МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 2 • 1983

УДК 539.3

ВОЛНЫ РАЗРЫВОВ ПРИ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ

БЕСТУЖЕВА Н. П., ДУРОВА В. Н.

Рассматривается поведение скачков производных перемещений и напряжений на волновых фронтах типа поверхностных волн. Предлагаемый подход основан на использовании лучевых представлений и аппарата условий совместности. Исследованы законы затухания слабых разрывов на поверхности нелинейно-упругого изотропного полупространства, скорость распространения которых в недеформированную область совпадает с рэлеевской, а эффекты нелинейного взаимодействия проявляются в характере изменения интенсивности. Приводятся общие соотношения для случая произвольного упругого потенциала и начального напряженного состояния.

Изучению распространения поверхностных волн в предварительно деформированных телах посвящены работы [1–3]. Основой исследований служат линеаризированные соотношения теории упругости и представления о поверхностной волне как суперпозиции плоских неоднородных волн. Объемные волны разрывов в нелинейно-упругих средах рассматривались в [4–6].

1. Динамические уравнения нелинейной теории упругости в компонентах, отнесенных к начальному положению, запишем в форме [7]:

$$(\sigma_{ij}+\sigma_{jk}u_{i,k})_{,j}=\rho \ddot{u}_i \qquad (i=1,2,3) \tag{1.1}$$

Граничные условия на свободной поверхности имеют вид

$$(\sigma_{ij}+\sigma_{jk}u_{i,k})n_j=0, \qquad n_j=\{0,0,1\} \tag{1.2}$$

Здесь u_i — вектор перемещений, ρ — плотность, n_j — орты нормали к поверхности тела до деформации, σ_{ij} — обобщенные напряжения, которые выражаются через упругий потенциал следующим образом [8]: $\sigma_{ij}=\partial\Phi/\partial\varepsilon_{ij}$.

Примем, что упругий потенциал есть функция трех алгебраических инвариантов тензора конечных деформаций Грина

$$\Phi=\Phi(I_1,I_2,I_3), \quad I_1=\varepsilon_{nn}, \quad I_2=\varepsilon_{mn}\varepsilon_{nm}, \quad I=\varepsilon_{nm}\varepsilon_{mj}\varepsilon_{jn} \tag{1.3}$$
$$\varepsilon_{ij}={}^1/_2(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{n,i}u_{n,j})$$

Характеристики поверхностных волн определяются решением динамических уравнений с использованием граничных условий. Известно [4, 6], что слабые разрывы, распространяющиеся в недеформированную область изотропного упругого тела, бывают либо продольными, либо поперечными, а условие распространения объемных волн принимает вид

$$(A_{jink}\nu_j\nu_k-\rho\delta_{ni}G^2)\omega_n=0$$
$$A_{jink}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}\delta_{ji}\delta_{nk}+\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}(\delta_{jk}\delta_{in}+\delta_{ki}\delta_{jn}) \tag{1.4}$$

где G — скорость поверхности разрыва Σ в направлении нормали ν_i, $\omega_i=[u_{i,jk}]\nu_j\nu_k$ — вектор разрыва, характеризующий скачок вторых производных перемещений при переходе через Σ.

Из (1.4) следует возможность существования двух типов объемных волн, для которых

$$G_{(1)}^2=c_1^2=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right), \qquad \omega_i=\omega\nu_i|_{(1)},\ \omega=|\omega_i|$$
$$G_{(2)}^2=c_2^2=(1/\rho)\,\partial\Phi/\partial I_2, \qquad \omega_i\nu_i=0|_{(2)} \tag{1.5}$$

Индекс (1) здесь и далее относится к соотношениям на продольной волне, (2) — на поперечной.

Следуя приемам работ [9, 10] и используя условия совместности высших порядков, выражающие разрывы производных перемещений через разрывы нормальных производных и кинематические параметры сингулярной поверхности, получим

$$c_1^{-1}\delta\omega/\delta t-\Omega\omega+B\omega^2=0 \tag{1.6}$$

$$B=\frac{1}{2\rho c_1^3}\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial I_1^3}+6\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}+3\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+6\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}+6\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right).$$

$$W_i=W_n\nu_n\nu_i+\omega_{,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{i\beta}|_{(1)} \tag{1.7}$$

$$c_2^{-1}\delta\omega/\delta t-\Omega\omega=0 \tag{1.8}$$

$$W_n\nu_n=-\omega_{m,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{m\beta}+\omega^2D|_{(2)}, \qquad W_i=[v_{i,nj}]\nu_n\nu_j|_{(k)} \quad (k=1,2) \tag{1.9}$$

$$D=-\frac{1}{c_2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}+\frac{3}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right)^{-1}$$

Здесь $x_i=x_i(u^\alpha)$, $\alpha=1,2$ — параметрические уравнения поверхности Σ, $x_{i\alpha}=\partial x_i/\partial u^\alpha$, $g_{\alpha\beta}=x_{i\alpha}x_{i\beta}$, $g_{\alpha\gamma}g^{\gamma\beta}=\delta_\alpha^\beta$ ($\delta_\alpha^\beta=1$, если $\alpha=\beta$; $\delta_\alpha^\beta=0$ при $\alpha\neq\beta$), Ω — средняя кривизна поверхности. Производная $\delta/\delta t$ характеризует изменение данной величины вдоль нормали к поверхности разрыва.

Формулы (1.7), (1.9) представляют собой выражения для характеристических величин второго порядка W_i, а уравнения переноса (1.6), (1.8) определяют изменение интенсивности (величины разрыва) объемных волн.

Решение динамических уравнений, имеющее особенность в виде линии разрыва вторых производных перемещений, распространяющейся вдоль границы S, назовем поверхностной волной ускорения. Рассматривая поверхностную волну как результат наложения неоднородных объемных волн, запишем

$$[f]_l=[f]_{(1)}+[f]_{(2)} \tag{1.10}$$

где $[f]_l$ — скачок на граничной поверхности, равный разности значений функции f, заданной на S, на различных сторонах кривой разрыва l, $[f]_{(1)}$, $[f]_{(2)}$ — разрывы на фронтах $\Sigma_{(1)}$ и $\Sigma_{(2)}$ в окрестности S.

Дальнейшее решение задачи связано с использованием граничных условий в форме

$$[\dot\sigma_{jk}]_l n_j=0, \qquad [\dot\sigma_{jk}]_l=A_{jkmn}[\dot u_{m,n}]_l \tag{1.11}$$

Учитывая (1.10), (1.11), а также соотношения совместности для волн ускорения

$$[\dot u_{m,n}]=[v_{m,n}]=\omega_m\nu_n|_{(k)} \quad (k=1,2) \tag{1.12}$$

получаем уравнения для характеристических величин первого порядка

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}\omega_n\nu_n n_i+\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\{(2n_m\nu_m\nu_i\omega_n\nu_n)_{(1)}+(n_m\nu_m\omega_i+n_m\omega_m\nu_i)_{(2)}\}=0 \quad (i=1,2,3) \tag{1.13}$$

Принимая во внимание (1.5), преобразуем (1.13) к виду

$$a_1\omega+a_2d=0,\quad a_3\omega+a_4d=0,\quad d=\omega_{i(2)}n_i \tag{1.14}$$

$$\omega=|\omega_i|_{(1)}=\omega_i\nu_i|_{(1)},\quad a_1=\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}(n_i\nu_{i(1)})^2,\quad a_2=2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}n_i\nu_{i(2)}$$

$$a_3=\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}n_i\nu_{i(2)}+2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}n_m\nu_{m(1)}\nu_{i(1)}\nu_{i(2)},\quad a_4=\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}$$

Равенство нулю определителя системы (1.14) приводит к уравнению для скорости c распространения поверхностного разрыва

$$(c^2/c_2^2-2)^2-4(1-c^2/c_1^2)^{1/2}(1-c^2/c_2^2)^{1/2}=0 \tag{1.15}$$

При выводе (1.15) учитывались геометрические соотношения

$$n_i\nu_{i(1)}=(1-c_1^2/c^2)^{1/2},\quad n_i\nu_{i(2)}=(1-c_2^2/c^2)^{1/2}$$
$$\nu_{i(1)}\nu_{i(2)}=c_1c_2/c^2-(1-c_1^2/c^2)^{1/2}(1-c_2^2/c^2)^{1/2}$$

и тот факт, что для неоднородных волн, образующих поверхностную волну, вектор нормали $\nu_{i(k)}$ оказывается комплексным ($c<c_k$). Уравнение (1.15) совпадает с известным уравнением Рэлея.

Решение системы (1.14) при условии (1.15) можно представить в виде

$$\omega=a_2\chi=2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\left(1-\frac{c_2^2}{c^2}\right)\chi \tag{1.16}$$

$$d=-a_1\chi=-\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\left(1-\frac{c_1^2}{c^2}\right)\right\}\chi$$

Величину χ, характеризующую разрыв на поверхности S, назовем интенсивностью поверхностной волны.

2. Исследуем изменение χ в процессе распространения. Для этого продифференцируем граничные условия (1.2) два раза по времени и запишем соотношения в скачках

$$([\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}]_l+2[\sigma_{jk}^{\cdot}v_{i,k}]_l)n_j=0 \tag{2.1}$$

Здесь по определению $[\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}]_l=[\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}]_{(1)}+[\sigma_{ij}^{\cdot\cdot}]_{(2)}$

Используем условия совместности второго порядка на поверхностях $\Sigma_{(k)}$ ($k=1,2$) в форме

$$[v^{\cdot}_{m,n}]_{(k)}=W_nG\nu_n+\frac{\delta\omega_m}{\delta t}\nu_n-g^{\alpha\beta}(G\omega_m)_{,\alpha}x_{n\beta} \tag{2.2}$$

Из анализа соотношений (2.1), (2.2), (1.10) с учетом (1.7), (1.9), (1.12) после ряда преобразований получаем замкнутую систему уравнений относительно величин $W_i\nu_i|_{(1)}$, $W_{i(2)}n_i$:

$$c_1a_1(W_i\nu_i)_{(1)}+c_2a_2(W_in_i)_{(2)}=Q_1 \tag{2.3}$$
$$c_1a_3(W_i\nu_i)_{(1)}+c_2a_4(W_in_i)_{(2)}=Q_2$$

где $Q_n(\omega_{i(1)},\ \omega_{i(2)})$ — линейные дифференциальные операторы, выражения для которых запишутся в форме

$$Q_1=F_in_i,\quad Q_2=c_2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\nu_{j(2)}n_j(\omega_{m,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{m\beta}-\omega_m{}^2D)_{(2)}+F_i\nu_{i(2)}$$

$$F_i=A_{ijmn}n_j\left\{\left(\frac{\delta\omega_m}{\delta t}\nu_n-g^{\alpha\beta}c_1\omega_{m,\alpha}x_{n\beta}\right)_{(1)}+\left(\frac{\delta\omega_m}{\delta t}\nu_n-g^{\alpha\beta}c_2\omega_{m,\alpha}x_{n\beta}\right)_{(2)}\right\}+$$
$$+H_{ijmtnk}\{(\omega_m\nu_t\omega_k\nu_n)_{(1)}+(\omega_m\nu_t\omega_k\nu_n)_{(2)}\}-2A_{jkmn}n_j\{(\omega_n\nu_m\omega_i\nu_k)_{(1)}+$$

$$+(\omega_n\nu_m\omega_i\nu_k)_{(2)}\}-c_1\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\omega_{,\alpha}g^{\alpha\beta}(x_{j\beta}\nu_i+x_{i\beta}\nu_j)_{(1)}n_j+$$

$$+\left(c_2\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}\omega_{m,\alpha}g^{\alpha\beta}x_{m\beta}-\omega_m^2D\right)_{(2)}$$

$$H_{ijmtnk}=-\frac{\partial^3\Phi}{\partial I_1^3}\delta_{ij}\delta_{mt}\delta_{nk}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}(4\delta_{nk}T_{mitj}+2\delta_{ij}T_{mstp}T_{ksnp})-\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}T_{mitp}T_{kpnj}-$$

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nt}-2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\delta_{km}\delta_{it}\delta_{jn},\quad T_{mitj}={}^1/_2(\delta_{mi}\delta_{tj}+\delta_{mj}\delta_{ti})$$

Определитель системы (2.3) в силу (1.14), (1.15) равен нулю, и необходимое и достаточное условие существования решения примет вид

$$Q_1a_4-Q_2a_2=0 \tag{2.4}$$

В уравнении (2.4), выполненном на S, одна группа членов, относящихся к соотношениям на неоднородной продольной волне, записана в координатах τ_1, $\overset{\alpha}{u}_{(1)}$, $\overset{\beta}{u}_{(1)}$, другая,— характеризующая вклад поперечной волны,— в координатах τ_2, $\overset{\alpha}{u}_{(2)}$, $\overset{\beta}{u}_{(2)}$ $(\delta t|_{(k)}=\partial\tau_k)$. Введем единую систему координат на поверхности S [11]. Любую точку в окрестности кривой разрыва l зададим двумя параметрами: $\tau=h/c$ (h — расстояние по нормали к l, c — скорость поверхностной волны) и α, который характеризует точку пересечения нормали с l.

Переход к лучевой системе координат τ, α и последующая замена ω, d на χ по формулам (1.16), (1.7), (1.8) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно χ

$$d\chi/(cd\tau)-{}^1/_2\Omega_l(\tau)\chi+b\chi^2/c^2=0 \tag{2.5}$$

$$b=\frac{M_1N_1}{2M_1^2}\left\{\left\{\left(2\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}+3\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)2L(2N_1N_3M_1M_3-LN_3^2)-\right.\right.$$

$$-L^2\left(\frac{\partial^3\Phi}{\partial I_1^3}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}\right)-4M_1^2N_3^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_1\partial I_2}+\right.$$

$$\left.\left.+2M_3^2\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}+\frac{3}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial I_3}\right)\right\}\frac{M_1^2N_3L}{2N_1^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial I_2}\right)^{-1}+2M_1^2L\{N_1N_3L-$$

$$-M_1M_3(N_1^2-N_3^2)\}Bc+2M_1N_3^3Dc(M_1^4-N_1^2L)+N_3L\{2N_1N_3M_1M_3L-$$

$$\left.-N_3^2(4M_1^2L+1)\}\right\}\{L(N_1^2-N_3^2)M_1M_3^2+M_1N_3^2-M_3N_1N_3L\}^{-1}$$

$$L=M_1^2-M_3^2,\ N_1=c_1/c,\ N_3^2=1-N_1^2,\ M_1=c_2/c,\ M_3=1-M_1^2$$

Здесь $d/(cd\tau)$ — производная вдоль поверхностного луча, который в данном случае совпадает с нормалью к фронту, $\Omega_l(\tau)$ — кривизна плоской кривой l, b — постоянная величина.

Исследуя изменение геометрических характеристик фронта вдоль поверхностного луча, можно получить уравнение для кривизны $\Omega_l(\tau)$ [12]: $d\Omega_l/(cd\tau)=\Omega_l^2$, откуда следует

$$\Omega_l(\tau)=\Omega_{0l}/(1-\Omega_{0l}c\tau) \tag{2.6}$$

Учитывая (2.6), запишем общее решение (2.5) в виде

$$\chi(\tau)=\chi_0\left\{(1-\Omega_{0l}c\tau)^{1/2}\left(1+\frac{2\chi_0b}{c^2\Omega_{0l}}\right)-\frac{2\chi_0b}{c^2\Omega_{0l}}(1-\Omega_{0l}c\tau)\right\}^{-1} \tag{2.7}$$

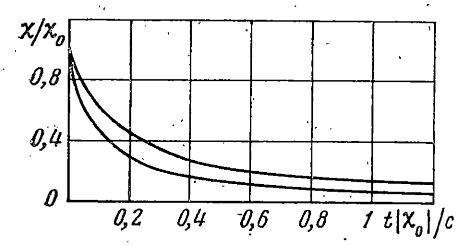
Для численного анализа полученных соотношений необходимо конкретизировать форму упругого потенциала. Рассмотрим случай пятиконстантного потенциала Мурнагана

$$\Phi={}^1/_2\lambda_1 I_1^2+\lambda_2 I_2+{}^1/_3\lambda_3 I_1^3+\lambda_4 I_1 I_2+{}^1/_3\lambda_5 I_3 \qquad (2.8)$$

где λ_1, λ_2 — постоянные Ламе, λ_3, λ_4, λ_5 — упругие модули третьего порядка.

Как следует из (1.5), (1.15), скорости распространения не зависят от модулей λ_3, λ_4, λ_5. Результаты вычисления зависимости χ/χ_0 от безразмерной величины $|\chi_0|\tau/c$ (τ — время распространения фронта вдоль луча) для плоской волны приведены на фигуре. Кривая *1* отражает изменение интенсивности для алюминиевого сплава ($\lambda_1=4{,}91$, $\lambda_2=2{,}60$, $\lambda_3=-18{,}95$, $\lambda_4=-19{,}80$, $\lambda_5=-32{,}0$), кривая *2* — для стали ($\lambda_1=11{,}10$, $\lambda_2=8{,}21$, $\lambda_3=-17{,}90$, $\lambda_4=-28{,}20$, $\lambda_5=-70{,}80$). Значения упругих модулей даны в 10^{10} Н/м [12]. Из графиков видно, что с ростом τ интенсивность плоской волны затухает.

3. Упрощающие предположения о недеформированном состоянии перед фронтом, принятые в предыдущих пунктах, позволили до конца изложить основные черты метода, основанного на последовательном применении условий совместности различных порядков к изучению свойств поверхностных волн. При переходе к общим условиям, когда лучевая картина в силу зависимости скоростей от направления распространения перестает быть тривиальной, способ построения определяющих уравнений не вызывает принципиальных затруднений, но сопровождается громоздкими преобразованиями. При этом обнаруживаются новые закономерности, связанные с отклонением луча от нормального положения. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае объемных волн [5].



Условие распространения слабых разрывов при конечных деформациях упругих материалов в общем случае по-прежнему может быть получено в форме (1.5), где акустический тензор $A_{jinm}\nu_j\nu_m$ принимает вид

$$A_{jinm}=\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial I_p\partial I_t}K_{pjh}K_{trm}+\frac{\partial\Phi}{\partial I_p}\left(\delta_{2p}2T_{jrhm}+3\delta_{3p}\left(\varepsilon_{jt}T_{trhm}+\varepsilon_{ht}T_{trjm}\right)\right)\right\}\times$$
$$\times(\delta_{nr}+u_{n,r})(\delta_{ih}+u_{i,h})+\sigma_{mj}\sigma_{ni},\quad K_{pjh}=\delta_{1p}\delta_{jh}+2\varepsilon_{jh}\delta_{2p}+2\varepsilon_{ji}\varepsilon_{ih}\delta_{3p} \qquad (3.1)$$

Величины u_i, ε_{ij}, σ_{ij}, входящие в (3.1), соответствуют значениям перед фронтом волны.

Скорости G находятся из уравнения

$$\det\|A_{jinh}\nu_k\nu_j-\rho\delta_{ni}G^2\|=0 \qquad (3.2)$$

и в отличие от (1.5) зависят от компонент ν_i.

Вектор разрыва ω_i удобно представлять в форме $\omega_i=\omega s_i$, $s_i s_i=1$.

Пусть нелинейно-упругое тело ограничено свободной поверхностью, уравнение которой в недеформированном состоянии $x_3=0$, и кривая l — фронт поверхностной волны, при переходе через который терпят разрывы вторые производные перемещений. Тогда, учитывая соотношение (3.2), допускающее существование трех объемных волн ускорения (в том числе и неоднородных), и рассматривая поверхностную волну как трехпарциальную, запишем разрыв на поверхности в виде

$$[f]_l=\sum_{k=1}^{3}[f]_{(k)} \qquad (3.3)$$

Алгоритм применения условий совместности первого порядка позволяет получить уравнения, аналогичные (1.14), в форме

$$n_j A_{jinm} \sum_{k=1}^{3} (-G\nu_m s_n)\,\omega_{(k)}=0 \tag{3.4}$$

Приравнивая нулю определитель системы (3.4), имеем

$$\det\|n_j A_{jinm}(-G\nu_m s_n)_{(k)}\|=0 \tag{3.5}$$

При помощи (3.5) могут быть найдены возможные скорости поверхностных волн. Интенсивность χ определяется следующим образом: $\omega_{(k)}=$ $=\chi R_{(k)}$, при этом

$$n_j A_{jinm} \sum_{k=1}^{3} (-G\nu_m s_n)_{(k)} R_{(k)}=0$$

Процедура получения дифференциального уравнения для χ основана на использовании граничных условий в разрывах

$$n_j\{[\sigma_{jk}^{\cdot\cdot}]_l(\delta_{ik}+u_{i,k})+2[\sigma_{jk}^{\cdot}v_{i,k}]_l+\sigma_{jk}[v_{i,k}]_l\}=0 \tag{3.6}$$

и условий совместности (1.12). С учетом (3.6), (2.2), (1.3) получена неоднородная система уравнений относительно величин $W_{(k)}$

$$n_j A_{jinm} \sum_{k=1}^{3} (-G\nu_m s_n)_{(k)} W_{(k)}=Q_i(\omega_{(k)}) \quad {\scriptstyle (i=1,2,3)}, \qquad W_{n(k)}=W_k s_n+F_{n(k)}(\omega_i) \tag{3.7}$$

Условие разрешимости системы (3.7) дает уравнение для χ, структура которого отлична от (2.5)

$$d_1\partial\chi/(c\partial\tau)+d_2\partial\chi/\partial\alpha+d_3\chi+d_4\chi^2=0 \tag{3.8}$$

Здесь τ, α — ортогональные лучевые координаты, введенные в п. 2, локальный базис которых представлен единичными векторами, направленными соответственно по нормали и по касательной к кривой разрыва l. Дифференциальные операторы $Q_i(\omega_{(k)})$, $F_{n(k)}(\omega_i)$, а также выражения для d_i не выписаны ввиду их громоздкости.

Пусть зависимости

$$d\tau/d\lambda=d_1/c,\quad d\alpha/d\lambda=d_2 \tag{3.9}$$

определяют кривую $\tau=\tau(\lambda)$, $\alpha=\alpha(\lambda)$. Дифференцирование сложной функции $\chi(\tau(\lambda),\alpha(\lambda))$ дает

$$\frac{d\chi}{d\lambda}=\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}+\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{d\lambda}=d_1\frac{\partial\chi}{c\partial\tau}+d_2\frac{\partial\chi}{\partial\alpha} \tag{3.10}$$

В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d\chi/d\lambda+d_3(\lambda)\chi+d_4(\lambda)\chi^2=0 \tag{3.11}$$

Линию, задаваемую соотношениями (3.9), назовем акустическим поверхностным лучом. Анализ коэффициентов d_1, d_2 показывает, что отклонение луча от нормали вызвано присутствием сдвиговой компоненты тензора начальных напряжений перед фронтом.

В результате приходим к выводу, что распространение поверхностных волн сопровождается затуханием, обусловленным квадратичными членами в уравнениях переноса (3.11), (2.5) и не связанным с геометрической расходимостью лучей. Влияние нелинейности сказывается и в отклонении луча, вдоль которого происходит распространение поверхностного разрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hayes M., Rivlin R. S.* Surface waves in deformed elastic material. — Arch. Rat. Mech. and Anal., 1961, v. 8, No. 5, p. 358—380.
2. *Willson A. J.* Surface and plate waves in biaxially-stressed elastic media. — Pure and Appl. Geophys., 1973, v. 102, No. 1, p. 182—192.
3. *Махорт Ф. Г.* К теории распространения поверхностных волн в упругом теле с начальными деформациями. – Прикл. механика, 1971, т. 7, вып. 2, с. 34–40.
4. *Truesdell C.* General and exact theory of waves in finite elastic strain. — Archiv. Rat. Mech. Anal., 1961, v. 8, No. 4, p. 263—296.
5. *Веселовский З.* Волны ускорений при конечных деформациях упругих материалов. — Механика: Сб. перев. иностр. статей, 1973, № 4, с. 143—152.
6. *Chadwick P., Ogden R. W.* On the definition of elastic moduli. — Arch. Rat. Mech. and Anal., 1971, v. 44, No. 1, p. 41—53.
7. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
8. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 455 с.
9. *Быковцев Г. И., Дурова В. Н.* Лучевой метод решений уравнений газовой динамики. – Прикл. механика, 1978, т. 14, № 9, с. 118–124.
10. *Thomas T.* The general theory of compatibility condition. — Internat. J. Engng Sci., 1966, v. 4, No. 3, p. 207—223.
11. *Бабич В. М.* О распространении волн Рэлея вдоль поверхности однородного упругого тела произвольной формы.– Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 6, с. 1263–1266.
12. *Бестужева Н. П., Чигарев А. В.* Распространение поверхностных волн в стохастически неоднородной упругой среде (марковское приближение). — ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 746–752.

Воронеж

Поступила в редакцию
6.I.1981