

УДК 539.374

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

МАЙБОРОДА В. П., ТРОЯНОВСКИЙ И. Е.

В [1] статические и динамические задачи для многослойных, в частности вязкоупругих, конструкций ставятся и решаются в рамках теории многослойных оболочек.

В публикуемой работе к постановке задачи о собственных колебаниях неоднородных, в том числе и слоистых вязкоупругих конструкций привлекаются трехмерные уравнения линейной теории термовязкоупругости. Устанавливаются новые возможности демпфирования за счет неоднородности.

1. Постановка задачи. Рассматривается составное тело, занимающее объем $V = \sum V_n$ ($n=1, 2, \dots, N$), ограниченное поверхностью $\Sigma = \Sigma_u + \Sigma_p$. Каждый из N объемов V_n заполнен вязкоупругой средой, параметры которой зависят от номера n . На части поверхности Σ_u заданы нулевые перемещения, на Σ_p — нулевые напряжения, массовые силы отсутствуют. Подлежат определению частоты и показатели демпфирования собственных колебаний тела. Физические свойства материала n -го тела описываются соотношениями [2]:

$$\sigma_{ij} = \lambda_n \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu_n \varepsilon_{ij} \quad (i, j, k=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N) \quad (1.1)$$

$$\lambda_n \dot{\varphi} = \lambda_n \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\lambda n}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (1.2)$$

$$\mu_n \dot{\varphi} = \mu_n \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{\mu n}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right]$$

где σ_{ij} , ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций, λ_n , μ_n — операторы Вольтерра, λ_n , μ_n , $R_{\lambda n}$, $R_{\mu n}$ — параметры Ламе и ядра релаксации среды, занимающей объем V_n , φ — произвольная функция времени. Предполагается малость интегральных членов в (1.2).

Пусть в (1.2) $\varphi(t) = \psi(t) \exp(-i\omega_R t)$, где ω_R — действительная константа, ψ — медленно меняющаяся функция. При помощи метода замораживания [3] вместо (1.2) можно записать приближенные соотношения

$$\lambda_n \dot{\varphi} = \lambda_n^0 \varphi = \lambda_n [1 - \Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) - i\Gamma_{\lambda n}^s(\omega_R)] \varphi$$

$$\mu_n \dot{\varphi} = \mu_n^0 \varphi = \mu_n [1 - \Gamma_{\mu n}^c(\omega_R) - i\Gamma_{\mu n}^s(\omega_R)] \varphi$$

$$\Gamma_{\lambda n}^c(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\lambda n}(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau, \quad \Gamma_{\lambda n}^s = \int_0^{\infty} R_{\lambda n}(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau$$

$$\Gamma_{\mu n}^c(\omega_R) = \int_0^{\infty} R_{\mu n}(\tau) \cos(\omega_R \tau) d\tau, \quad \Gamma_{\mu n}^s = \int_0^{\infty} R_{\mu n}(\tau) \sin(\omega_R \tau) d\tau$$

К постановке задачи о собственных колебаниях системы привлекаются однородные уравнения движения

$$\mu_n^\circ \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + (\lambda_n^\circ + \mu_n^\circ) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} - \rho_n \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad (x \in V_n) \quad (1.3)$$

и граничные условия

$$u_i = 0 \quad (x \in \Sigma_u) \quad (i, j, k=1, 2, 3; n=1, 2, \dots, N)$$

$$\left[\lambda_n^\circ \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu_n^\circ \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] v_j = 0 \quad (x \in \Sigma_p) \quad (1.4)$$

где ρ_n — плотность материала n -го тела, v_j — компоненты нормали к поверхности Σ_p , $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки тела, u_i — компоненты вектора смещения. На границах раздела объемов V_n предполагается непрерывность компонент вектора смещения и нормальных, и касательных к поверхности раздела напряжений.

Решение задачи (1.3), (1.4) ищется в виде

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \vartheta_i(x_1, x_2, x_3) \exp(i\omega t) \quad (1.5)$$

где $\omega = \omega_R + i\omega_I$ — комплексная собственная частота, ϑ_i — комплексная собственная форма колебаний, определяемые из задачи на собственные значения вида

$$\mu_n^\circ(\omega_R) \frac{\partial^2 \vartheta_i}{\partial x_j \partial x_j} + \left[\lambda_n^\circ(\omega_R) + \mu_n^\circ(\omega_R) \frac{\partial^2 \vartheta_j}{\partial x_i \partial x_j} + \rho_n \omega^2 \right] \vartheta_i = 0, \quad \vartheta_i = 0 \quad (x \in \Sigma_n)$$

$$\left[\lambda_n(\omega_R) \frac{\partial \vartheta_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu(\omega_R) \left(\frac{\partial \vartheta_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \vartheta_j}{\partial x_i} \right) \right] \vartheta_j = 0 \quad (x \in \Sigma_p) \quad (1.6)$$

2. Собственные колебания неоднородных вязкоупругих систем с конечным числом степеней свободы. Рассматривается система с конечным числом степеней свободы, состоящая из конечного числа материальных точек и абсолютно твердых тел, соединенных между собой безмассовыми вязкоупругими элементами. Если структура системы однородна и реологические характеристики элементов одинаковы, то указанная система представляет собой конечно-мерную модель однородной системы с распределенными параметрами; в некотором смысле непрерывно-неоднородной системы и различных реологических характеристик элементов рассматриваемая система моделирует неоднородную систему с распределенными параметрами. Подлежат определению собственные частоты и коэффициенты демпфирования собственных колебаний.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид

$$\sum_{i=1}^n (a_{kl} q_i'' + C_{kl} \dot{q}_i) = 0 \quad (2.1)$$

где a_{kl} — симметричная положительно-определенная матрица обобщенных масс, q_i — обобщенные координаты, n — число степеней свободы, C_{kl} — симметричная матрица, элементы которой суть операторы Вольтерра вида

$$C_{kl} \dot{q} = C_{kl} \left[\varphi(t) - \int_0^t R_{kl}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (2.2)$$

где C_{kl} — элементы симметричной положительно-определенной матрицы мгновенных обобщенных жесткостей, R_{kl} — элементы неотрицательно-определенной матрицы обобщенных ядер релаксации, φ — произвольная

функция времени. Суммирование по повторяющимся индексам в (2.2) и далее в этом разделе не предполагается.

В случае однородной системы (все элементы изготовлены из одного вязкоупругого материала и описываются одинаковыми ядрами релаксации, но различными мгновенными жесткостями вследствие различных размеров) все ядра релаксации в (2.2) оказываются одинаковыми $R_{kl}=R$. Следовательно, матрица обобщенных операторных жесткостей представляет собой положительно-определенную действительную числовую матрицу, умноженную на операторный скаляр. Отсюда следует, что в нормальных координатах ϑ_k упругой задачи система (2.1) приобретает вид

$$\vartheta_k'' + \Omega_k^2 \left[\vartheta_k - \int_0^t R(t-\tau) \vartheta_k(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (2.3)$$

где Ω_k — собственная частота колебаний упругой системы. Система (2.3) распалась на отдельные уравнения, что с механической точки зрения означает независимость изменения различных нормальных координат при свободных колебаниях.

В случае неоднородной системы (ее деформируемые элементы обладают различными реологическими характеристиками, в частности, некоторые из них могут быть упругими) ситуация меняется. Операторные коэффициенты C_{kl} в (2.1) теперь представляют собой суммы двух матриц — числовой и операторной

$$C_{kl} \sim C_{kl} + B_{kl} \circ, \quad B_{kl} \varphi = C_{kl} + \int_0^t R_{kl}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$$

Три симметричные матрицы a_{kl} , B_{kl} , C_{kl} не могут, вообще говоря, приводиться к диагональному виду одним невырожденным преобразованием. Поэтому в случае неоднородной системы уравнения Лагранжа в нормальных координатах ϑ_k не распадаются, а имеют вид

$$\vartheta_k'' + \Omega_k^2 \left[\vartheta_k - \sum_{l=1}^n \int_0^t R_{kl} \sim(t-\tau) \vartheta_l(\tau) d\tau \right] = 0 \quad (2.4)$$

где $R_{kl} \sim$ — симметричная неотрицательно-определенная матрица обобщенных ядер релаксации в нормальных координатах упругой задачи.

С механической точки зрения математические различия систем (2.3) и (2.4) можно интерпретировать как факт взаимного влияния нормальных координат неоднородной системы при свободных колебаниях. Это взаимное влияние, которым, как правило, пренебрегают [1, 4], имеет, как будет показано ниже, далеко идущие физические следствия и открывает возможность демпфирования за счет неоднородности.

Решение задачи о собственных колебаниях системы, описываемой уравнениями (2.1), осуществлялось в данной работе следующим образом. На основании результатов п.1 операторы $C_{kl} \sim$ в (2.1) заменялись комплексными обобщенными жесткостями $C_{kl} \circ = C_{kl} [1 - \Gamma_{kl} \circ(\omega_R) - i\Gamma_{kl} \circ(\omega_R)]$. Далее, частное решение системы (2.1) искалось в виде $q_k = u_k \exp(i\omega t)$, где ω — искомая комплексная собственная частота, u_k — компоненты искомой комплексной собственной формы колебаний. Для последних имеет место однородная линейная алгебраическая система с нелинейно входящим комплексным параметром.

Характеристическое уравнение задачи о собственных значениях имеет вид

$$\det \{ C_{kl} [1 - \Gamma_{kl} \circ(\omega_R) - i\Gamma_{kl} \circ(\omega_R)] - \omega^2 a_{kl} \} = 0 \quad (2.5)$$

Корни уравнения (2.5) определялись методом Мюллера [5], в качестве начального приближения принимались собственные частоты упругой задачи, значение левой части (2.5) вычислялось на каждой итерации методом Гаусса с выделением главного элемента. Таким образом, решение уравнения (2.5) не требует раскрытия определителя в левой части.

В качестве примера рассмотрена система с двумя степенями свободы, состоящая из двух тел с массами $m_1=1$ и $m_2=0,1$ и трех деформируемых элементов с операторными жесткостями $C_1, C_2 \sim C_3$ (фиг. 1). Подлежит исследованию зависимость собственных частот и коэффициентов демпфирования от величины мгновенной жесткости C_2 при фиксированных m_1, m_2, C_1 и ядра релаксации R_2 . Рассмотрены два варианта задачи. В первом — однородная система: $R_1=R_2=A \exp(-\beta t)t^{\alpha-1}$, $A=0,01$, $\beta=1$, $\alpha=0,1$, $C_1=1$, мгновенная жесткость C_2 варьировалась в пределах $10^{-3}-1$.

Результаты расчетов приведены на фиг. 1. Зависимость собственных частот и коэффициентов демпфирования от жесткости C_2 оказалась монотонной, причем характер зависимости одинаков для частот и коэффициентов демпфирования (кривые 1-4 соответствуют $\omega_{R1}, \omega_{R2}, \omega_{I1}, \omega_{I2}$).

Во втором варианте рассмотрена неоднородная система: первый деформируемый элемент упругий ($R_1=0$), остальные параметры совпадают с принятыми выше. Результаты расчета представлены на фиг. 2 (нумерация кривых прежняя).

Зависимость собственных частот ω_{Rk} ($k=1, 2$) от C_2 оказалась такой же, как и в случае однородной системы: соответствующие кривые совпадают с точностью до 50. Поведение коэффициентов демпфирования изменилось радикальным образом: зависимости $\omega_{Rk} \sim C_2$ стали немонотонными.

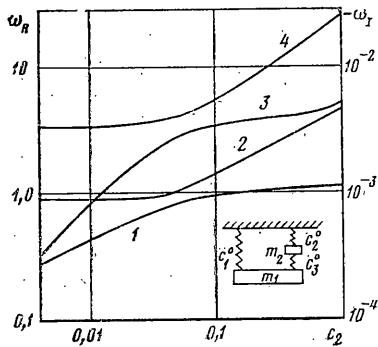
Особый интерес для практики представляет минимальное при фиксированной C_2 значение коэффициента демпфирования: $\delta = \min(-\omega_{Ik})$ ($k=1, 2, \dots, n$); величина δ определяет демпфирующие свойства системы в целом.

В случае однородной системы величина δ (назовем ее глобальным коэффициентом демпфирования) целиком определяется мнимой частью первой по модулю комплексной собственной частоты. В случае неоднородной системы в роли глобального коэффициента демпфирования в зависимости от C_2 выступают мнимые части как первой, так и второй собственных частот. «Смена ролей» происходит при характерном значении величины C_2 : при этом значении действительные части первой и второй собственных частот наиболее близки. Глобальный коэффициент демпфирования при указанном значении C_2 имеет ярко выраженный максимум. Это обстоятельство, очевидно, представляет собой новый механический эффект, который может быть сформулирован так: колебания, соответствующие собственным формам неоднородной вязкоупругой системы с близкими собственными частотами, взаимно гасят друг друга.

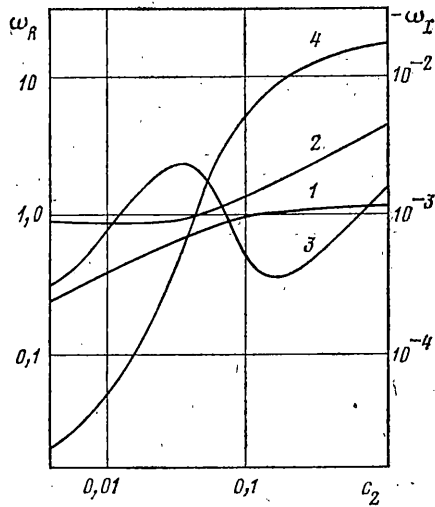
Необходимо отметить, что изменение параметра C_2 , от которого столь существенно зависит глобальный коэффициент демпфирования, может быть достигнуто варьированием геометрических размеров элемента без изменения их реологических свойств. Тем самым открывается перспективная возможность эффективного управления демпфирующими характеристиками неоднородных вязкоупругих систем путем изменения их геометрии при заданных материалах. Эта возможность реализована ниже для случая колебаний двуслойного цилиндра.

3. Собственные колебания многослойного цилиндра. Рассматривается полый цилиндр длины l , состоящий из N коаксиальных вязкоупругих слоев. Вводится цилиндрическая система координат r, φ, z . Внутренняя $r=r_0$ и внешняя $r=r_N$ поверхности свободны от нагрузок $\sigma_{rr}=\sigma_{r\varphi}=\sigma_{rz}=0$; на торцах $z=0, l$ смещения U_z и касательные напряжения $\sigma_{rz}, \sigma_{\varphi z}$ равны нулю; на границах слоев $r=r_1, \dots, r_{N-1}$ непрерывны смещения U_r, U_φ, U_z и напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}$.

В качестве искоемых переменных задачи принимаются перемещения



Фиг. 1



Фиг. 2

U_r , U_φ , U_z и напряжения σ_{rr} , $\sigma_{r\varphi}$, σ_{rz} . Уравнения для этих переменных получаются исключением из соотношений Коши, закона Гука и уравнений движения деформаций и напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz} , $\sigma_{\varphi z}$; указанные уравнения имеют вид ($r_{n-1} < r < r_n$, $n=1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial r} &= \frac{\nu_n^\circ}{1-\nu_n^\circ} \left(\frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{(1+\nu_n^\circ)(1-2\nu_n^\circ)}{E_n^\circ(1-\nu_n^\circ)} \sigma_{rr} \\ \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{U_\varphi}{r} + \frac{2(1+\nu_n^\circ)}{E_n^\circ} \sigma_{r\varphi} \\ \frac{\partial U_z}{\partial r} &= -\frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{2(1+\nu_n^\circ)}{E_n^\circ} \sigma_{rz} \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + \rho_n \frac{\partial^2 U_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} - \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} + \rho_n \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho_n \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{E_n^\circ}{1-\nu_n^{\circ 2}} \left(\frac{U_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \nu_n^\circ \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\nu_n^\circ}{1-\nu_n^\circ} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi z} &= \frac{E_n^\circ}{2(1+\nu_n^\circ)} \left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \varphi} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E_n^\circ}{1-\nu_n^{\circ 2}} \left(\nu_n^\circ \frac{U_r}{r} + \frac{\nu_n^\circ}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \frac{\nu_n^\circ}{1-\nu_n^\circ} \sigma_{rr} \\ E_n^\circ &= \frac{\mu_n^\circ(3\lambda_n^\circ + 2\mu_n^\circ)}{\lambda_n^\circ + \mu_n^\circ}, \quad \nu_n^\circ = \frac{\lambda_n^\circ}{2(\lambda_n^\circ + \mu_n^\circ)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0 \quad (r=r_0, r_n) \\ U_z = 0, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = 0 \quad (z=0, l) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение задачи ищется в виде $(U_r, U_\varphi, U_z, \sigma_{rr}, \sigma_{r\varphi}, \sigma_{rz}) = (\vartheta_{r1}, i\vartheta_\varphi, i\vartheta_z, \tau_{rr}, i\tau_{r\varphi}, i\tau_{rz}) \exp(ik\pi z/l - i\omega t)$, где m, k — положительные целые числа, $\vartheta_r, \vartheta_\varphi, \vartheta_z, \tau_{rr}, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}$ — комплексные амплитуды, зависящие от радиуса r .
 Задача сводится к проблеме собственных значений для системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений относительно комплексных амплитуд ($r_{n-1} < r < r_n, n=1, 2, \dots, N$):

$$\frac{d\vartheta_r}{dr} = -\frac{v_n^\circ}{1-v_n^\circ} \left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{(1+v_n^\circ)(1-2v_n^\circ)}{E_n^\circ(1-v_n^\circ)} \tau_{rr}$$

$$\frac{d\vartheta_\varphi}{dr} = \frac{m}{r} \vartheta_r + \frac{\vartheta_\varphi}{r} + \frac{2(1+v_n^\circ)}{E_n^\circ} \tau_{r\varphi}$$

$$\frac{d\vartheta_z}{dr} = \frac{k\pi}{l} \vartheta_r + \frac{2(1+v_n^\circ)}{E_n^\circ} \tau_{rz}$$

$$\frac{d\tau_{rr}}{dr} = -\frac{m}{r} \tau_{r\varphi} - \frac{k\pi}{l} \tau_{\varphi z} - \frac{\tau_{rr} - \tau_{r\varphi}}{\tau} - \rho_n \omega^2 \vartheta_r$$

$$\frac{d\tau_{r\varphi}}{dr} = \frac{m}{r} \tau_{\varphi\varphi} - \frac{k\pi}{l} \tau_{\varphi z} - \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} - \rho_n \omega^2 \vartheta_\varphi$$

$$\frac{d\tau_{rz}}{dr} = -\frac{m}{r} \tau_{\varphi z} - \frac{k\pi}{l} \tau_{zz} - \frac{\tau_{rz}}{r} - \rho_n \omega^2 \vartheta_z$$

$$\tau_{rr} = \tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \quad (r=r_0, r_N)$$

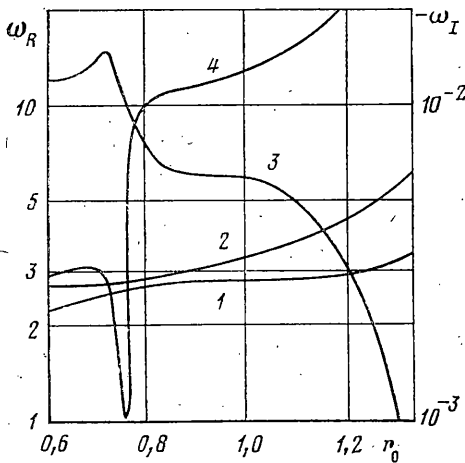
$$\tau_{\varphi z} = -\frac{E_n^\circ}{2(1+v_n^\circ)} \left(\frac{k\pi}{l} \vartheta_\varphi + \frac{m}{r} \vartheta_z \right)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = \frac{E_n^\circ}{1-v_n^{\circ 2}} \left(\frac{\vartheta_r}{r} + \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + v_n \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{v_n^\circ}{1-v_n^\circ} \tau_{rr}$$

$$\tau_{zz} = \frac{E_n^\circ}{1-v_n^{\circ 2}} \left(v_n^\circ \frac{\vartheta_r}{r} + v_n^\circ \frac{m}{r} \vartheta_\varphi + \frac{k\pi}{l} \vartheta_z \right) + \frac{v_n^\circ}{1-v_n^\circ} \tau_{rr}$$

Характеристическое уравнение задачи строилось методом ортогональной прогонки [5], корни характеристического уравнения определялись методом Мюллера [5].

На фиг. 3 приведены результаты расчетов для случая плоских колебаний ($m=2, k=0$) цилиндра, состоящего из внешнего тонкого упругого слоя ($r_1=1,5, r_2=1,7$) и внутреннего несжимаемого вязкоупругого слоя, внутренний радиус r_0 которого варьировался от 0,6 до 1,3. Были приняты следующие значения параметров: $E_1=10^{-4}, v_1=0,5, R_{11}=A \exp(-\beta t/t^{\alpha-1}), \alpha=-0,1, \beta=1, A=0,01, E_2=1, v_2=0,3, R_2=0$ (кривые 1-4 соответствуют, как и на фиг. 1, 2, значениям $\omega_{R1}, \omega_{R2}, \omega_{I1}, \omega_{I2}$). Приведенные зависимости подтверждают эффект, обнаруженный выше при анализе



Фиг. 3

собственных колебаний системы с конечным числом степеней свободы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. *Ильюшин А. А., Победра Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
3. *Филатов А. Н.* Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент: ФАН, 1974. 216 с.
4. Вибрации в технике. Т. 1. М.: Машиностроение, 1978. 352 с.
5. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975. 631 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.V.1981