**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983**

УДК 539.3

ОПИСАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК ПОСРЕДСТВОМ КООРДИНАТ ОТСЧЕТНОЙ И АКТУАЛЬНОЙ КОНФИГУРАЦИЙ

ЗУБОВ Л. М.

Составлена система уравнений равновесия нелинейно-упругих оболочек, независимыми переменными в которой являются координаты отсчетной конфигурации деформирующейся поверхности, а неизвестными функциями служат координаты актуальной конфигурации. Эта система уравнений оказывается удобной при постановке в условиях больших деформаций контактных задач о взаимодействии оболочки с твердой гладкой поверхностью и о соприкосновении без трения двух оболочек. При помощи предложенного способа описания деформаций поверхности построена система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая кручение (при конечных углах закручивания) и выворачивание наизнанку изотропных оболочек вращения. Для плоской пластины и цилиндрической панели найден ряд точных решений о больших деформациях.

1. Предположим, что срединная поверхность σ оболочки в отсчетной конфигурации (недеформированном состоянии) однозначно проектируется на некоторую плоскость π, и зададим положение поверхности σ возвышением $y(x^\alpha)$ точки поверхности над плоскостью. Здесь x^α $(\alpha=1, 2)$ — произвольные координаты на плоскости π.

Для радиус-вектора точки на σ имеем $\mathbf{r}=\mathbf{r}^\circ+y\mathbf{n}^\circ$, где $\mathbf{r}^\circ$ — радиус-вектор точки плоскости $\mathbf{n}^\circ$ — единичная нормаль к плоскости π. Здесь и в дальнейшем нуликом обозначаются величины на плоскости. Для порождаемого координатами x^α векторного базиса на σ и вектора нормали к σ получим

$$\mathbf{r}_\alpha=\mathbf{r}_\alpha{}^\circ+y_{,\alpha}\mathbf{n}^\circ, \quad \mathbf{n}=\sqrt{g^\circ/g}\,(\mathbf{n}^\circ-y_{,\alpha}\mathbf{r}^{\circ\alpha}) \qquad (1.1)$$
$$g/g^\circ=1+g^{\circ\alpha\beta}y_{,\alpha}y_{,\beta}, \quad g^{\circ\alpha\beta}=\mathbf{r}^{\circ\alpha}\cdot\mathbf{r}^{\circ\beta}$$

Здесь и ниже индекс после запятой означает производную по соответствующей координате, $\mathbf{r}_\alpha{}^\circ$, $\mathbf{r}^{\circ\beta}$ — основной и взаимный векторные базисы на π. Из (1.1) найдем выражения коэффициентов первой и второй квадратичных форм и символов Кристоффеля поверхности σ:

$$g_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}{}^\circ+y_{,\alpha}y_{,\beta}, \quad b_{\alpha\beta}=\sqrt{g^\circ/g}\,(y_{,\alpha\beta}-\gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\nu}y_{,\nu}) \qquad (1.2)$$
$$\gamma_{\alpha\beta}{}^\nu=\gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\nu}+(g^\circ/g)(y_{,\alpha\beta}-\gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\delta}y_{,\delta})g^{\circ\nu\mu}y_{,\mu}$$
$$g^{\alpha\beta}=g^{\circ\alpha\beta}-(g^\circ/g)g^{\circ\nu\alpha}g^{\circ\delta\beta}y_{,\nu}y_{,\delta}$$
$$g=g_{11}g_{22}-g_{12}{}^2, \quad g^\circ=g_{11}{}^\circ g_{22}{}^\circ-g_{12}{}^{\circ 2}$$

Предполагая, что срединная поверхность Σ деформированной оболочки также однозначно проектируется на некоторую плоскость Π, где введены произвольные координаты $X^{\alpha'}$ $(\alpha'=1, 2)$ с основным базисом $\mathbf{R}_{\alpha'}{}^\circ$, определим положение поверхности возвышением $Y(X^{\alpha'})$ над плоскостью. Для поверхности Σ, отнесенной к координатам $X^{\alpha'}$, имеют место формулы, аналогичные (1.2):

$$\mathbf{R}_{\alpha'}=\mathbf{R}_{\alpha'}{}^\circ+Y_{,\alpha'}\mathbf{N}^\circ, \quad \mathbf{N}^*=\sqrt{G^{\circ\prime}/G'}\,(\mathbf{N}^\circ-Y_{,\alpha'}\mathbf{R}^{\circ\alpha'}) \qquad (1.3)$$

$$G_{\alpha'\beta'}=\overset{0}{G}_{\alpha'\beta'}+Y_{,\alpha'}Y_{\beta'}, \quad B_{\alpha'\beta'}=\sqrt{G^{0\prime}/G'}\,(Y_{,\alpha'\beta'}-\overset{0\nu'}{\Gamma}_{\alpha'\beta'}Y_{,\nu'})$$

$$\Gamma_{\alpha'\beta'}^{\nu'}=\Gamma_{\alpha'\beta'}^{0\nu'}+(G^{0'}/G')\,(Y_{,\alpha'\beta'}-\Gamma_{\alpha'\beta'}^{0\delta'}Y_{,\delta'})\,G^{0\nu'\mu'}Y_{,\mu'}$$
$$G'\,/\,G^{\circ\prime}=1+G^{\circ\alpha'\beta'}Y_{,\alpha'}Y_{,\beta'}$$

Деформацию поверхности, т. е. взаимно однозначное точечное преобразование σ в Σ можно описать функциями $X^{\alpha'}(x^\alpha)$, $Y(x^\alpha)$. При этом будем предполагать, что векторные базисы $\mathbf{r}_\alpha{}^\circ$, $\mathbf{n}^\circ$ и $\mathbf{R}_{\alpha'}{}^\circ$, $\mathbf{N}^\circ$ имеют одноименную ориентацию. Для векторов базиса, коэффициентов квадратичных форм и символов Кристоффеля поверхности Σ, отнесенной к координатам x^α, будут справедливы следующие формулы:

$$\mathbf{R}_\alpha=\mathbf{R}_\alpha{}^\circ+Y_{,\alpha}\mathbf{N}^\circ,\qquad \mathbf{N}=\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2\,/\,\sqrt{G}=(\operatorname{sign}\Delta)\,\mathbf{N}^* \tag{1.4}$$

$$G_{\alpha\beta}=G_{\alpha\beta}{}^\circ+Y_{,\alpha}Y_{,\beta},\qquad G^{\alpha\beta}=G^{\circ\alpha\beta}+(G^\circ\,/\,G)\,G^{\circ\nu\alpha}G^{\circ\delta\beta}Y_{,\nu}Y_{,\delta}$$
$$(\operatorname{sign}\Delta)\,B_{\alpha\beta}=\sqrt{G^\circ\,/\,G}\,(Y_{,\alpha\beta}-\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\nu}Y_{,\nu})$$
$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\nu}=\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\nu}+(G^\circ\,/\,G)\,(Y_{,\alpha\beta}-\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\circ\tau}Y_{,\tau})\,G^{\circ\nu\mu}Y_{,\mu} \tag{1.5}$$

$$\mathbf{R}^\circ{}_\alpha=\mathbf{R}^\circ{}_{\alpha'}X^{\alpha'}{}_{,\alpha},\qquad \mathbf{R}^{\circ\alpha}=\mathbf{R}^{\circ\alpha'}x^\alpha{}_{\alpha'},\qquad G^\circ{}_{\alpha\beta}=\overset{\circ}{G}_{\alpha'\beta'}X^{\alpha'}{}_{,\alpha}X^{\beta'}{}_{,\beta},\qquad G^{\circ\alpha\beta}=G^{\circ\alpha'\beta'}x^\alpha{}_{\alpha'}x^\beta{}_{\beta'}$$

$$\Gamma^{\circ\nu}{}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\circ\nu'}_{\alpha'\beta'}X^{\alpha'}{}_{,\alpha}X^{\beta'}{}_{,\beta}x^\nu{}_{\nu'}+x^\nu{}_{\mu'}X^{\mu'}{}_{,\alpha\beta},\qquad x^1{}_{1'}=\Delta^{-1}X^{2'}{}_{,2}$$

$$x_{2'}{}^2=\Delta^{-1}X_{,1}{}^{1'},\quad x_{1'}{}^2=-\Delta^{-1}X_{,1}{}^{2'},\quad x_{2'}{}^1=-\Delta^{-1}X_{,2}{}^{1'},\quad \Delta=X_{,1}{}^{1'}X_{,2}{}^{2'}-X_{,2}{}^{1'}X_{,1}{}^{2'}$$
$$G=G_{11}G_{22}-G_{12}{}^2,\quad G^\circ=G_{11}{}^\circ G_{22}{}^\circ-G_{12}{}^{\circ2},\quad G/G^\circ=G'/G^{\circ\prime}=1+G^{\circ\alpha\beta}Y_{,\alpha}Y_{,\beta}$$

В формулах (1.5) величины $\mathbf{R}_{\alpha'}{}^\circ$, $\overset{\circ}{G}_{\alpha'\beta'}$, $\Gamma^{\circ\mu'}_{\alpha'\beta'}$ есть известные функции координат $X^{\alpha'}$, определяемые способом введения координат на плоскости П. В соответствии с установившейся в механике сплошной среды терминологией x^α можно назвать лагранжевыми, $X^{\alpha'}$ — эйлеровыми координатами деформирующейся поверхности.

Единичный вектор материальной нормали $\mathbf{N}$ к поверхности Σ следует отличать от вектора нормали $\mathbf{N}^*$, определяемого по (1.3) и удовлетворяющего условию $\mathbf{N}^*\cdot\mathbf{N}^\circ>0$. Вектор $\mathbf{N}$ может совпадать с вектором $\mathbf{N}^*$ или отличаться от него знаком.

2. Под упругой оболочкой будем понимать деформирующуюся поверхность, для которой удельная (на единицу площади в отсчетной конфигурации) потенциальная энергия имеет вид $W=W(G_{\alpha\beta},\,B_{\alpha\beta})$. Правая часть может параметрически зависеть от некоторых постоянных (т. е. не меняющихся в процессе деформации поверхности) тензоров, задающих тип анизотропии механических свойств оболочки. Таковыми являются, в частности, коэффициенты квадратичных форм $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ недеформированной поверхности σ.

Определяющие соотношения упругой оболочки можно записать в виде [1—4]:

$$\eta T^{\alpha\beta}=2\sqrt{g\,/\,G}\,\partial W\,/\,\partial G_{\alpha\beta},\qquad \eta M^{\alpha\beta}=-\sqrt{g\,/\,G}\,\partial W\,/\,\partial B_{\alpha\beta} \tag{2.1}$$

$\eta=1$ при $\alpha=\beta$, $\eta=2$ при $\alpha\neq\beta$, где $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ — компоненты симметричных тензоров усилий и моментов.

Пусть $\mathbf{F}=F^\alpha\mathbf{R}_\alpha+F\mathbf{N}$ — интенсивность распределенной по Σ внешней нагрузки, $\mathbf{L}=L^\alpha\mathbf{R}_\alpha+L\mathbf{N}$ — интенсивность распределенной по контуру S, ограничивающему Σ, внешней силы, $\mathbf{d}\times\mathbf{N}$ ($\mathbf{d}=d^\alpha\mathbf{R}_\alpha$) — интенсивность распределенного по S внешнего момента. Из соотношений (2.1) и принципа возможных перемещений

$$\delta\iint\limits_\sigma W\,d\sigma-\iint\limits_\Sigma \mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{R}\,d\Sigma-\oint\limits_S(\mathbf{L}\cdot\delta\mathbf{R}+\mathbf{d}\cdot\delta\mathbf{N})\,dS=0 \tag{2.2}$$

вытекают уравнения равновесия оболочки

$$\nabla_\alpha (T^{\alpha\beta} - M^{\alpha\delta} B_\delta^\beta) - B_\delta^\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\delta} + F^\beta = 0 \quad (\beta=1,2) \tag{2.3}$$
$$\nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta} (T^{\alpha\beta} - B_\delta^\alpha M^{\delta\beta}) + F = 0$$

где ∇_α — символ ковариантной производной на Σ.

Известно, что уравнения равновесия (2.3) можно получить из чисто статических соображений, рассматривая равновесие произвольного куска оболочки [5—8].

С учетом (2.3) вариационное уравнение (2.2) в случае гладкого контура S преобразуется к виду

$$\oint_S \Big\{ [m_\alpha (T^{\alpha\beta} - 2B_\delta^\beta M^{\alpha\delta}) - L^\beta + B_\alpha^\beta d^\alpha] \mathbf{R}_\beta \cdot \delta \mathbf{R} + \Big[m_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + \frac{d}{dS} (m_\beta t_\alpha M^{\alpha\beta}) -$$
$$- L - \frac{d}{dS} (t_\alpha d^\alpha) \Big] \mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R} - (m_\alpha m_\beta M^{\alpha\beta} - m_\alpha d^\alpha) \frac{\partial}{\partial m} (\mathbf{N} \cdot \delta \mathbf{R}) \Big\} dS = 0 \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{m} = m_\alpha \mathbf{R}^\alpha$, $\mathbf{t} = t_\alpha \mathbf{R}^\alpha = t^\alpha \mathbf{R}_\alpha$ — единичные векторы нормали и касательной к контуру S. Их можно выразить через единичные векторы нормали $\boldsymbol{\mu} = \mu_\alpha \mathbf{r}^\alpha$ и касательной $\boldsymbol{\tau} = \tau^\alpha \mathbf{r}_\alpha$ к граничному контуру s недеформированной поверхности σ [8]:

$$m_\alpha = \sqrt{G/g}\, \varepsilon^{-1} \mu_\alpha, \quad t^\beta = \varepsilon^{-1} \tau^\beta, \tag{2.5}$$
$$\varepsilon = dS/ds = \sqrt{\tau^\alpha \tau^\beta G_{\alpha\beta}} = \sqrt{(G/g) \mu_\alpha \mu_\beta G^{\alpha\beta}}$$

Если граничный контур свободен от закреплений, то из (2.4) получим силовые граничные условия. С использованием (2.5) их можно записать в виде

$$\sqrt{\frac{G}{g}} \mu_\alpha (T^{\alpha\beta} - 2B_\delta^\beta M^{\alpha\delta}) = \varepsilon (L^\beta - B_\alpha^\beta d^\alpha) \quad (\beta=1,2), \qquad \sqrt{\frac{G}{g}} \mu_\alpha \mu_\beta M^{\alpha\beta} = \varepsilon \mu_\alpha d^\alpha \tag{2.6}$$
$$\sqrt{\frac{G}{g}} \mu_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} + \frac{d}{ds} \left(\sqrt{\frac{G}{g}} \varepsilon^{-2} \tau^\delta \mu_\beta G_{\alpha\delta} M^{\alpha\beta} \right) = \varepsilon L + \frac{d}{ds} (\varepsilon^{-1} \tau^\delta d_\delta)$$

После подстановки определяющих соотношений (2.1) и представлений (1.4), (1.5) в (2.3) придем к системе трех дифференциальных уравнений для трех функций $X^{\alpha'}(x^\alpha)$, $Y(x^\alpha)$.

В случае оболочки из изотропного упругого материала удельная энергия W будет изотропной функцией тензоров $b_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta$, $G_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta$, $B_{\alpha\beta} \mathbf{r}^\alpha \mathbf{r}^\beta$, т. е. функцией следующих девяти совместных инвариантов указанных тензоров:

$$g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}, \quad (b_{11} b_{22} - b_{12}^2)/g, \quad G/g \tag{2.7}$$
$$(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)/g, \quad b^{\alpha\beta} G_{\alpha\beta}, \quad b^{\alpha\beta} B_{\alpha\beta}, \quad g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} G_{\alpha\gamma} B_{\beta\delta}$$

Из (2.1) и (2.7) вытекает следующее общее представление уравнений состояния изотропной упругой оболочки:

$$T^{\alpha\beta} = a_0 g^{\alpha\beta} + a_1 b^{\alpha\beta} + a_2 G^{\alpha\beta} + a_3 B^{\alpha\beta} \tag{2.8}$$
$$M^{\alpha\beta} = c_0 g^{\alpha\beta} + c_1 b^{\alpha\beta} + c_2 G^{\alpha\beta} + c_3 B^{\alpha\beta}$$

где a_i, c_i ($i=0, 1, 2, 3$) — некоторые функции инвариантов (2.7).

К виду (2.8) приводятся, в частности, определяющие соотношения оболочек из эластомеров [9].

3. Изложенный в п. 1 способ описания деформации оказывается удобным при постановке контактных задач для оболочек. Допустим, что некоторая часть оболочки соприкасается с абсолютно твердой гладкой поверхностью. Пренебрегая толщиной оболочки, будем считать, что с этой поверхностью непосредственно контактирует

срединная поверхность оболочки. Поэтому в области контакта $Y(X^{\alpha'})$ — заданная функция.

В области контакта первые два из уравнений равновесия (2.3) служат для нахождения двух функций $X^{\alpha'}(x^\alpha)$, а из третьего уравнения равновесия определяется контактное давление. При этом следует пользоваться представлениями (1.3), а величины $G_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\nu}$ находить через соответствующие величины, имеющими индексы со штрихами, с помощью формул типа (1.5). На неизвестной заранее границе зоны контакта должны выполняться условия сопряжения решения в области контакта с решением в области, свободной от контакта. Эти условия состоят в требовании непрерывности при переходе через границу функций $X^{\alpha'}(x^\alpha)$, $Y(x^\alpha)$ и производной функции Y по направлению нормали к контуру, ограничивающему зону контакта. Кроме того, должны быть непрерывны левые части первых трех из соотношений (2.6).

Условие непрерывности левой части последнего соотношения в (2.6), т. е. условие непрерывности перерезывающей силы не может быть удовлетворено в рамках рассматриваемого здесь варианта теории оболочек, не учитывающего деформацию поперечного сдвига. В этом можно убедиться на примере принудительного осесимметричного изгиба гладким жестким штампом оболочки вращения, однозначно проектирующейся на плоскость.

Пусть r и R — расстояние точки поверхности оболочки от оси вращения соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях. При осесимметричной деформации уравнения равновесия сводятся к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в области контакта $0\leqslant r<r_0$ неизвестными функциями будут $R(r)$ и контактное давление, а в области $r_0<r\leqslant a$, свободной от контакта, неизвестны $R(r)$ и $Y(r)$. При наличии осевой симметрии на краях оболочки, деформируемой заданной нагрузкой, должны быть поставлены три граничных условия (вместо четырех в общем случае). Поэтому общее решение системы уравнений равновесия в области $r_0<r\leqslant a$ содержит шесть произвольных постоянных. Уравнение для функции $R(r)$ в области контакта $0\leqslant r<r_0$ имеет третий порядок, т. е. решение в области контакта содержит три постоянные. Неизвестной величиной является также радиус зоны контакта r_0.

Для определения указанных десяти постоянных имеем следующие десять соотношений: три граничных условия при $r=a$, условие $R(0)=0$, требование ограниченности величины $R'(0)$, условия непрерывности при переходе через границу зоны контакта функций $R(r)$, $Y(r)$, $Y'(r)$, а также нормального к окружности $r=r_0$ мембранного усилия и изгибающего момента. Требование непрерывности при $r=r_0$ перерезывающего усилия, содержащее третьи производные функций $Y(r)$, $R(r)$, остается невыполненным. Заметим, что возможность разрыва перерезывающего усилия на границе области контакта, выражающаяся в появлении реакции со стороны штампа в форме сосредоточенной по линии нагрузки, хорошо известна в линейной теории оболочек и пластин, основанной на гипотезах Кирхгофа [10].

Рассмотрим задачу о контакте двух деформируемых оболочек при отсутствии трения. Лагранжевы координаты первой и второй оболочки обозначим соответственно x^α, ξ^α. Для каждой из оболочек фигурирующая в уравнениях равновесия нормальная составляющая нагрузки F состоит из заданного внешнего давления и реакции со стороны соприкасающейся оболочки. Эту часть нормальной нагрузки для первой оболочки обозначим $p(x^\alpha)$, для второй $\rho(\xi^\alpha)$. Неизвестными функциями в области контакта являются: для первой оболочки $X^{\alpha'}=\varphi^{\alpha'}(x^\alpha)$, $Y=U(x^\alpha)$, $p(x^\alpha)$; для второй оболочки $X^{\alpha'}=\psi^{\alpha'}(\xi^\alpha)$, $Y=V(\xi^\alpha)$, $\rho(\xi^\alpha)$.

Функции, задающие обратное преобразование (от эйлеровых координат к лагранжевым), обозначим Φ^α и Ψ^α: $x^\alpha=\Phi^\alpha(X^{\alpha'})$, $\xi^\alpha=\Psi^\alpha(X^{\alpha'})$. Для определения восьми неизвестных функций помимо шести уравнений равновесия (по три для каждой оболочки) служат два условия контакта. Первое из них выражает тот факт, что в области контакта обе оболочки лежат на одной поверхности в пространстве, т. е. возвышение Y — одна и та же функция эйлеровых координат для обеих оболочек $U[\Phi^\alpha(X^{\alpha'})]=V[\Psi^\alpha(X^{\alpha'})]$. Второе условие контакта выражает принцип действия и противодействия $p[\Phi^\alpha(X^{\alpha'})]=-\rho[\Psi^\alpha(X^{\alpha'})]$.

Таким образом, в постановке контактной задачи для двух оболочек кроме нелинейных дифференциальных операторов уравнений равновесия участвует операция обращения неизвестной функциональной зависимости.

4. В качестве опорных поверхностей для отсчетной и деформированной конфигураций оболочки не обязательно использовать плоскость. Если поверхность Σ однозначно проектируется на некоторую фиксированную поверхность Π, то положение точки на Σ можно задать функцией $Y(X^{\alpha'})$, где Y — расстояние от поверхности Π, отсчитанное по нормали к ней, $X^{\alpha'}$ — некоторые координаты на Π. Формулы, обобщающие (1.4) на случай, когда Π — произвольная гладкая поверхность, а поверхность Σ отнесена к координатам x^α, имеют вид

$$\mathbf{R}_\alpha=\mathbf{R}_\alpha{}^\circ+Y_{,\alpha}\mathbf{N}^\circ-YB_\alpha{}^{\circ\beta}\mathbf{R}_\beta{}^\circ \tag{4.1}$$

$$(\operatorname{sign}\Delta)\mathbf{N}=\sqrt{G^\circ/G}\,[A\mathbf{N}^\circ-(Y_{,\alpha}-2YH^\circ Y_{,\alpha}+YB_\alpha{}^{\circ\beta}Y_{,\beta})\mathbf{R}^{\circ\alpha}]$$
$$G_{\alpha\beta}=(1-Y^2K^\circ)G_{\alpha\beta}{}^\circ-2Y(1-YH^\circ)B_{\alpha\beta}{}^\circ+Y_{,\alpha}Y_{,\beta}$$
$$A=1-2YH^\circ+Y^2K^\circ,\qquad G/G^\circ=A^2+L^{\alpha\beta}Y_{,\alpha}Y_{,\beta}$$
$$G^{\alpha\beta}=(G^\circ/G)(L^{\alpha\beta}+e^{\circ\gamma\alpha}e^{\circ\delta\beta}Y_{,\gamma}Y_{,\delta})$$
$$L^{\alpha\beta}\equiv(1-Y^2K^\circ-4YH^\circ+4Y^2H^{\circ 2})G^{\circ\alpha\beta}+2Y(1-YH^\circ)B^{\circ\alpha\beta}$$
$$(\operatorname{sign}\Delta)B_{\alpha\beta}=A^{-1}\sqrt{G/G^\circ}\,[Y_{,\alpha\beta}-\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu Y_{,\mu}+(1-2YH^\circ)B_{\alpha\beta}{}^\circ+YK^\circ G_{\alpha\beta}{}^\circ]$$
$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^\mu={}^1/_2G^{\mu\delta}(G_{\alpha\delta,\beta}+G_{\beta\delta,\alpha}-G_{\alpha\beta,\delta})$$

Здесь H°, K° — соответственно средняя и гауссова кривизна поверхности П, $e^{\circ\gamma\alpha}$ — контравариантные компоненты дискриминантного тензора на П. В (4.1) величины $G_{\alpha\beta}{}^\circ$, $B_{\alpha\beta}{}^\circ$ и т. д. выражаются по формулам тензорных преобразований (1.5) через соответствующие величины, имеющие индексы со штрихами. Последние есть известные функции эйлеровых координат $X^{\alpha'}$. Вид этих функций определяется выбором поверхности П и способом введения координат $X^{\alpha'}$ на П. Например, $\overset{\circ}{B}_{\alpha'\beta'}$ — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности П, отнесенной к координатам $X^{\alpha'}$.

Формулы для отсчетной конфигурации оболочки с некоторой опорной поверхностью π, на которой введены лагранжевы координаты x^α, получаются из (4.1) при $\Delta=1$ и при замене прописных букв на строчные.

Рассмотрим оболочку, срединная поверхность которой в отсчетной конфигурации есть поверхность вращения. В качестве опорной поверхности для отсчетной и деформированной конфигураций оболочки возьмем круговой цилиндр радиуса r. За лагранжевы (эйлеровы) координаты примем расстояние, отсчитываемое по оси цилиндра $x^1=x$ $(X^{1'}=X)$ и угловую координату $x^2=\theta$ $(X^{2'}=\Theta)$. Таким образом, X, Θ — координаты на опорном цилиндре проекции той точки срединной поверхности деформированной оболочки, проекция которой в отсчетной конфигурации имела координаты x, θ. Через y и Y обозначим расстояние точки поверхности оболочки от опорного цилиндра соответственно в отсчетной и деформированной конфигурациях.

Рассмотрим деформацию оболочки, задаваемую соотношениями

$$X=X(x),\qquad Y=Y(x),\qquad \Theta=\theta+v(x) \tag{4.2}$$

Формулы (4.2) описывают кручение оболочки вращения, сопровождаемое осесимметричной деформацией. При этом деформированная срединная поверхность остается поверхностью вращения.

Для отсчетной конфигурации оболочки имеем

$$g_{11}=1+y'^2,\qquad g_{12}=0,\qquad g_{22}=y^2 \tag{4.3}$$
$$b_{11}=y''(1+y'^2)^{-1/2},\quad b_{12}=0,\quad b_{22}=-y(1+y'^2)^{-1/2}$$

Здесь и далее штрих означает дифференцирование по координате x.

Для коэффициентов квадратичных форм и символов Кристоффеля деформированной оболочки, отнесенной к координатам x, θ, по формулам (4.1) получим

$$G_{11}=D^2+Y^2v'^2,\qquad G_{22}=Y^2,\qquad G_{12}=Y^2v' \tag{4.4}$$
$$G^{11}=D^{-2},\qquad G^{22}=Y^{-2}+D^{-2}v'^2,\qquad G^{12}=-D^2v'$$
$$B_{11}=D^{-1}(-X''Y'+X'Y''-YX'v'^2),\qquad B_{12}=-D^{-1}YX'v'$$
$$B_{22}=-D^{-1}YX',\qquad D=\sqrt{X'^2+Y'^2}$$
$$\Gamma_{11}{}^1=D^{-2}(X'X''+Y'Y''-YY'v'^2),\qquad \Gamma_{12}{}^1=-D^{-2}YY'v'$$
$$\Gamma_{11}{}^2=D^{-2}[-v'X'X''-v'Y'(Y''-Yv'^2)],\qquad \Gamma_{22}{}^1=-D^{-2}YY'$$
$$\Gamma_{12}{}^2=Y^{-1}Y'+D^{-2}YY'v'^2,\qquad \Gamma_{22}{}^2=D^{-2}YY'v'$$

Несмотря на то что соотношения (4.1) не применимы непосредственно для случая $r=0$, в окончательных выражениях можно положить $r=0$, что и сделано в (4.3), (4.4).

В случае, когда $\Delta=X'<0$, соотношения (4.2) задают деформацию кручения и осесимметричного изгиба вывернутой наизнанку оболочки вращения.

Из определяющих соотношений (2.8) и формул (4.3), (4.4) вытекает, что для изотропной однородной (или неоднородной по координате x) оболочки компоненты тензоров усилий и моментов $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ зависят лишь от координаты x. Так как входящие в выражения ковариантных производных символы Кристоффеля деформированной оболочки также не зависят от координаты θ, то система уравнений равновесия (2.3) превращается в систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций X, Y, v. При этом компоненты внешней нагрузки F^{β}, F могут зависеть лишь от координаты x. В противном случае деформация вида (4.2) нереализуема.

Заметим, что в нелинейной теории кручение оболочки вращения сопровождается изгибом ее меридиана. Таким образом, наблюдаемое в линейной теории изотропных оболочек [11] разделение задачи на две независимых (кручение и осесимметричная деформация) не имеет места при конечных углах закручивания.

В случае изотропной однородной цилиндрической оболочки ($y=\text{const}=y_0$) и внешней нагрузки в виде равномерного нормального давления рассматриваемая система уравнений допускает такое решение

$$Y=Y_0, \quad X=\lambda x, \quad v=\varphi x \tag{4.5}$$

где Y_0, λ, φ — некоторые постоянные.

Действительно, как следует из (2.8), (4.3), (4.4), в этом случае величины $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$ будут постоянными. Так как символы Кристоффеля деформированной поверхности, согласно (4.4), будут равны нулю, то первые два уравнения равновесия из (2.3) при $F^{\beta}=0$ обращаются в тождества, а левая часть третьего уравнения равновесия будет постоянной. Для определения трех постоянных Y_0, λ, φ имеем следующие соотношения: третье уравнение равновесия, задание крутящего момента в сечении оболочки, задание осевой силы, действующей в поперечном сечении цилиндра. Для оболочки конечной длины при отсутствии краевой поперечной нагрузки L последнее граничное условие из (2.6) выполняется тождественно. Третье краевое условие в (2.6), вообще говоря, не может быть удовлетворено решением (4.5) при $d^{\alpha}=0$. Это означает, что реализация деформации кручения, раздувания и растяжения цилиндрической оболочки, задаваемой соотношениями (4.5), требует приложения равномерно распределенного по окружности торцов цилиндра внешнего изгибающего момента.

Пусть оболочка в отсчетной конфигурации представляет собой цилиндрическую панель, т. е. сектор круговой цилиндрической оболочки радиуса y_0. Рассмотрим следующую деформацию панели:

$$Y=Y_0, \quad X=cx+d\theta, \quad \Theta=ex+h\theta \tag{4.6}$$

где c, d, e, h, Y_0 — постоянные. Выражения (4.6) включают в себя следующие виды деформаций: раздувание (с выворачиванием, если $\Delta<0$), изгиб, кручение, растяжение, сдвиг вдоль образующих цилиндра.

Пусть по-прежнему опорной поверхностью для отсчетной конфигурации оболочки служит круговой цилиндр, а опорная поверхность деформированной конфигурации представляет собой плоскость, в которой введены декартовы координаты $X^{1'}$, $X^{2'}$. Рассмотрим деформацию панели, задаваемую линейными соотношениями

$$Y=Y_0, \quad X^{1'}=cx+d\theta, \quad X^{2'}=ex+h\theta \tag{4.7}$$

Деформация (4.7) представляет собой выпрямление цилиндрической панели в плоский лист в сочетании со сдвигом и растяжением.

Наконец, рассмотрим изгиб, растяжение и сдвиг плоского листа, т. е. деформацию вида

$$Y=Y_0,\quad X=cx^1+dx^2,\quad \Theta=ex^1+hx^2 \tag{4.8}$$

Здесь x^1, x^2 — декартовы координаты в плоскости недеформированного листа, Y, Θ, X — как и в (4.6), цилиндрические координаты деформированной конфигурации.

Исходя из формул (1.5), (4.1) для деформаций вида (4.6)—(4.8) получим

$$\begin{gathered} G_{11}=c^2+Y_0{}^2e^2,\quad G_{12}=cd+Y_0eh,\quad G_{22}=d^2+Y_0{}^2h^2 \\ B_{11}=-Y_0e^2,\quad B_{12}=-Y_0eh,\quad B_{22}=-Y_0h^2,\quad \Gamma_{\alpha\beta}{}^{\nu}=0 \end{gathered} \tag{4.9}$$

Так как коэффициенты квадратичных форм деформированной оболочки, отнесенной к лагранжевым координатам, постоянны, а все символы Кристоффеля равны нулю, то на деформациях вида (4.6)—(4.8) уравнения равновесия для однородных изотропных оболочек будут тождественно удовлетворяться в случае, когда внешняя поверхностная нагрузка сводится к равномерному нормальному давлению (которое, в частности, может равняться нулю).

Выражения (4.6)—(4.8) можно назвать универсальными решениями для однородных упругих изотропных оболочек, так как они удовлетворяют уравнениям равновесия оболочек, изготовленных из произвольного изотропного нелинейно-упругого материала. Реализация деформаций (4.6)—(4.8) не требует приложения к оболочке поверхностных нагрузок (можно, но не обязательно, прикладывать равномерное нормальное давление), а достигается за счет сил, распределенных по контуру оболочки.

Кроме обсужденной выше задачи кручения цилиндрической оболочки можно отметить еще некоторые прикладные задачи, непосредственно связанные с универсальными решениями (4.6)—(4.8). Положив в соотношениях (4.8) $c=1$, $d=a(2\pi Y_0)^{-1}$, $e=0$, $h=Y_0{}^{-1}$, получим деформацию, реализуемую при навивке полосы шириной a на цилиндр радиуса Y_0. Такая деформация встречается при изготовлении сварных труб со спиральным швом. Если в формулах (4.6) принять $c=1$, $d=(2\pi)^{-1}a$, $e=0$, $h=1$, то получим задачу о винтовой дислокации в длинной цилиндрической оболочке. В этом случае оболочка разрезается по образующей, края разреза сдвигаются один относительно другого на расстояние a в направлении оси цилиндра и вновь скрепляются.

Если по-прежнему $d=(2\pi)^{-1}a$, $h=1$, а c и e — некоторые произвольные постоянные, то имеем задачу растяжения, раздувания и кручения цилиндрической оболочки, предварительно подвергнутой винтовой дислокации. Напряженное состояние оболочки в указанных задачах о конечных деформациях вычисляется по формулам (2.8), (4.9).

Заметим, что определяющие соотношения вида (2.8) для тензоров усилий и моментов не всегда целесообразно выводить путем осреднения по толщине оболочки определяющих уравнений трехмерной сплошной среды, привлекая, например, кинематическую и статическую (пренебрежение поперечным нормальным напряжением) гипотезы Кирхгофа — Лява. Это обусловлено, с одной стороны, тем, что для сложных нелинейных определяющих соотношений (особенно в случае неупругих тел) указанную процедуру не удается выполнить в явном виде, а с другой стороны, тем, что определяющие соотношения в трехмерном варианте часто бывают неизвестны или известны с низкой степенью точности. Кроме того, в процессе изготовления материал оболочки может претерпеть качественные изменения. Таким образом, в ряде случаев имеются основания для экспериментального построения определяющих соотношений оболочек путем испытаний тонкостенных образцов — элементов оболочки. Поскольку деформации вида (4.6)—(4.8) являются универсальными решениями в классе изотропных оболочек, их можно использовать при экспериментальном построении определяющих уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галимов К. З.* К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях. — ПММ, 1951, т. 15, вып. 6, с. 723–742.
2. *Koiter W. T.* On the nonlinear theory of thin elastic shells. — Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wet., 1966, Sez. B, v. 69, No. 1, p. 33—54.
3. *Зубов Л. М.* Кинематика деформирующейся поверхности и ее приложение к механике оболочек. — Изв. Сев.-Кавказ. научн. центра высш. школы. Сер. естеств. наук, 1973, № 4, с. 26–29.
4. *Pietraszkiewicz W.* Introduction to the nonlinear theory of shells. Gdansk: Mit. Inst. Mech., 1977. 154 p.
5. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 431 с.
6. *Лурье А. И.* Об уравнениях общей теории упругих оболочек. — ПММ, 1950, т. 14, вып. 5, с. 558–560.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. *Галимов К. З.* Основы нелинейной теории тонких оболочек. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. 326 с.
9. *Черных К. Ф.* Нелинейная теория изотропно-упругих тонких оболочек. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 148—159.
10. *Григолюк Э. И., Толкачев В. М.* Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415 с.
11. *Чернина В. С.* Статика тонкостенных оболочек вращения. М.: Наука, 1968. 455 с.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию 10.XII.1980