]$. Тогда угол φ между Δ_1 и Δ_2 постоянен и $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$.

Доказательство. Пусть $\Delta_1^2=k\Delta_2^2$, $k=\mathrm{const}$. Если один из векторов Δ_1, Δ_2, например Δ_1, не вращается и, согласно (2.2.2), уравнение $\Delta_1^2(\tau)=0$, $\tau \in [0, \pi]$ имеет корни, то и $\Delta_2^2(\tau)=0$ имеет корни при $\tau \in [0, \pi]$, а значит, согласно (2.14), полярный угол вектора Δ_2 постоянен и $\varphi=\mathrm{const}$. Если они вращаются в разные стороны, то из (2.2.2) следует, что $\Delta_1=-k'\Delta_2$ при некотором $\tau \in [0, \pi]$, а из (2.14) следует, что $\Delta_i^2(\tau)>0$, однако это противоречит условию, что концы Δ_i лежат на P. Если они вращаются в одну сторону, то из (2.14) получаем, что $\varphi^{\cdot}=0$ и $\varphi=\mathrm{const}$.

Из (2.9) имеем ($\mathbf{r}_S$ — проекция $\mathbf{r}$ на S) систему уравнений $(\Delta_i, \mathbf{r}_S)=$ $=-{}^1/{}_2\Delta_i^2$, $i=1, 2$. Решая ее, получаем

$$-2r_{S1}=\det \begin{vmatrix} \Delta_1^2 & \Delta_{12} \\ \Delta_2^2 & \Delta_{22} \end{vmatrix} \det^{-1} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

Так как $\varphi=\mathrm{const}$, то знаменатель (2.15) пропорционален Δ_1^2, а тогда $r_{S1}=a\cos\tau+b\sin\tau$, где $a, b=\mathrm{const}$, т. е. $f_{S1}=0$. Аналогично можно получить, что $f_{S2}=0$.

Пусть Δ_1 и Δ_2 сохраняют ориентацию. Тогда, направляя первую координатную ось по вектору Δ_1, получим

$$-2r_{S1}=\Delta_{11}, \qquad -2r_{S2}=\det \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{11}^2 \\ \Delta_{21} & \Delta_{21}^2+\Delta_{22}^2 \end{vmatrix}$$

$$\det^{-1} \begin{vmatrix} \Delta_{11} & 0 \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} = \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_{22}}\right)(\Delta_{21}-\Delta_{11})+\Delta_{22}$$

Так как, очевидно, $\Delta_{21}/\Delta_{22}=\mathrm{const}$, то $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$. Пусть $(\Delta_1, \Delta_2)=0$. Если Δ_i вращаются, то из (2.14) $p_1/p_2=\Delta_1^2/\Delta_2^2$ и, следовательно, Δ_1 и Δ_2 имеют пропорциональные длины, поэтому $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$. Лемма доказана.

Лемма 2.5. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \in \Sigma$ и Δ_1, Δ_2 изменяют ориентацию. Тогда либо $(\Delta_3-\Delta_2)^2=\mu_1\Delta_1^2$, либо $(\Delta_3-\Delta_1)^2=\mu_2\Delta_2^2$, либо $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$, $(\mu_1, \mu_2=\mathrm{const})$.

Доказательство. Согласно лемме 2.4, можно считать, что среди векторов Δ_i, $i=1, 2, 3$ нет векторов, имеющих пропорциональные длины.

Нетрудно убедиться, что радиус R окружности, образованной векторами Δ_i и Δ_j связан с ними соотношением

$$4R^2=(\Delta_i-\Delta_j)^2 \Big/ \left(1-\frac{(\Delta_i, \Delta_j)^2}{\Delta_i^2\Delta_j^2}\right) \tag{2.16}$$

Рассмотрим два возможных варианта.

1. Один из векторов Δ_i, $i=1, 2$, например Δ_1, имеет постоянную длину, равную c. Из (2.16) имеем

$$\left(\Delta_3^2-\frac{(\Delta_2, \Delta_3)^2}{\Delta_2^2}\right)(\Delta_1-\Delta_3)^2=\left(\Delta_3^2-\frac{(\Delta_1, \Delta_3)^2}{c^2}\right)(\Delta_2-\Delta_3)^2 \quad \tau \in [0,\pi] \tag{2.17}$$

Правая часть (2.17) — целая функция. Кроме того, Δ_2 вращается, и поэтому уравнение $\Delta_2^2(\tau)=0$ не имеет действительных корней. Тогда, согласно лемме 2.3, либо $(\Delta_1-\Delta_3)^2=\mu_2\Delta_2^2$, либо $(\Delta_2, \Delta_3)=k_1\Delta_2^2$.

В последнем случае либо $(\Delta_1, \Delta_3)=k_2$, либо $(\Delta_3-\Delta_2)^2=k_3=\mu_1\Delta_1^2$ ($k_i=\mathrm{const}$), иначе правая часть (2.17) содержит тригонометрический полином шестой степени, а левая — не содержит. Если $(\Delta_1, \Delta_3)=k_2$, то с учетом (2.2.2) $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3)=(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3)$ и $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_3)+(\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_1)=0$. Из покоординатной записи этих равенств (здесь, очевидно, можно положить $\mathbf{a}_1=(1, 0), \mathbf{b}_1=(0, 1)$)

нетрудно получить, что $\Delta_3^2=\text{const}$, что противоречит допущению, сделанному в начале доказательства.

2. Ни один из векторов Δ_i, $i=1, 2, 3$ не имеет постоянной длины. Из (2.16) имеем

$$\left(\Delta_3^2-\frac{(\Delta_2,\Delta_3)^2}{\Delta_2^2}\right)(\Delta_1-\Delta_3)^2=\left(\Delta_3^2-\frac{(\Delta_1,\Delta_3)^2}{\Delta_1^2}\right)(\Delta_2-\Delta_3)^2,\quad \tau\in[0,\pi] \tag{2.18}$$

Соотношение (2.18) может выполняться, лишь когда $(\Delta_1, \Delta_3)^2\times\times(\Delta_2-\Delta_3)^2/\Delta_1^2$ и $(\Delta_2, \Delta_3)^2(\Delta_1-\Delta_3)^2/\Delta_2^2$ целые функции, так как Δ_1^2 и Δ_2^2 не могут иметь общих корней (иначе, согласно лемме 2.3, они были бы пропорциональны).

Кроме того, в силу условий леммы уравнения $\Delta_i^2=0$ $(i=1, 2)$ не имеют действительных корней. Поэтому из леммы 2.3 следует, что либо $(\Delta_3-\Delta_2)^2=\mu_1\Delta_1^2$, либо $(\Delta_3-\Delta_1)^2=\mu_2\Delta_2^2$, либо $(\Delta_1, \Delta_3)=k_1\Delta_1^2$ и $(\Delta_2, \Delta_3)=$ $=k_2\Delta_2^2$. При выполнении последних соотношений (2.18) примет вид

$$(k_1-1)^2\Delta_1^2-(k_2-1)^2\Delta_2^2=[k_2^2(k_1-1)^2-k_1^2(k_2-1)^2]\Delta_1^2\Delta_2^2/\Delta_3^2 \tag{2.19}$$

Так как левая часть (2.19) — целая функция, то (2.19) может выполняться лишь при $k_1=k_2=1$.

Отсюда следует, что $(\Delta_1, \Delta_3-\Delta_1)=0$, и из леммы 2.4 получаем, что $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$. Лемма доказана.

Пусть $\{M_\alpha\}$ содержит пятую точку.

Можно считать, что среди векторов Δ_1, Δ_2, Δ_3, $\Delta_4\in\Sigma$, Δ_1, Δ_2, Δ_3 изменяют ориентацию (иначе $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$). Тогда, согласно лемме 2.5, в каждой четверке

$$Q_1=\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4-\Delta_2, \Delta_4-\Delta_1\},\quad Q_2=\{\Delta_1, \Delta_3, \Delta_4-\Delta_3, \Delta_4-\Delta_1\}$$
$$Q_3=\{\Delta_1, \Delta_3, \Delta_2-\Delta_3, \Delta_2-\Delta_1\},\quad Q_4=\{\Delta_2, \Delta_3, \Delta_1-\Delta_2, \Delta_1-\Delta_3\}$$

имеются по крайней мере два вектора, не имеющих общей вершины, но имеющих пропорциональные длины. Однако среди всех векторов этих четверок существуют два, имеющих общую вершину и пропорциональные длины. Действительно, допустим, что это не так, причем в Q_1 Δ_1 и $(\Delta_4-\Delta_2)$ имеют пропорциональные длины; тогда в Q_2 Δ_3 и $(\Delta_4-\Delta_1)$ имеют пропорциональные длины.

Если в Q_3 Δ_1^2 и $(\Delta_2-\Delta_3)^2$ пропорциональны, то $(\Delta_4-\Delta_2)^2=\alpha(\Delta_3-\Delta_2)^2$, если в Q_3 пропорциональны Δ_3^2 и $(\Delta_2-\Delta_1)^2$, то $(\Delta_4-\Delta_1)^2=\beta(\Delta_2-\Delta_1)^2$, что противоречит допущению. Согласно лемме 2.4, $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$. К этому же выводу можно прийти, если в Q_1 начать с пары Δ_2 и $(\Delta_4-\Delta_1)$. Утверждение (C) доказано.

Замечание. Можно показать, что если S не меняет ориентации, то число точек не превышает трех $(\mathbf{f}_S\neq\mathbf{0})$.

(D) Покажем, что если S не меняет ориентации и $\mathbf{f}_S=\mathbf{0}$, то $\{M_\alpha\}$ состоит из двух однопараметрических семейств.

Без уменьшения общности можно считать, что нормаль к S совпадает с $O\xi_3$, т. е. $f_1=f_2=0$. В силу инвариантности уравнений (1.1), (1.2) относительно поворота системы координат вокруг третьей оси очевидно, что траектории с начальными условиями вида

$$\begin{aligned} r_1&=r_{10}\cos\alpha-r_{20}\sin\alpha, & v_1&=\pm(v_{10}\cos\alpha-v_{20}\sin\alpha)\\ r_2&=r_{10}\sin\alpha+r_{20}\cos\alpha, & v_2&=\pm(v_{10}\sin\alpha+v_{20}\cos\alpha)\\ r_3&=r_{30}, & v_3&=v_{30}\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{v}_0$ — начальные условия для точки M, также удовлетворяют (1.1), (1.2).

Предположим, что кроме (2.20) имеются другие начальные условия с таким же свойством. Обозначим их множество через N.

Из первого утверждения п. 2 следует, что для точек из N $r_3=r_{30}$, $v_3=v_{30}$; а из условия, что все материальные точки с начальными условиями из N лежат на одной окружности следует, что для точек из N должны выполняться остальные соотношения (2.20). Таким образом, N пусто и утверждение (D) доказано.

Из совокупности утверждений (B), (C), (D), очевидно, следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Следствие. Формулировка теоремы сохраняется с заменой $\{M_\alpha\}$ на V.

3. Приведем пример, в котором четыре точки движутся согласно (1.1), (1.2) со скоростями, меньшими первой космической.

Рассмотрим два вектора

$$\Delta_1=\|a\cos\tau,\ a\sin\tau,\ 0\|^{\mathrm{T}},\quad \Delta_2=\|-a\sin\tau,\ a\cos\tau,\ a\varepsilon\sin\tau\|^{\mathrm{T}}$$

Ясно, что $(\Delta_1, \Delta_2)=0$, а значит, четыре точки M, M_1, M_2, M_3, определяемые концами векторов Δ_1, Δ_2, $(\Delta_1+\Delta_2)$, лежат на одной окружности. Если эти векторы в каждый момент времени прикладывать к сфере радиуса r_0, то их концы опишут на сфере четыре кривые, определяя траектории материальных точек. Нетрудно убедиться в необходимой гладкости этих траекторий; кроме того, ясно, что выбором a и ε можно гарантировать любые ограничения сверху на скорости движений.

Итак, рассматриваемое многообразие, как правило, состоит не более, чем из четырех точек и эта оценка не завышена.

Автор благодарит Н. А. Парусникова за ценные обсуждения полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Девянин Е. А.* Механика инерциальных навигационных систем.— Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1973, т. 29, с. 18—41.
2. *Парусников Н. А.* Использование информации о высоте в задаче инерциальной навигации.— Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1975, т. 40, с. 94—103.
3. *Матасов А. И.* О фазовых кривых уравнения движения материальной точки.— Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 3, с. 13—19.
4. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексной переменной. М.: Наука, 1973. 736 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.V.1981