

УДК 539.375

ПЛОСКОПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ КОНЦА ТРЕЩИНЫ

КУЗЕМКО В. А., РУСИНКО К. Н.

Рассматривается упругопластическое тело с трещиной нормального разрыва в момент ее страгивания в условиях квазистатического режима. Используются соотношения теории скольжения [1]. Асимптотическое решение задачи строится методом малого параметра. Оценивается зависимость показателя особенности от упругопластических свойств материала. Аналогичная задача для трещины продольного сдвига изучалась в [2].

1. Рассмотрим однородное изотропное тело с трещиной нормального разрыва. Материал тела предполагается упругопластическим, упрочняющимся, несжимаемым, деформированное состояние — плоским (в плоскости xoy). Трещина представляет разрез нулевой толщины вдоль оси x . При увеличении нагрузки трещина претерпевает приращение длины на δl . Необходимо определить напряженно-деформированное состояние в окрестности конца трещины.

Для решения задачи используется вариант теории скольжения для плоского тела [1]. Примем за координаты в двумерном пространстве напряжений величины $Q_2 = \sigma_{xy}$, $Q_1 = 1/2(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})$ (считаем, что компоненты тензора напряжений связаны соотношением $\sigma_{zz} = 1/2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$), соответствующие деформациям $q_1 = 1/2(\varepsilon_{xx}^p - \varepsilon_{yy}^p)$ и $q_2 = \varepsilon_{xy}^p$, которые определим суммированием

$$\mathbf{q} = \int F(Q) (\mathbf{e}_1 \cos \lambda - \mathbf{e}_2 \sin \lambda) d\lambda, \quad Q^2 = Q_1^2 + Q_2^2 \quad (1.1)$$

$$\omega = 1/2 \arctg(dq_1/dq_2), \quad \mathbf{e}_1 = \mathbf{i} \cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta, \quad \mathbf{e}_2 = -\mathbf{i} \sin \beta + \mathbf{j} \cos \beta \\ Q_1 = Q \cos \beta, \quad Q_2 = Q \sin \beta, \quad \lambda = 2\omega + \beta - \pi/2, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2\} \quad (1.2)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} — орты осей Q_1 , Q_2 ; β — угол нагружения, Q — интенсивность напряжений. При этом интегрирование распространяется на те значения λ , для которых $Q > \tau_s$, т. е. $|\lambda| \leq \lambda_1$, где λ_1 определяется из уравнения $\cos \lambda_1 = \tau_s/Q$ (τ_s — предел текучести на сдвиг).

Для догрузки δQ , составляющей угол α с вектором \mathbf{e}_2 , формула для приращения вектора пластической деформации будет иметь вид

$$\delta \mathbf{q} = \frac{1}{4} \int_a^b F'(Q) \delta Q \sin(\alpha - \lambda) (\mathbf{e}_1 \cos \lambda - \mathbf{e}_2 \sin \lambda) d\lambda \quad (1.3)$$

Для активного процесса пределы интегрирования в (1.3) определяются условиями:

$$a = -\lambda_1, \quad b = \alpha \quad (\alpha \in [-\lambda_1, \lambda_1]); \quad a = -\lambda_1, \quad b = \lambda_1 \quad (\alpha > \lambda_1) \quad (1.4)$$

и отвечают областям неполного и полного нагружения. При $\alpha \leq -\lambda_1$ происходит упругая разгрузка.

Положим, что упрочнение материала определяется функцией $F(Q) = c(Q - \tau_s)$, $c = \text{const}$. Интегрируя (1.1), с учетом несжимаемости материала получим

$$\varepsilon_{xx}^p = -\varepsilon_{yy}^p = c(\lambda_1 Q - \tau_s \sin \lambda_1) \cos \beta, \quad \varepsilon_{xy}^p = c(\lambda_1 Q - \tau_s \sin \lambda_1) \sin \beta$$

Добавляя сюда упругие компоненты деформаций $\varepsilon_{xx}^y = -\varepsilon_{yy}^y = \frac{3}{4}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})/E$, $\varepsilon_{xy}^y = \frac{1}{2}\sigma_{xy}/G$, получим связь интенсивностей деформаций и напряжений в виде

$$\gamma = Q[2cG(\lambda_1 - (\tau_s/Q) \sin \lambda_1) + 1]/G \quad (1.5)$$

причем при $\gamma \rightarrow \infty$

$$Q(\gamma) \rightarrow G/(1+2\mu), \quad 2\mu = G/g, \quad g = 1/(\pi c) \quad (1.6)$$

Интегрируя (1.3) с учетом (1.4), получим

$$\delta q_1 = \frac{1}{8} c \delta Q [(\alpha + \lambda_1) \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \lambda_1) \sin(\beta + \lambda_1)] \quad (1.7)$$

$$\delta q_2 = \frac{1}{8} c \delta Q [(\alpha + \lambda_1) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \lambda_1) \cos(\beta + \lambda_1)] \quad (\alpha \in [-\lambda_1, \lambda_1])$$

$$\delta q_1 = \frac{1}{8} c \delta Q [2\lambda_1 \sin(\alpha - \beta) + \sin 2\lambda_1 \sin(\alpha + \beta)] \quad (1.8)$$

$$\delta q_2 = \frac{1}{8} c \delta Q [2\lambda_1 \cos(\alpha - \beta) - \sin 2\lambda_1 \cos(\alpha + \beta)] \quad (\alpha > \lambda_1)$$

Очевидно, связь приращений напряжений и деформаций в зоне полного нагружения дифференциально линейна в отличие от зоны неполного нагружения вследствие наличия в уравнениях (1.7) явным образом величины

$$\alpha = \text{arctg}(\delta Q_1 / \delta Q_2) + \beta \quad (1.9)$$

2. Вследствие линейности асимптотики диаграммы (1.6) главный член поля напряжений имеет вид [3]:

$$\sigma_{xx} = K_0 r^{-1/2} (\cos^{1/2} \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \sin^{3/2} \varphi) \quad (2.1)$$

$$\sigma_{yy} = K_0 r^{-1/2} (\cos^{1/2} \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \sin^{3/2} \varphi), \quad \sigma_{xy} = \frac{1}{2} K_0 r^{-1/2} \sin \varphi \cos^{3/2} \varphi$$

где K_0 — коэффициент интенсивности напряжений. Отсюда с учетом (1.1) следует, что $\beta = \pi/2 + \frac{3}{2}\varphi$.

Пусть приращение длины трещины на δl , определяемое увеличением K_0 , вызывает перераспределение напряжений и деформаций согласно (1.7), (1.8). Тогда при $\delta l \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$ из (1.1) при помощи (2.1) находим, что $Q \rightarrow \infty$, $\lambda_1 \rightarrow \pi/2$. Следовательно, зона неполного нагружения реализуется для всех углов догрузки, кроме лучей $\alpha = \pm \pi/2$, которые соответствуют вырожденным областям полного нагружения и разгрузки.

Пренебрегая в (1.6) бесконечно малыми высших порядков и переходя к полярной системе координат (полюс в конце трещины), при помощи (1.6), (1.7) получим

$$\delta \varepsilon_\varphi = -\delta \varepsilon_r = \frac{1}{4} (\delta \sigma_\varphi - \delta \sigma_r) / G - \mu \delta Q f_1(\alpha, \varphi) / G, \quad \delta \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \delta \sigma_{r\varphi} / G + \mu \delta Q f_2(\alpha, \varphi) / G \quad (2.2)$$

$$f_1(\alpha, \varphi) = \frac{1}{4} [-(\alpha + \pi/2) \cos(\alpha + \varphi/2) + \cos \alpha \sin^{1/2} \varphi] / \pi$$

$$f_2(\alpha, \varphi) = \frac{1}{4} [(\alpha + \pi/2) \sin(\alpha + \varphi/2) + \cos \alpha \cos^{1/2} \varphi] / \pi$$

Переходя от приращений к скоростям, подставим выражения (2.2) в уравнение совместности деформаций, которое в полярной системе координат имеет вид (точкой обозначено дифференцирование по безразмерному параметру нагружения)

$$-\frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \varepsilon_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.3)$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{4} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \sigma_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{3}{4} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) -$$

$$- \frac{1}{4} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r - \sigma_\varphi) = -\mu L(f_1, f_2) \quad (2.4)$$

$$L(f_1, f_2) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Q' f_1) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} (Q' f_2) + \frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (Q' f_2) + \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} (Q' f_1) -$$

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (Q' f_1)$$

Введем функцию Эри согласно формулам $\sigma_{xx} = \partial^2 U / \partial y^2$, $\sigma_{yy} = \partial^2 U / \partial x^2$, $\sigma_{xy} = -\partial^2 U / \partial x \partial y$. Учитывая, что теперь

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}$$

из (2.4) следует (Δ — оператор Лапласа)

$$\Delta \Delta U = 4\mu L(f_1, f_2) \quad (2.5)$$

Запишем граничные условия для случая свободных от усилий берегов и условия симметрии: $\sigma_{xy} = 0$ при $\varphi = 0$; $\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$ при $\varphi = \pi$; $\partial \sigma_{xx} / \partial \varphi = 0$, $\partial \sigma_{yy} / \partial \varphi = 0$ при $\varphi = 0$. Отсюда следует

$$\partial U / \partial \varphi = 0, \quad \partial^3 U / \partial \varphi^3 = 0 \quad \text{при } \varphi = 0 \quad (2.6)$$

$$U = 0, \quad \partial U / \partial \varphi = 0 \quad \text{при } \varphi = \pi$$

Решение краевой задачи (2.5), (2.6) ищем методом малого параметра [2]. Полагая в нулевом приближении $\mu = 0$, $U_0 = r^m T_0(\varphi)$, при помощи (2.5) получим

$$T_0^{IV} + 2(m^2 - 2m + 2)T_0'' + m^2(m - 2)^2 T_0 = 0 \quad (2.7)$$

Общее решение уравнения (2.7) определяется выражением

$$T_0 = A_1 \cos(m - 2)\varphi + A_2 \sin(m - 2)\varphi + A_3 \cos m\varphi + A_4 \sin m\varphi \quad (2.8)$$

Постоянные интегрирования A_i ($i = 1, 4$) определяются из граничных условий (2.6).

$$A_2 = A_4 = 0, \quad A_3 = -(m - 2)A_1 / m \quad (m = 1/2) \quad (2.9)$$

Нетрудно заметить, что система (2.6) удовлетворяется при $m = \pm \pi n / 2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Однако при $m < 1/2$ ($n < 1$) перемещения в конце трещины оказываются бесконечно большими, что невозможно, поэтому $m \geq 1/2$. Члены, соответствующие $m > 1/2$, являются малыми высших порядков относительно члена с $m = 1/2$ при $r \rightarrow 0$, поэтому в окрестности конца трещины ими пренебрегаем.

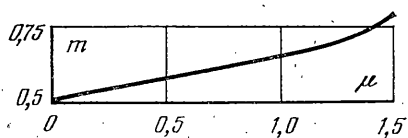
Подчиняя решение (2.8) условию нормировки $T(0) = 1$, с учетом (2.9) получим

$$T_0(\varphi) = 1/4 (\cos^3 1/2 \varphi + 3 \cos 1/2 \varphi) \quad (2.10)$$

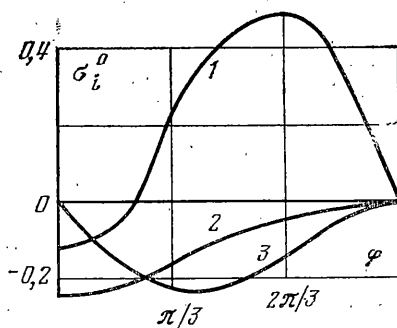
Ограничиваясь случаем слабой нелинейности $\mu = o(1)$, из выражения (1.9) находим $\alpha = -\varphi + \pi/2$. Подставляя найденные значения T_0 и α в правую часть уравнения (2.5) и обозначая первое приближение через $U_1(r, \varphi) = r^m T_1(\varphi)$, получим уравнение для $T_1(\varphi)$:

$$T_1^{IV} + 2[(m - 1)^2 + 1]T_1'' + m^2(m - 2)^2 T_1 =$$

$$= 3/2 \mu (2 \sin^5 1/2 \varphi + \sin^3 1/2 \varphi - \sin 1/2 \varphi) / \pi \quad (2.11)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned}
 T_1(\varphi) = & B_1 \cos(m-2)\varphi + B_2 \sin(m-2)\varphi + B_3 \cos m\varphi + \\
 & + B_4 \sin m\varphi + a_1 \sin^{5/2}\varphi + a_2 \sin^{3/2}\varphi + a_3 \sin^{1/2}\varphi \\
 a_1 = & 3\mu [(m^{-3/2})(m^{5/2})(m^{-5/2})(m^{1/2})]^{-1} / \pi \\
 a_2 = & {}^{3/2}\mu [(m^{-7/2})(m^{3/2})(m^{-3/2})(m^{-1/2})]^{-1} / \pi \\
 a_3 = & -{}^{3/2}\mu [(m^{-5/2})(m^{1/2})(m^{-1/2})(m^{-3/2})]^{-1} / \pi
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для определения постоянных интегрирования B_i ($i=1, 4$) и связи $m(\mu)$ имеем четыре граничных условия (2.6) и условие нормировки, из которых следует:

$$\begin{aligned}
 B_1 = & m / 2 - {}^{1/2}\Psi_1 \operatorname{ctg} m\pi, \quad B_2 = -[m(\cos m\pi - \Psi_2) / \sin m\pi + \Psi_1] / 2 \\
 B_3 = & (2 - m + \Psi_1 \operatorname{ctg} m\pi) / 2, \quad B_4 = [(m-2)(\cos m\pi - \Psi_2) / \sin m\pi + \Psi_1] / 2
 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Характеристическое уравнение относительно m имеет вид

$$\begin{aligned}
 2m(m-1)(m-2)(\cos m\pi - \Psi_2) / \sin m\pi + 3\Psi_1(m^2 - 2m^{4/3}) = \Psi_3 \\
 \Psi_1 = -{}^{1/2}(5a_1 + 3a_2 + a_3), \quad \Psi_2 = -a_1 + a_2 - a_3, \quad \Psi_3 = -{}^{1/8}(125a_1 + 27a_2 + a_3)
 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для $\mu=0$ (упругое тело) из (2.14), (2.12) находим $m=1/2$, $T_1=T_0$ и решение (2.12) является точным. Зависимость $m(\mu)$, найденная численно из (2.14), приведена на фиг. 1. Для малых μ положим в (2.14) $m=1/2+\varepsilon(\mu)$ ($\varepsilon=o(1)$), откуда $\varepsilon(\mu)=8\mu/(3\pi^2)$, что свидетельствует об уменьшении порядка особенности по напряжениям. На фиг. 2 изображены графики зависимостей $\sigma_i^0=\sigma_i/r^{m-2}$ от угла φ (здесь номера кривых $i=1, 2, 3$ соответствуют индексам $r, \varphi, r\varphi$), вычисленные при $m=0,6$ согласно (2.12), (2.14). При данном выборе m эти кривые мало отличаются от соответствующих кривых в случае упругого тела. При увеличении m это отличие будет значительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Ибрагимов В. А., Ключников В. Д. О влиянии деформационной анизотропии на состояние в окрестности конца трещины. — ПММ, 1977, т. 41, вып. 5, с. 943–948.
3. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.

Львов

Поступила в редакцию
6.VII.1981