МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 · 1983

УДК 539.3

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ОКРЕСТНОСТИ КРАЯ РАЗРЕЗА, ДВИЖУЩЕГОСЯ С ТРАНСЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

СИМОНОВ И. В.

Изучена асимптотика решений вблизи фронта разреза, движущегося со скоростью c в упругой среде, при условии $c_2<c<c_1$ (c_1 и c_2 – скорости продольных и поперечных волн). Выяснено, что напряжения и скорости имеют степенную особенность r^α, где r – расстояние от края разреза $-1/2<\alpha\,\mathrm{sgn}(c)<0$ и α зависит от величины скорости c (система координат выбрана так, что при положительных значениях c разрез закрывается). Отдельно рассмотрен случай вырождения асимптотики ($\alpha=0$). При ненулевых краевых условиях в кончике разреза к однородному решению добавляется кусочно-постоянное слагаемое и выделены случаи, когда доминирует именно эта локально определенная асимптотика.

Приводится точное решение задачи о трансзвуковом движении разреза в обоих направлениях в упругой плоскости под действием подвижной и приложенной к берегам разреза нагрузки. Следуя [1–4], дается обоснование возможностям переноса асимптотики плоской стационарной задачи на пространственный нестационарный случай.

Аналогичная асимптотика при сверхзвуковом и дозвуковом движении разреза, а также в статике известна [2, 5–9]. Публикуемая работа фактически дополняет изученный диапазон скоростей c до полной вещественной оси.

Показателю $\alpha=-1/2$ соответствует ненулевой поток мощности в окрестность точки контакта [2, 6–8], что играет определяющую роль в концепции квазихрупкого разрушения. Для более слабой особенности поток равен нулю, и тогда согласно этой концепции трещина распространяться не может. Однако, если не быть привязанным к критерию квазихрупкого разрушения, можно рассматривать движение разреза с произвольной скоростью. Результаты могут быть отнесены к случаям соударения упругих тел под малыми углами (при соударении тел с гладкими поверхностями скорость линии контакта изменяется по величине от бесконечности до нуля, а при отскоке – в обратном направлении), схлопывания трещин или динамического раскрытия щели в соединенных материалах. Это – примеры соединения или разъединения тел без разрушения. Кроме того, экспериментально зафиксированы большие скорости проникновения лазерных и электронных пучков в твердые тела (многочисленные ссылки можно найти в [5, 10]), а теоретически рассмотрены случаи сверхзвукового движения клиновидной трещины [5, 10].

1. Пусть внутри упругого тела имеется поверхность разрыва смещений с кусочно-гладкой движущейся границей Г. Для нахождения асимптотики решения динамических уравнений линейной теории упругости вблизи некоторого гладкого и малого участка Г, движущегося с мгновенной трансзвуковой скоростью c, подвергнем уравнения преобразованию сдвига для перехода к системе координат, связанной с краем разреза, а затем преобразованию подобия согласно «принципу микроскопа» [1, 7]. Тогда, аналогично статическому [1] и дозвуковому [2] случаям, вытекает, что изучение особенностей пространственного решения сводится к решению двух задач: плоской деформации и плоского сдвига в плоскости, нормальной к Г. Более того, старшие члены в асимптотике сохраняют свой вид при переходе к стационарному случаю.

Ограничимся далее рассмотрением канонической плоской задачи обтекания полубесконечного разреза упругой средой. Движение будем предполагать установившимся. На разрезе $\{x>0,\ y=\pm 0\}$ заданы напряжения $\sigma^{(yy)}=\sigma_\pm$, $\sigma^{(xy)}=\tau_\pm$.

Здесь и далее индексы плюс или минус относятся к верхнему $\{x>0, y=+0\}$ или нижнему $\{x>0, y=-0\}$ берегу разреза.

В силу принципа микроскопа и установления $\sigma_\pm$ и $\tau_\pm$ постоянны. Если нагрузка в исходной задаче гладкая при $x\to 0$, то в краевых условиях отброшены слагаемые того же порядка малости, что и в уравнениях.

Задача сводится к решению двух уравнений в безграничной плоскости с разрезом для продольного φ и поперечного ψ потенциалов смещений, первое из которых эллиптического, а второе гиперболического типов (буквенные индексы внизу означают дифференцирование)

$$\beta_1^2\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\quad \beta_2^2\psi_{xx}-\psi_{yy}=0\quad (\beta_j^2=|1-c^2/c_j^2|)\quad {\scriptstyle (j=1,\,2)} \tag{1.1}$$

Краевые условия примут вид

$$\beta\varphi_{xx}+\psi_{xy}=-\sigma_\pm,\quad \varphi_{xy}-\beta\psi_{xx}=\tau_\pm\quad (x>0,\ y=\pm 0) \tag{1.2}$$

а связь вектора перемещений (u, v), вектора скорости (U, V) и напряжений $\sigma=\sigma^{(yy)}$, $\tau=\sigma^{(xy)}$, $\sigma_1=\sigma^{(xx)}$ с потенциалами дается формулами

$$\begin{gathered} u=\varphi_x+\psi_y,\quad v=\varphi_y+\psi_x,\quad U=-c(\varphi_{xx}+\psi_{xy}) \\ V=c(\psi_{xx}-\varphi_{xy}),\quad \sigma_1=\beta_3\varphi_{xx}+\psi_{xy},\quad \sigma=-\beta\varphi_{xx}-\psi_{xy} \\ \tau=\varphi_{xy}-\beta\psi_{xx}\quad (\beta=1-c^2/(2c_2^2)),\quad \beta_3=1+\beta_1^2-\beta) \end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь напряжения нормированы на 2μ (μ — модуль сдвига), $c_2<|c|<c_1$.

Рассматриваются случаи обтекания средой разреза как в положительном $(c>0)$, так и в отрицательном $(c<0)$ направлениях.

Будем искать решение (1.1)—(1.3) за вычетом полей напряжений и скоростей от падающих из бесконечности поперечных волн (если таковые имеются в исходной задаче), а их действие учтем через граничные условия. Полное решение получается на основании суперпозиции. Подобный (и обычный) подход позволяет одновременно использовать принцип излучения и учесть дифракцию длинных волн.

При решении задачи будут учитываться условия: интегрируемости плотности энергии, излучения, непересечения берегов разреза: $[v]>0$ $(x>0)$, где квадратные скобки означают скачок величины при переходе с верхнего берега на нижний.

Принимая во внимание, что φ — гармоническая функция, а общее решение второго уравнения (1.1) можно сразу выписать, введем в рассмотрение новые неизвестные функции и независимые переменные

$$\Phi(z)=\varphi_{xx}-i\beta_1^{-1}\varphi_{xy},\quad \Psi_1(z_1)=\psi(x, y),\quad \Psi(z_1)=d^2\Psi_1/dz_1^2 \tag{1.4}$$

Здесь $\Phi(z)$ — аналитическая функция комплексной переменной $z=x+i\beta_1 y$, $\Psi_1(z_1)$ — кусочно-гладкое решение Даламбера второго уравнения (1.1), причем под z_1 будем понимать в силу принципа излучения следующие выражения: $z_1=x+\operatorname{sgn}(c)\beta_2 y$ — в верхней полуплоскости, $z_1=x-\operatorname{sgn}(c)\beta_2 y$ — в нижней полуплоскости.

Исключая сначала производные φ и ψ, а затем Ψ из (1.2), (1.4), придем к следующей краевой задаче определения аналитической функции Φ в плоскости с разрезом и формулам для последующего нахождения функции Ψ:

$$\begin{gathered} \operatorname{Re}[(\beta^2\pm i\beta_1\beta_2)\Phi]=\pm\beta_2\tau_+-\sigma_+\beta\quad (x>0,\ y=+0) \\ \operatorname{Re}[(\beta^2\mp i\beta_1\beta_2)\Phi]=\mp\beta_2\tau_--\beta\sigma_-\quad (x>0,\ y=-0) \\ \Psi(z_1)=0\quad (z_1<0),\quad \Psi(z_1)=-\beta^{-1}(\beta_1\operatorname{Im}\Phi(z_1)+\tau_\pm)\quad (z_1>0) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь и далее при $c>0$ в формулах берутся верхние знаки, при $c<0$ — нижние.

Важным обстоятельством для решения задачи является факт разделения краевых условий для Φ и Ψ.

2. Построим полное решение задачи (1.5) в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего сингулярного решения задачи с нулевыми граничными условиями. В классе всюду ограниченных функций частное решение единственно и имеет кусочно-постоянный вид ($\beta\neq0$):

$$\Phi=A+iB,\ \Psi=\eta(z_1)C_\pm,\ C_\pm=-\beta^{-1}(\beta_1 B+\tau_\pm)$$
$$A=\frac{\pm\beta_2(\tau_+-\tau_-)-\beta(\sigma_++\sigma_-)}{2\beta^2},\quad B=\frac{-\beta_2(\tau_++\tau_-)\pm\beta(\sigma_+-\sigma_-)}{2\beta_1\beta_2}$$
$$\eta(x)=0\ (x<0),\ \eta(x)=1\ (x>0) \tag{2.1}$$

По формулам (1.3), (1.4) можно выписать соответствующие (2.1) кусочно-постоянные поля напряжений и скоростей. Заметим, что для симметричной нагрузки $\sigma_+=\sigma_-$, $\tau_+=\tau_-$ решение оказывается постоянным $\sigma\equiv\sigma_+$, $\tau\equiv\tau_+$ (при этом $C_\pm=0$, $\Psi\equiv0$).

Если же действует только внешнее поле, то сумма падающего и отраженного поля — частного решения неоднородной задачи — будет нулевой. Отсюда следует, что разделение полного волнового поля на падающее и отраженное (которое, кстати, неясно как осуществить практически) несущественно и в дальнейшем будем понимать под $\sigma_\pm$ и $\tau_\pm$ истинную нагрузку, приложенную к берегам разреза.

Рассмотрим теперь условия (1.5) при $\sigma_\pm=\tau_\pm=0$, т. е. перейдем к изучению соответствующей однородной задачи. Нетривиального ограниченного решения она не имеет, а сингулярное (имеющее особенности в точках $z=0$, ∞ и только в этих точках по физическому смыслу задачи) запишем так:

$$\Phi=\sum_0^\infty A_n e^{-i\lambda_n\pi}z^{\lambda_n},\quad \Psi=\eta(z_1)\frac{\beta_1}{\beta}\sum_0^\infty A_n\sin(\lambda_n\pi)z_1^{\lambda_n} \tag{2.2}$$

Собственные числа λ_n являются решениями тригонометрического уравнения — результата подстановки (2.2) в нулевые условия (1.5) $\operatorname{tg}(\lambda_n\pi)=\mp\beta^2/(\beta_1\beta_2)$; откуда следует $\lambda_n=\mp\alpha+n$, $\alpha=\pi^{-1}\operatorname{arctg}[\beta^2/(\beta_1\beta_2)]$.

При записи (2.2) учтены условия конечности энергии, излучения и симметрии решения. Действительные постоянные A_n определяются из решения задачи в целом. Разрез для выделения однозначных ветвей z^{λ_n} проведем вдоль положительной полуоси x, а выбор ветвей фиксируем условием $(1)^{\lambda_n}=1$.

Утверждение. Всякое решение плоской стационарной задачи динамической теории упругости в окрестности края ненагруженного разреза, движущегося с трансзвуковой скоростью, представимо в форме сходящегося ряда (2.2).

Для этого достаточно показать, что $\Phi(z)$ в окрестности нуля представима в форме

$$\Phi=z^{\mp\alpha}\Phi_0(z) \tag{2.3}$$

где $\Phi_0(z)$ — аналитическая в нуле функция.

Заметим, что в окрестности $z=0$ функция Φ должна удовлетворять однородным краевым условиям (1.5), которые эквивалентны условиям сопряжения [11]:

$$\Phi^+=e^{\pm2\pi\alpha i}\Phi^- \tag{2.4}$$

Здесь Φ^+ и Φ^- — предельные краевые значения функции на берегах разреза $\{x>0,\ y=\pm0\}$.

Подставив выражение (2.3) в (2.4), получим $\Phi_0^+=\Phi_0^-$, т. е. $\Phi_0(z)$ — однозначная функция в окрестности $z=0$. Тогда в качестве особенностей она может иметь только полюс или существенно особую точку [11]. Но это исключено из энергетических соображений. Следовательно, $z=0$ — устранимая особая точка $\Phi_0(z)$ и $\Phi_0(z)$ аналитична в точке $z=0$, что и требовалось.

Выпишем теперь главную часть поля напряжений и скоростей в однородном решении, соответствующую старшему члену (2.2), в полярной системе координат $z=re^{i\theta}$, исходя из (1.3), (1.4), (2.2)

$$\begin{gathered}\sigma_1\sim\beta_3F,\ \sigma\sim-\beta F,\ \tau\sim\mp E,\ U\sim-cF,\ V\sim\pm cE\ \ (\theta_0<\theta<2\pi-\theta_0)\\ \sigma_1\sim\beta_3F-\beta H,\ \sigma\sim\beta(H-F),\ \tau\sim\mp\beta_1(E-G)\\ U\sim c(\beta H-F),\ V\sim\pm c\beta_1(E-\beta^{-1}G)\ \ (0\leqslant\theta<\theta_0\cup 2\pi-\theta_0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\\ p\sim-{}^1/_3(1+\nu)(1-2\beta+\beta_1^2)F\ \ (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\\ (E,F,G,H)=A_0r^{\mp\alpha}(\sin\xi,\ \cos\xi,\ \zeta\sin(\alpha\pi),\ \zeta\cos(\alpha\pi))\\ \xi=\alpha\pi-\alpha\theta,\ \zeta=(\cos\theta\pm\beta_2\beta_1^{-1}\sin\theta)^{\mp\alpha},\ \theta_0={}^1/_2\pi\pm\operatorname{arctg}(\beta_2/\beta_1)\end{gathered}\tag{2.5}$$

где ν — коэффициент Пуассона, p — давление.

В формулах (2.5) отброшены члены порядка $r^{1\mp\alpha}$. Результат (2.5) при $c>0$ совпадает с асимптотикой решения задачи о соударении упругих полос [12]. В дополнение к [12] отметим, что решение при $c>0$ имеет особенность $\sim z_1^{-\alpha}$ на фронтах поперечных волн, отходящих от кромки, при $z_1\to 0$. Однако этой особенности отвечает интегрируемая энергия в силу $0<\alpha<{}^1/_2$.

При $c<0$ напряжения и скорости в однородном решении асимптотически ($\sim r^{\alpha}$) равны нулю, но производные этих величин обращаются в бесконечность.

Для сравнения приведем результаты по особенностям упругодинамических полей напряжений (и скоростей) на фронте разреза при других значениях скорости c. В статике и дорелеевской динамике трещины $\sigma^{(ij)}\sim r^{-1/2}$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$ (например, [2, 6—8]). Из решения задачи о дозвуковом движении разреза в упругой полосе [9] следует, что напряжения $\sigma^{(ij)}\sim r^{1/2}$ при $0<c<c_R$ и при $-c_2<c<-c_R$; $\sigma^{ij}\sim r^{-1/2}$ при $c_R<c<c_2$ и при $-c_R<$ $<c<0$ (c_R — скорость волны Релея). В сверхзвуковом случае $c_1<|c|<\infty$ напряжения $\sigma^{(ij)}=O(1)$ [5]. В задачах соударения и отскока упругих тел с гладкими поверхностями в окрестности границы контакта при дорелеевских скоростях движения этой границы, по-видимому, будет $\sigma^{(ij)}\sim r^{1/2}$, как и в теории Герца.

Именно рассматриваемый диапазон скоростей c позволяет перейти к пределу $\mu\to 0$ $(c_2\to 0)$ и получить результат акустического дозвукового варианта задачи. При этом (ρ — плотность)

$$\begin{gathered}\alpha\to{}^1/_2,\ \nu\to{}^1/_2,\ 2\mu p\to\rho cU\to-\rho c^2A_0r^{\mp 1/2}\sin(\theta/2)\\ V\to\pm c\beta_1A_0r^{\mp 1/2}\cos(\theta/2)\end{gathered}\tag{2.6}$$

что совпадает с асимптотикой решения задачи о соударении струй в акустическом приближении [13], если в (2.6) взять верхние знаки. Очередной предельный переход $c_1\to\infty$ приводит к результату для несжимаемой жидкости с сохранением особенности.

При соударении жидких струй возникает кумулятивный эффект возвратного движения тонкой струи. Линеаризованные постановки не схватывают этот эффект, однако появляется ненулевой поток мощности в точку контакта, обусловленный особенностью $\sim r^{-1/2}$ в решении. Он совпадает с расходом энергии на образование кумулятивной струи из решения полной нелинейной задачи для несжимаемой жидкости [11]. В среде с упругим сопротивлением сдвигу, хотя бы и весьма малым, при $c_2<c<c_1$ кумуляция отсутствует (если ее возникновение при соударении отождествлять с появлением потока мощности в точку контакта).

Отметим, что особенность $\sim r^{-1/2}$ при трансзвуковом движении края разреза в принципе не достижима. В противном случае решение имело бы такую же особенность не только в точке, но и вдоль фронтов поперечных волн $x \pm \beta_2 y = 0$ и попало бы в неэнергетический класс.

Можно показать, что напряжение σ из решения (2.5) на продолжении разреза сжимающее, если $c>0$, и растягивающее, если $c<0$. Полное решение задачи (1.5) складывается из частного решения (2.1) и решения (2.2). При $c>0$ доминирует асимптотика однородного решения, которая через константу A_0 зависит от внешних условий (асимптотика нелокальна). При раскрытии разреза ($c<0$) асимптотику, вообще говоря, определяет решение (2.1) и она является локальной в том смысле, что не зависит от внешних условий; в частном случае ненагруженного разреза асимптотика определяется по формулам (2.5).

3. При $\beta=0$ имеем $c=\sqrt{2c_2}$, $\beta_2=1$, а фронт поперечных волн (характеристики) составляют угол 45° с осью x, краевые условия (1.5) вырождаются и этот случай подлежит отдельному рассмотрению. Для симметричных краевых условий (1.5): $\sigma_+=\sigma_-$, $\tau_+=\tau_-$ задачу при $\beta=0$ сформулируем в верхней полуплоскости с условиями на продолжении разреза

$$V=0,\quad \tau=0 \quad (x<0,\ y=+0) \tag{3.1}$$

Тогда для $\Phi(z)$ и $\Psi(z_1)$ возникает обобщенная краевая задача со скачком

$$\operatorname{Im}\Phi=\Psi=0\ (x<0,\ y=0),\quad \beta_1 \operatorname{Im}\Phi=-\tau_+,\quad \Psi=\mp\sigma_+\ (x>0,\ y=0)$$

решение которой есть [11]:

$$\Phi=\frac{\tau_+}{\pi\beta_1}(\ln z-i\pi),\qquad \Psi=\mp\eta(z_1)\sigma_+ \tag{3.2}$$

с прежним правилом выбора знака.

В частном случае $\tau_+=0$ решение (3.2) соответствует чистому сдвигу: $\sigma=-\sigma_1=\sigma_+$, $\tau=0$, $U=c\sigma_+$, $V=\mp c\sigma_+$ $(x+y>0)$; нулевое — при $x+y<0$.

В случае $\sigma_+=0$, $\tau_+=0$ функция $\Psi\equiv0$ и решение не содержит поперечных волн.

Полное решение рассмотренной задачи представляет собой комбинацию (3.2) и регулярного в нуле (поскольку $\alpha=0$ и $\lambda_n=n$ при $\beta=0$) однородного решения (2.2).

4. Ранее неявно предполагалось, что падающее внешнее поле регулярно по крайней мере в некоторой окрестности фронта разреза. Естественной является постановка задачи с разрывным падающим полем, например, соответствующим задаче о соударении тел. Это позволит отыскать одну новую асимптотику и одно точное решение.

Пусть $\varphi^{(0)}(x, y)$, $\psi^{(0)}(x, y)$ — симметричное относительно оси x падающее поле, вторые производные которого постоянны и заданы формулами

$$\varphi_{xx}^{(0)}=\psi_{xy}^{(0)}=0,\quad \psi_{xx}^{(0)}=V_0/[c(1-\beta)],\quad \varphi_{xy}^{(0)}=\beta V_0/[c(1-\beta)].$$

Оно определяет движение тела как жесткого целого с вектором скорости $(0, -V_0)$ в верхней полуплоскости, $(0, V_0)$ — в нижней и имеет разрыв на вещественной оси. В силу разрывности падающего поля отраженное также должно быть разрывным и уже не будет, например, так, что $\Psi(z_1)=0$ при $z_1=0$.

Представим полное поле $\varphi^{(1)}$, $\psi^{(1)}$ в виде $\varphi^{(1)}=\varphi^{(0)}+\varphi, \ldots$

Подставим эти выражения в краевые условия для $\Phi^{(1)}$ и $\Psi^{(1)}$ на продолжении разреза, получающиеся из (3.1), (1.3), (1.4) и на разрезе (нулевые условия (1.5) и решим получившуюся уже неоднородную краевую задачу для отраженного поля Φ и Ψ при условии ограниченности. При $\beta\neq0$ придем к решению вида $\sigma^{(1)}=\tau^{(1)}=V^{(1)}=0$, $\sigma_1^{(1)}=\text{const}$, $U^{(1)}=\text{const}$.

Можно сделать вывод, что решения стационарной задачи о соударении и отскоке двух других полупространств под малым углом при условии

$c_2<|c|<c_1$, $|c|\neq\sqrt{2}c_2$ не существует (однородное решение (2.2) не удовлетворяет необходимым условиям на бесконечности). Аналогичный вывод следует и при $|c|<c_2$ [9]. В сверхзвуковом случае $|c|>c_1$ такое решение построить можно.

При $\beta=0$ (т. е. $|c|=\sqrt{2}c_2$) получается решение типа чистого сдвига

$$\begin{gathered}\sigma^{(1)}=-\sigma_1^{(1)}=-V_0/c,\quad \tau^{(1)}=V^{(1)}=0,\quad U^{(1)}=\pm V_0\quad (x\pm y<0)\\ U^{(1)}=\tau^{(1)}=\sigma^{(1)}=\sigma_1^{(1)}=0,\quad V^{(1)}=\mp V_0\quad (x\pm y>0)\end{gathered}\tag{4.1}$$

определяющее, в частности, клиновидную форму берегов разреза. Эта кусочно-постоянная асимптотика одновременно является точным решением о соударении (отскоке) полупространств под малым углом $\theta_1=2V_0|c|^{-1}$ при условии $|c|=\sqrt{2}c_2$.

5. В качестве примера рассмотрим одну задачу о движении с межзвуковой скоростью полубесконечного разреза в упругой плоскости под действием подвижной и симметричной нагрузки $\sigma_0(x)$, приложенной к берегам разреза. Задача сводится к задаче сопряжения для функции $\Phi(z)$ на разрезе $\{x>0,\ y=\pm 0\}$:

$$\Phi^+=e^{\pm 2\pi\alpha i}\Phi^-+2g(x),\quad g(x)=-\beta\sigma_0(x)/(\beta^2\pm i\beta_1\beta_2)$$

(α то же, что и в п. 2). Потребуем, чтобы $\sigma_0(x)$ удовлетворяла условию Гельдера [14], причем

$$\begin{gathered}|\sigma_0(x)|\sim C_1x^{\gamma_1},\ x\to\infty,\ \gamma_1<-{}^1/_2\\ |\sigma_0(x)-\sigma_0(0)|\sim C_2x^{\gamma_2},\ x\to 0,\ \gamma_2>0\ (c>0),\ \gamma_2>\alpha\ (c<0)\end{gathered}\tag{5.1}$$

где C_1, C_2, γ_1, γ_2 — константы.

При выполнении дополнительного условия, вытекающего из условия излучения (поток энергии в бесконечность ограничен)

$$\lim_{r\to\infty} r^{1/2}|\Phi(z)|<\infty\tag{5.2}$$

задача имеет единственное решение [14]:

$$\Phi=\frac{z^{\mp\alpha}}{\pi i}\int_0^\infty\frac{g(t)\,dt}{t^{\mp\alpha}(t-z)}\tag{5.3}$$

Выбор однозначной ветви $z^{\pm\alpha}$ аналогичен п. 2.

Функция $\Psi(z_1)$ восстанавливается из краевых условий аналогично (1.5) $\Psi(z_1)=-\beta_1\beta^{-1}\eta(z_1)\operatorname{Im}\Phi(z_1)$.

Можно доказать справедливость следующих асимптотических представлений решения (5.3) при $z\to 0$ в случае выполнения условий (5.1)

$$\begin{gathered}\Phi=Bz^{\mp\alpha}-\beta^{-1}\sigma_0(0)+O(z^\gamma)\\ B=\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty\frac{g(t)-\eta(-c)g(0)}{t^{1\mp\alpha}}\,dt\\ \gamma=\gamma_2\ (\alpha\eta(-c)<\gamma_2<1\mp\alpha),\ \gamma=1\ (\gamma_2\geqslant 1\mp\alpha)\end{gathered}\tag{5.4}$$

Формулы (5.4) показывают, что частное решение (2.1) и асимптотика (2.5) составляют два первых члена асимптотики решения задачи с нагруженным кончиком разреза. Кроме того, в них указан порядок утраченных членов за счет замены $\sigma_0(x)$ ступенчатой нагрузкой $\sigma_+=\sigma_0(0)$ в п. 2.

Пусть теперь нагрузка начинается не от края: $\sigma_0(x)=0$, $0\leqslant x<x_0$. Перепишем выражение (5.3):

$$\Phi=z^{\mp\alpha}\Phi_0(z), \quad \Phi_0=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{x_0}^{\infty}\frac{g(t)\,dt}{t^{\mp\alpha}(t-z)}$$

Функция $\Phi_0(z)$ регулярна в плоскости с разрезом $\{x>x_0,\ y=\pm0\}$ и, следовательно, в нуле раскладывается в ряд Тейлора с радиусом сходимости $|x|<x_0$. Тем самым продемонстрирована возможность представления решения в форме (2.2) с указанием радиуса сходимости ряда.

Класс физически допустимых нагрузок $\sigma_0(x)$, кроме (5.1), ограничен неравенством $(c_2<-c<c_1)$

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{x}\frac{x^\alpha[\sigma_0(t)-\sigma_0(0)]}{t^\alpha(t-x)}\,dt\,dx>0 \tag{5.5}$$

вытекающим из условия непересечения берегов разреза. Если, например, $\sigma_0(x)$ — ступенчатая нагрузка, принимающая значения на интервале $0\leqslant\leqslant x\leqslant x_1$, то из (5.5) следует, что $\sigma_0<0$, т. е. нагрузка разрывающая. Для выполнения (5.5) при $x\to0$ в случае нагрузки, сдвинутой относительно края разреза, требуется другой знак σ_0, что является следствием аномального знака смещений поверхности упругого тела перед передним фронтом нагрузки, движущейся со сверхрелеевской (но меньшей c_1) скоростью.

В случае $c_2<c<c_1$ для знакопостоянной нагрузки из условия «непересечения» можно получить, что $\sigma_0(x)>0$, т. е. нагрузка стягивает берега разреза.

Нетрудно показать, что напряжение $\sigma(x,0)$ на продолжении разреза сжимающее как при $c>0$ $(\sigma_0>0)$, так и в случае $c<0$ $(\sigma_0<0)$. Баланс энергии в рассматриваемой задаче выполняется следующим образом: мощность, развиваемая нагрузкой $\sigma_0(x)$, равна мощности, излучаемой в бесконечность. Иначе при дорелеевском движении трещины [6] — там излучение отсутствует, а вся мощность выделяется в кончике трещины.

Можно построить решение при $c>0$, не удовлетворяющее условию (5.2), а исчезающее на бесконечности как $z^{-\alpha}$. Оно имеет вид

$$\Phi(z)=\frac{z^{1-\alpha}}{\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{g(t)\,dt}{t^{1-\alpha}(t-z)}$$

и в нуле ведет себя как $O(1)$.

В вырожденном случае $\beta=0$ реализуется асимптотика, имеющая вид суммы решений (3.2) и (4.1).

Отметим, что после сдачи рукописи в печать вышла работа [15], в которой определен вид однородных решений для случая $c>0$, дан энергетический анализ и приведен пример неоднородной задачи. Публикуемая работа является более полным исследованием затронутого вопроса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аксентян О. К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. – ПММ, 1967, т. 31, вып. 1, с. 178—186.
2. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения. — Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 112—125.
3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688 с.
4. *Шер Е. Н.* Об энергетическом условии в носике трещины. — ПМТФ, 1969, № 3, с. 175–178.
5. *Борзых А. А., Черепанов Г. П.* К теории разрушения твердых тел под воздействием мощных импульсных пучков электронов. — ПММ, 1980, т. 44, вып. 6, с. 1120–1128.
6. *Craggs J. W.* On the propogation of a crack in an elastic-brittle material. — J. Mech. Phys. Solids, 1960, v. 8, No. 1, p. 66—75.

7. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. *Слепян Л. И., Троянкина Л. В.* Теория трещин. Л.: Судостроение, 1976. 42 с.
9. *Симонов И. В.* Дозвуковое движение разреза в упругой полосе. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 6, с. 90—99.
10. *Борзых А. А.* Одна пространственная автомодельная задача о сверхзвуковом расклинивании упругого тела. – ПММ, 1981, т. 45, вып. 2, с. 348—355.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965. 716 с.
12. *Ефремов В. В.* О косых соударениях металлических пластин в упругой постановке. – ПМТФ, 1975, № 5, с. 167—173.
13. *Дерибас А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1980. 221 с.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
15. *Слепян Л. И., Фишков А. Л.* К задаче о распространении разреза с межзвуковой скоростью. — Докл. АН СССР, 1981, т. 261, № 6, с. 1316—1319.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1981