

УДК 539.374

## ОПТИМАЛЬНАЯ ФОРМА АРМИРОВАННОЙ КОЛОННЫ, НАРАЩИВАЕМОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ СКОРОСТЬЮ

КОЛМАНОВСКИЙ В. Б., МЕТЛОВ В. В.

Рассмотрена задача оптимизации формы армированной колонны, возводимой со случайной скоростью. Материал колонны обладает свойствами ползучести и неоднородного старения. В общем случае установлены формулы, дающие решение задачи в параметрическом виде. Для ряда характерных ситуаций численно получена оптимальная форма колонны. Установлено, что оптимальная форма существенно зависит от скорости возведения. Проанализирована связь оптимальной формы при детерминированной и случайной скоростях возведения.

Используемая в работе модель вязкоупругого неоднородно-старяющегося тела предложена в [4]. Некоторые задачи оптимального проектирования тел, изготовленных из неоднородно-старяющихся вязкоупругих материалов, изучались в [2, 3]. Асимптотическое поведение решений краевой задачи теории ползучести неоднородно-старяющихся тел исследовалось в [4], а вопросы устойчивости таких тел — в [5, 6].

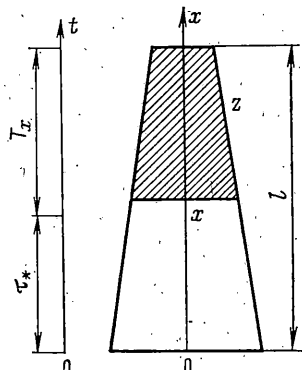
**1. Постановка задачи.** Пусть возводится армированная колонна заданного объема  $V$  и высоты  $l$  из вязкоупругого материала, обладающего свойствами ползучести и старения. Поперечные сечения колонны являются подобными фигурами и отличаются размером. Спустя время  $t_0$  после возведения колонны на нее ставится нагрузка весом  $P_0$ . Скорость возведения, равная объему, возводимому за единицу времени, есть некоторый неотрицательный случайный процесс  $v(t)$ . Каждой траектории скорости  $v$  соответствует величина  $u_0$ , равная перемещению верхнего сечения колонны за время с момента окончания возведения до бесконечности. Требуется найти такую профиль колонны, при котором среднее значение (т. е. математическое ожидание) перемещения верхнего сечения  $Mu_0$  минимально.

Введем координату  $x$ , отсчитываемую от основания колонны вертикально вверх (фиг. 1). Искомую площадь поперечного сечения обозначим  $y(x)$ , а объем части колонны над уровнем  $x - z(x)$ . Пусть  $\tau_*(x)$  — время возведения колонны до уровня  $x$  и  $v_x(t) = v(\tau_*(x) + t)$  — случайная скорость возведения начиная с момента  $\tau_*(x)$ , где  $t \geq 0$ . Минимум из двух чисел  $a$  и  $b$  обозначим  $a \wedge b$ . Объем части колонны над уровнем  $x$  спустя время  $t$  после зарождения сечения  $x$  равен

$$W_x(t) \wedge z(x) = W(t \wedge T_x), \quad W_x(t) = \int_0^t v_x(s) ds$$

Здесь  $T_x$  — время возведения части колонны, находящейся выше уровня  $x$ , определяемое из условия  $W_x(T_x) = z(x)$ .

Пусть  $y_0(x)$  и  $y_a(x)$  — соответственно площадь поперечного сечения основного материала и суммарная площадь арматуры на уровне  $x$ . Обо-



Фиг. 1

значим через  $\alpha$  постоянную долю площади основного материала в общей площади поперечного сечения, т. е.  $\alpha = y_0(x)/y(x)$ ,  $y(x) = y_0(x) + y_a(x)$ .

Пусть  $\varepsilon_a(t, x)$ ,  $\varepsilon_0(t, x)$  и  $\sigma_a(t, x)$ ,  $\sigma_0(t, x)$  — соответственно деформации и напряжения в сечении  $x$  в арматуре и основном материале спустя время  $t$  после момента  $\tau_*(x)$ . Пусть  $P(t, x)$  — сила, действующая в сечении  $x$  спустя время  $t$  после момента  $\tau_*(x)$ , а  $g$  — средний вес единицы объема армированного материала, равный  $g = \alpha g_0 + (1 - \alpha) g_a$ . Здесь  $g_0$  и  $g_a$  — соответственно средний вес единицы объема основного материала и арматуры. Запишем уравнения совместности деформаций и равновесия

$$\varepsilon_a(t, x) = \varepsilon_0(t, x) = \varepsilon(t, x) \quad (1.1)$$

$$y_a(x)\sigma_a(t, x) + y_0(x)\sigma_0(t, x) = P(t, x) \quad (1.2)$$

Примем, что связь между напряжением и деформацией имеет вид

$$\varepsilon_a(t, x) = \sigma_a(t, x)/E_a(x) \quad (1.3)$$

$$\sigma_0(t, x) = E_0(t, x) (\varepsilon_0(t, x) + \int_0^t R(t, \tau, x) \varepsilon_0(\tau, x) d\tau) \quad (1.4)$$

Здесь  $E_a(x)$  — модуль упругости арматуры,  $E_0(t, x)$  и  $R(t, \tau, x)$  — упругомгновенный модуль и ядро релаксации основного материала [4]. Из (1.1)–(1.4) вытекает, что

$$\varepsilon(t, x) + \beta^*(t, x) \int_0^t R(t, \tau, x) \varepsilon(\tau, x) d\tau = q(t, x) \quad (1.5)$$

$$\beta^*(t, x) = \alpha E_0(t, x) / [\alpha E_0(t, x) + (1 - \alpha) E_a(x)] \quad (1.6)$$

$$q(t, x) = P(t, x) / [y(x) (\alpha E_0(t, x) + (1 - \alpha) E_a(x))] \quad (1.7)$$

Из (1.5) получим ( $S(t, \tau, x)$  — резольвента ядра  $\beta^*(t, x)R(t, \tau, x)$ ):

$$\varepsilon(t, x) = q(t, x) + \int_0^t S(t, \tau, x) q(\tau, x) d\tau \quad (1.8)$$

Отметим, что при  $\alpha = 1$  функция  $S(t, \tau, x)$  переходит в ядро ползучести основного материала, умноженное на  $-E_0$ .

Величина  $u_0$  равна  $u_0 = u(\infty) - u(T)$ , где  $T$  — время возведения колонны и

$$u(T) = \int_0^l \varepsilon(T, x) dx, \quad u(\infty) = \int_0^l \varepsilon(\infty, x) dx, \quad \varepsilon(\infty, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t, x)$$

Существование предела  $\varepsilon(\infty, x)$  обеспечивается следующими условиями, налагаемыми на ядро  $S(t, \tau, x)$ .

1. Существует функция  $\mu(\tau, x)$ , такая, что

$$\mu(\tau, x) = \lim_{t \rightarrow \infty} S(t, \tau, x), \quad \int_0^\infty |\mu(t, x)| dt < \infty \quad (x \in [0, l]) \quad (1.9)$$

2. Найдется функция  $S_0(t, x)$ , для которой

$$\limsup_{\xi \rightarrow \infty} \int_{\xi}^{\infty} |S(t, \tau, x) - S_0(t - \tau, x)| d\tau = 0$$

$$\int_0^\infty |S_0(t, x)| dt < \infty \quad (x \in [0, l])$$

Из условий 1, 2 и соотношений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q(t, x) = q(\infty, x), \quad |q(t, x)| \leq C \quad (1.10)$$

следует [4]:

$$\varepsilon(\infty, x) = q(\infty, x) \left( 1 + \int_0^{\infty} S_0(t, x) dt \right) + \int_0^{\infty} q(t, x) \mu(t, x) dt \quad (1.11)$$

При помощи (1.11) получаем

$$u_0 = \int_0^l \left[ q(\infty, x) \left( 1 + \int_0^{\infty} S_0(\tau, x) d\tau \right) + \int_0^{\infty} \mu(\tau, x) q(\tau, x) d\tau - \right. \\ \left. - q(T_x, x) - \int_0^{T_x} S(T_x, \tau, x) q(\tau, x) d\tau \right] dx$$

Заметим, что

$$q(t, x) = [g(W_x(t) \wedge z(x)) + P_0 I(t \geq T_x + t_0)] / [y(x) E(t, x)] \\ E(t, x) = \alpha E_0(t, x) + (1 - \alpha) E_a(x)$$

где  $I(\dots)$  — функция, равная единице, если условие в скобках выполнено, и нулю в противном случае. Тогда

$$Mu_0 = \int_0^l \frac{F(z(x), x)}{y(x)} dx, \quad F(z, x) = \frac{gz + P_0}{E(\infty, x)} \left( 1 + \int_0^l S_0(\tau, x) d\tau \right) + \\ + M \int_0^{\infty} \frac{\mu(t, x)}{E(t, x)} [g(W_x(t) \wedge z(x)) + P_0 I(t \geq T_x + t_0)] dt - M \frac{gz}{E(T_x, x)} - \\ - M \int_0^{T_x} S(T_x, t, x) g W_x(t) dt \quad (1.12)$$

Таким образом, нахождение оптимальной формы армированной колонны, возводимой со случайной скоростью, сведено к определению функции  $z(x)$ , являющейся решением следующей вариационной задачи ( $z'(x) = \partial z(x) / \partial x$ ):

$$- \int_0^l \frac{F(z(x), x)}{z'(x)} dx \rightarrow \min_{z(x)}, \quad z(0) = V, \quad z(l) = 0 \quad (1.13)$$

Рассмотрим случай, когда имеется неоднородность реологических свойств по координате  $x$ , обусловленная лишь различным возрастом (моментом зарождения) разных сечений колонны, т. е. отсутствует явная зависимость функций  $E_0$ ,  $E_a$  и  $R$  от  $x$ . Если при этом распределение вероятностей процессов  $v_x(t)$  не зависит от  $x$ , то функция  $F$  в (1.13) также не зависит явно от  $x$ . В этом случае решение  $z(x)$  задачи (1.13) определяется соотношениями [3]:

$$\int_0^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = D(l - x), \quad D = \frac{1}{l} \int_0^V \frac{d\xi}{F(\xi)} \quad (1.14)$$

При этом минимальное значение математического ожидания перемещения верхнего сечения равно  $Mu_0 = l/D$ .

2. **Оптимальная форма колонны при скачкообразной случайной скорости возведения.** Сравнение с детерминированным случаем. Рассмотрим случай чередования двух режимов возведения: с постоянной скоростью  $v_0$  и с нулевой. Переход с одного режима возведения на другой происходит в случайные моменты времени. Скорость  $v(t)$  — марковский скачкообразный процесс с параметрами  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ , характеризующими экспоненциальное распределение интервалов времени, в течение которых скорость  $v(t)$  равна нулю и  $v_0$  соответственно. При этом  $\lambda_0^{-1}$  и  $\lambda_1^{-1}$  есть средние значения длин этих интервалов [7].

Пренебрегая армированием колонны и зависимостью упругомгновенного модуля  $E_0 = E$  от времени, учитывая (1.7), (1.8) при  $S = -EK$ , получим

$$\varepsilon(t, x) = \frac{1}{Ey(x)} \left( P(t, x) - E \int_0^t K(t, \tau) P(\tau, x) d\tau \right)$$

$$P(t, x) = g(W_x(t) \wedge z(x)) + P_0 I(t \geq T_x + t_0)$$

где  $K(t, \tau)$  — ядро ползучести. Отметим, что в абсолютном времени  $t_1 = t + \tau_*(x)$  уравнение состояния принимает обычную в теории неоднородного старения форму [4]:

$$\varepsilon_1(t_1, x) = \frac{1}{Ey(x)} \left[ P_1(t_1, x) - E \int_{\tau_*(x)}^{t_1} K(t_1 + \tau_*(x), \tau - \tau_*(x)) P_1(\tau, x) d\tau \right]$$

$$\varepsilon_1(t_1, x) = \varepsilon(t, x), \quad P_1(t_1, x) = P(t, x), \quad (t_1 \geq \tau_*(x)) \quad (2.1)$$

Из уравнения состояния и формулы (1.12) вытекает, что функция  $F(z, x)$  равна ( $\mu(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} K(t, \tau)$ ):

$$F(z, x) = \frac{1}{E} \left( (gz + P_0) \left( 1 - E \int_0^{\infty} K_0(\tau) d\tau \right) - EM \int_0^{\infty} \mu(t) [g(W_x(t) \wedge z) + \right.$$

$$\left. + P_0 I(t \geq T_x + t_0)] dt - gz + gEM \int_0^{T_x} K(T_x, t) W_x(t) dt \right)$$

$$K_0(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} K(\tau + t, \tau)$$

Заметим, что  $v_x(0) = v(\tau_*(x)) = v_0$  с вероятностью 1. Отсюда и из однородности марковского процесса  $v(t)$  вытекает, что распределение вероятностей процессов  $v_x(t)$  совпадает с распределением процесса  $v(t)$  при  $v(0) = v_0$ . Значит, функция  $F$  в (2.1) не зависит от  $x$ . Положим  $W(t) = \int_0^t v(s) ds$ , где интеграл берется на отрезке  $[0, t]$ .

Для вычисления первого математического ожидания в (2.1) необходимо знать распределение вероятностей процесса  $W(t)$  и момента  $T_x$ . Введем следующие плотности вероятностей:

$$\rho^0(t, w) = dP(v(t) = 0, W(t) \leq w) / dw$$

$$\rho^1(t, w) = dP(v(t) = v_0, W(t) \leq w) / dw \quad (-\infty < w < +\infty)$$

где  $P(\dots)$  — вероятность события, заключенного в скобках. Плотность вероятности процесса  $W(t)$  равна

$$\rho(t, w) = dP(W(t) \leq w) / dw = \rho^1(t, w) + \rho^0(t, w)$$

Плотности  $\rho^1$  и  $\rho^0$  удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\partial \rho^1(t, w) / \partial t = -v_0 \partial \rho^1(t, w) / \partial w + \lambda_0 \rho^0(t, w) - \lambda_1 \rho^1(t, w)$$

$$\partial \rho^0(t, w) / \partial t = \lambda_1 \rho^1(t, w) - \lambda_0 \rho^0(t, w) \quad (-\infty < w < \infty, t \geq 0) \quad (2.2)$$

Для доказательства (2.2) воспользуемся марковским свойством процесса  $v(t)$  в следующей форме. Условное распределение вероятностей процесса  $v$  в момент  $t+\Delta$ , где  $\Delta>0$ , при заданной траектории процесса  $v$  на отрезке от 0 до  $t$  зависит лишь от значения процесса  $v$  в момент  $t$  и определяется соотношениями [7]:

$$\begin{aligned} P(v(t+\Delta)=v_0/v(t)=0) &= \lambda_0\Delta + o(\Delta) \\ P(v(t+\Delta)=0/v(t)=0) &= 1 - \lambda_0\Delta + o(\Delta) \\ P(v(t+\Delta)=v_0/v(t)=v_0) &= 1 - \lambda_1\Delta + o(\Delta) \\ P(v(t+\Delta)=0/v(t)=v_0) &= \lambda_1\Delta + o(\Delta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $P(A/B)$  — условная вероятность события  $A$  при условии события  $B$ , а  $o(\Delta)$  — функции, для которых  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1}o(\Delta) = 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$ .

Пусть  $h(w)$  — произвольная финитная непрерывно дифференцируемая функция. Заметим, что  $(h'(w) = dh/dw)$

$$\begin{aligned} & h(W(t+\Delta))I(v(t+\Delta)=v_0) - h(W(t))I(v(t)=v_0) = \\ & = h'(W(t))(W(t+\Delta) - W(t))I(v(t+\Delta)=v_0) + h(W(t))[I(v(t+\Delta)=v_0) - I(v(t)=v_0)] + o(\Delta) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рассмотрим математическое ожидание второго слагаемого в правой части (2.4). Используя условное математическое ожидание [8], имеем

$$\begin{aligned} Q &= Mh(W(t))(I(v(t+\Delta)=v_0) - I(v(t)=v_0)) = \\ &= M(M(h(W(t))(I(v(t+\Delta)=v_0) - I(v(t)=v_0))/v(s), 0 \leq s \leq t)) \end{aligned}$$

Так как  $W(t)$  определяется траекторией  $(v(s), 0 \leq s \leq t)$ , то

$$\begin{aligned} & M(h(W(t))(I(v(t+\Delta)=v_0) - I(v(t)=v_0))/v(s), 0 \leq s \leq t) = \\ & h(W(t))(M(I(v(t+\Delta)=v_0)/v(s), 0 \leq s \leq t) - I(v(t)=v_0)) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь марковским свойством скорости  $v$  и формулами (2.3):

$$\begin{aligned} & M(I(v(t+\Delta)=v_0)/v(s), 0 \leq s \leq t) = M(I(v(t+\Delta)=v_0)/v(t)) = \\ & = I(v(t)=v_0)P(v(t+\Delta)=v_0/v(t)=v_0) + I(v(t)=0)P(v(t+\Delta)=v_0/v(t)=0) = \\ & = I(v(t)=v_0)(1 - \lambda_1\Delta + o(\Delta)) + I(v(t)=0)(\lambda_0\Delta + o(\Delta)) \end{aligned}$$

Таким образом, математическое ожидание второго слагаемого в правой части (2.4) равно

$$Q = [M(h(W(t))I(v(t)=0))\lambda_0 - M(h(W(t))I(v(t)=v_0))\lambda_1]\Delta + o(\Delta)$$

Аналогично можно показать, что математическое ожидание первого слагаемого в правой части (2.4) равно

$$Q_1 = Mh'(W(t))(W(t+\Delta) - W(t))I(v(t+\Delta)=v_0) = M(h'(W(t))I(v(t)=v_0))v_0\Delta + o(\Delta)$$

Вычисляя математическое ожидание от обеих частей (2.4), получим с учетом выражений для  $Q$  и  $Q_1$ :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} [h(w)\rho^1(t+\Delta, w) - h(w)\rho^1(t, w)]dw = \\ & = \Delta \int_{-\infty}^{\infty} [v_0h'(w)\rho^1(t, w) + \lambda_0h(w)\rho^0(t, w) - \lambda_1h(w)\rho^1(t, w)]dw + o(\Delta) \end{aligned}$$

Интегрируя здесь по частям первое слагаемое в правой части и делив на  $\Delta$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} h(w) \left[ \frac{\rho^1(t+\Delta, w) - \rho^1(t, w)}{\Delta} + \right. \\ & \left. + v_0 \frac{\partial \rho^1(t, w)}{\partial w} - (\lambda_0\rho^0(t, w) - \lambda_1\rho^1(t, w)) \right] dw = o(\Delta)\Delta^{-1} \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\Delta \rightarrow 0$ , заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(w) \left[ \frac{\partial \rho^1(t, w)}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho^1(t, w)}{\partial w} - (\lambda_0\rho^0(t, w) - \lambda_1\rho^1(t, w)) \right] dw = 0$$

Отсюда ввиду произвольности функций  $h$  получаем первое из уравнений системы (2.2). Аналогично доказывается и второе из уравнений (2.2).

Пусть скорость наращивания принимает счетное число неотрицательных значений  $v_i$  ( $i=0, 1, \dots$ ). Положим  $\rho^i(t, w) = dP(W(t) \leq w, v(t) = v_i) / dw$ . Подобно выводу уравнений (2.2), можно установить справедливость соотношений

$$\frac{\partial \rho^i(t, w)}{\partial t} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_{ij} \rho^j(t, w) - v_i \frac{\partial \rho^i(t, w)}{\partial w}$$

Здесь  $\lambda_{ij}$  — интенсивности вероятностей перехода, т. е. [8]:  $P(v(t+\Delta) = v_i / v(t) = v_j) = \delta_{ij} + \lambda_{ij} \Delta + o(\Delta)$ ,  $\Delta > 0$ .

Начальными условиями для системы уравнений (2.2) служат соотношения  $\rho^i(0, w) = \delta(w)$ ,  $\rho^0(0, w) = 0$ , где  $\delta(w)$  — дельта-функция. Применяя преобразование Лапласа по времени к уравнениям (2.2) с учетом начальных условий, получим

$$\lambda \rho^{1L}(\lambda, w) - \delta(w) = -v_0 \frac{\partial \rho^{1L}(\lambda, w)}{\partial w} + \lambda_0 \rho^{0L} - \lambda_1 \rho^{1L} \quad (2.5)$$

$$\lambda \rho^{0L}(\lambda, w) = \lambda_1 \rho^{1L}(\lambda, w) - \lambda_0 \rho^{0L}(\lambda, w)$$

где  $\rho^{iL}(\lambda, w)$  — преобразование Лапласа функции  $\rho^i(t, w)$  ( $i=1, 0$ ).

Из (2.5), исключая  $\rho^{0L}$ , получим

$$\partial \rho^{1L} / \partial w + \rho^{1L} (\lambda (\lambda + \lambda_1 + \lambda_0) / v_0 (\lambda + \lambda_0)) = \delta(w) / v_0$$

Общее решение этого уравнения имеет вид ( $C$  — произвольная постоянная):

$$\rho^{1L}(\lambda, w) = (C + \theta(w) v_0^{-1}) u(w, \lambda) \quad (-\infty < w < \infty)$$

$$u(w, \lambda) = e^{wb(\lambda)}, \quad b(\lambda) = \frac{\lambda (\lambda + \lambda_1 + \lambda_0)}{v_0 (\lambda + \lambda_0)}, \quad \theta(w) = I(w \geq 0)$$

Отсюда, учитывая требование интегрируемости функции  $\rho^{1L}(\lambda, w)$  по  $w \in (-\infty, \infty)$ , заключаем, что  $C = 0$ , поэтому

$$\rho^{1L}(\lambda, w) = \theta(w) v_0^{-1} u(w) \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует

$$\rho^L = \rho^{1L} + \rho^{0L} = \theta(w) b(\lambda) \lambda^{-1} u(w, \lambda) \quad (2.7)$$

Найдем плотность вероятности времени  $T_x$ . Примем во внимание, что  $\rho^1(t, w) = 0$  для всех  $w \geq v_0 t$ . Отсюда и из (2.2) вытекает

$$\frac{dP(T_x \leq t)}{dt} = \frac{dP(W(t) \geq Z)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_z^{\infty} [\rho^0(t, w) + \rho^1(t, w)] dw = \quad (2.8)$$

$$= \int_z^{\infty} \left[ \frac{\partial \rho^0(t, w)}{\partial t} + \frac{\partial \rho^1(t, w)}{\partial t} \right] dw = -v_0 \int_z^{\infty} \frac{\partial \rho^1(t, w)}{\partial w} dw = v_0 \rho^1(t, z), \quad z = z(x)$$

Используем соотношение [1] ( $C(t, \tau)$  — мера ползучести):

$$K(t, \tau) = \partial C(t, \tau) / \partial \tau, \quad C(t, t) = 0 \quad (2.9)$$

Представим последний интеграл в формуле (2.1) в виде

$$\int_0^{T_x} K(T_x, t) W_x(t) dt = - \int_0^{T_x} C(T_x, t) v_x(t) dt \quad (2.10)$$

Для вычисления математического ожидания интеграла (2.10) введем следующие плотности вероятностей:

$$\rho_i^j(t, s, w) = \frac{dP(W(s+t) \leq w, v(s+t) = v^i, v(s) = v^j)}{dw} \quad (i, j = 0, 1)$$

$$s \geq 0, \quad v^0 = 0, \quad v^1 = v_0, \quad t \geq 0 \quad (2.11)$$

Аналогично (2.2) доказываем, что функции  $\rho_j^i$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \partial \rho_i^1(t, s, w) / \partial t &= -v_0 \partial \rho_i^1(t, s, w) / \partial w + \lambda_0 \rho_i^0 - \lambda_1 \rho_i^1 \\ \partial \rho_i^0(t, s, w) / \partial t &= \lambda_1 \rho_i^1 - \lambda_0 \rho_i^0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\rho_j^i(0, s, w) = I(i=j) \rho^i(s, w) \quad (i, j = 0, 1)$$

Решая систему (2.12) методом преобразования Лапласа по  $t$ , получим

$$\rho_i^{1z}(\lambda, s, w) = \frac{1}{v_0} \int_0^w \rho^1(s, w_1) u(w - w_1, \lambda) dw_1 \quad (2.13)$$

Вычислим следующую плотность вероятности

$$\begin{aligned} \frac{dP(T_x \leq s+t, v(s) = v_0)}{dt} &= \frac{dP(W(s+t) \geq z, v(s) = v_0)}{dt} = \\ &= \frac{d}{dt} \int_z^\infty (\rho_1^1(t, s, w) + \rho_1^0(t, s, w)) dw = \\ &= -v_0 \int_z^\infty \frac{\partial \rho_1^1(t, s, w)}{\partial w} dw = v_0 \rho_1^1(t, s, z), \quad z = z(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Используя соотношение (2.14), преобразуем правую часть формулы (2.10):

$$\begin{aligned} M \int_0^{T_x} C(T_x, s) v_x(s) ds &= \int_0^\infty M v_x(s) I(s \leq T_x) C(T_x, s) ds = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty I(\tau \geq s) C(\tau, s) v_0 \frac{dP(T_x \leq \tau, v(s) = v_0)}{d\tau} d\tau ds = \\ &= v_0^2 \int_0^\infty \int_0^\infty C(s+t, s) \rho_1^1(t, s, z(x)) dt ds \end{aligned} \quad (2.15)$$

Меру ползучести зададим в виде [1]:  $C(t, \tau) = (C_0 + A_0 \exp(-\beta\tau)) \times \times (1 - \exp[-\gamma(t-\tau)])$ .

Тогда ядро ползучести определится на основании (2.9) формулой

$$K(t, \tau) = -\beta A_0 e^{-\beta\tau} - \gamma C_0 e^{-\gamma(t-\tau)} - (\gamma - \beta) A_0 e^{-\gamma t + (\gamma - \beta)\tau}$$

Отсюда и из (2.1) вытекает, что  $\mu(\tau) = -\beta A_0 e^{-\beta\tau}$ . Аналогично, предельное разностное ядро определится соотношением  $K_0(t-\tau) = -\gamma C_0 \exp[-\gamma(t-\tau)]$ .

Для вычисления математических ожиданий в (2.1) воспользуемся формулами (2.6) — (2.9) и (2.15), в соответствии с которыми будем иметь

$$M \int_0^\infty (W(t) \wedge z) \mu(t) dt = \int_0^\infty \mu(t) \int_0^\infty (w \wedge z) \rho(t, w) dw dt =$$

$$= -\beta A_0 \int_0^{\infty} (w \wedge z) \alpha \rho^L(\beta, w) dw = -\frac{A_0}{b(\beta)} (1 - u(z, \beta))$$

Подобным же образом получаем, что

$$\begin{aligned} M \int_0^{\infty} \mu(t) I(t \geq T_x + t_0) dt &= v_0 \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} \mu(t) I(t \geq \tau + t_0) \rho^L(\tau, z) d\tau = \\ &= -\beta A_0 \int_0^{\infty} \left( \int_{\tau+t_0}^{\infty} e^{-\beta t} dt v_0 \rho^L(\tau, z) \right) d\tau = -A_0 e^{-\beta t_0} u(z, \beta), \quad z = z(x) \end{aligned}$$

Наконец, имеем

$$\begin{aligned} v_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} C(s+t, s) \rho_1^L(t, s, z) dt ds &= v_0 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (C_0 + A_0 e^{-\beta s}) (1 - e^{-\gamma t}) \rho_1^L(t, s, z) dt ds = \\ &= v_0 \int_0^{\infty} (C_0 + A_0 e^{-\beta s}) (\rho_1^{1L}(0, s, z) - \rho_1^{1L}(\gamma, s, z)) ds = \\ &= \int_0^{\infty} \left[ (C_0 + A_0 e^{-\beta s}) \int_0^{\infty} \rho^L(s, w) (1 - u(z-w, \gamma)) dw \right] ds = \\ &= \int_0^z [1 - u(z-w, \gamma)] (C_0 \rho^{1L}(0, w) + A_0 \rho^{1L}(\gamma, w)) dw \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $F(z)$  равна

$$\begin{aligned} F(z) &= P_0(1 + EC_0) / E + P_0 A_0 e^{-\beta t_0} u(z, \beta) + g C_0 (1 - u(z, \gamma)) / b(\gamma) + \\ &+ g A_0 (u(z, \beta) - u(z, \gamma)) (b(\gamma) - b(\beta))^{-1} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Из соотношений (1.14) найдем, что  $y(x) = -dz/dx = DF(z(x))$ . Окончательно, оптимальная форма колонны, возводимой со случайной скоростью, определяется следующей параметрической зависимостью

$$x = l - \frac{1}{D} \int_0^z \frac{d\xi}{F(\xi)}, \quad y = DF(z), \quad z \in [0, V], \quad D = \frac{1}{l} \int_0^V \frac{d\xi}{F(\xi)} \quad (2.17)$$

где функция  $F$  вычисляется по формуле (2.16).

Рассмотрим далее соотношение оптимальных профилей колонны при случайной скачкообразной скорости и при детерминированной постоянной скорости возведения. В детерминированной постановке оптимальная форма колонны определяется соотношениями (2.17) с функцией  $F(z)$ , равной

$$\begin{aligned} F(z) &= P_0(1 + EC_0) / E + A_0 P_0 \exp[\beta(t_0 + z/v)] + \\ &+ g v [(C_0/\gamma)(1 - e^{-\gamma z/v}) + (e^{-\beta z/v} - e^{-\gamma z/v}) / (\gamma - \beta)] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Видно, что формула (2.16) переходит в формулу (2.18) при двух предельных переходах:  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 = \text{const}$ ;  $\lambda_0 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_0/\lambda_1 = \text{const}$ . В первом случае устремляется к нулю среднее значение длин интервалов отсутствия возведения. В пределе получаем процесс возведения колонны с постоянной скоростью  $v = v_0$ . Во втором случае одновременно уменьшаются средние значения длин интервалов возведения и невозведения, так что значение средней скорости  $v_m = V/MT = v_0 \lambda_0 (\lambda_1 + \lambda_0)^{-1}$  остается постоян-



ным. В пределе получаем возведение с постоянной скоростью  $v=v_m$ . Отметим, что введенный параметр  $v_m$  не совпадает с вероятностным средним  $Mv(t)$ , которое зависит от  $t$ .

Из формул (2.16) и (2.18) видно, что влияние случайных остановок наращивания на расчет оптимальной формы колонны существенно лишь при интервалах остановок, в среднем сравнимых с характерными временами  $1/\beta$ ,  $1/\gamma$ . В то же время при очень коротких остановках, а также при очень частых и коротких остановках оно исчезает.

**3. Метод расчета оптимальной формы колонны, возводимой со случайной скоростью, с учетом армирования.** Будем считать модули  $E_a$  и  $E_0$  постоянными. Обозначим через  $A^\circ$  оператор Вольтерра с ядром  $A(t, \tau)$ , т. е.

$$A^\circ v(t) = \int_0^t A(t, \tau) v(\tau) d\tau$$

Введем в рассмотрение зависящий от параметра  $\alpha$  оператор  $R^\circ(\alpha, K_1^\circ)$ , равный  $R^\circ(\alpha, K_1^\circ) = \alpha K_1^\circ (I - \alpha K_1^\circ)^{-1}$ , где  $K_1^\circ$  — оператор Вольтерра, входящий в закон ползучести  $\varepsilon = (I - K_1^\circ) \sigma E_0^{-1}$ ,  $I$  — тождественный оператор. Отметим, что  $R^\circ(\alpha, K_1^\circ) / \alpha$  — резольвентный оператор, соответствующий  $K_1^\circ$  [9]. При помощи алгебры резольвентных операторов для оператора  $S^\circ$  с ядром  $S(t, \tau)$ , определяемым уравнением (1.8), имеем

$$S^\circ = -\beta^* (1 - \beta^*)^{-1} R^\circ(1 - \beta^*, K_1^\circ), \quad (3.1)$$

где параметр  $\beta^*$  определяется формулой (1.6). Далее, вырожденное ядро

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi_1(\tau) \int_\tau^t \exp \left( - \int_\tau^z \psi_1(s) ds \right) dz \right] \quad (3.2)$$

имеет своей резольвентой функцию

$$R(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi_2(\tau) \int_\tau^t \exp \left( - \int_\tau^z \psi_2(s) ds \right) dz \right] \quad (3.3)$$

где функции  $\varphi_2$  и  $\psi_2$  определяются соотношениями  $\varphi_2 = \varphi_1$ ,  $\psi_2 = \varphi_1 + \psi_1$ . В этом можно убедиться сведя интегральное уравнение  $x = (I - K^\circ) y$  к дифференциальному  $\dot{x} + \psi x = \dot{y} + (\varphi_1 + \psi_1) y$ .

Возьмем меру ползучести в виде

$$C(t, \tau) = \varphi_1(\tau) \int_\tau^t \exp \left( - \int_\tau^z \psi_1(u) du \right) dz$$

Тогда ядро ползучести определится формулой (3.2), а ядро  $S(t, \tau)$ , согласно (3.1), (3.3), равно

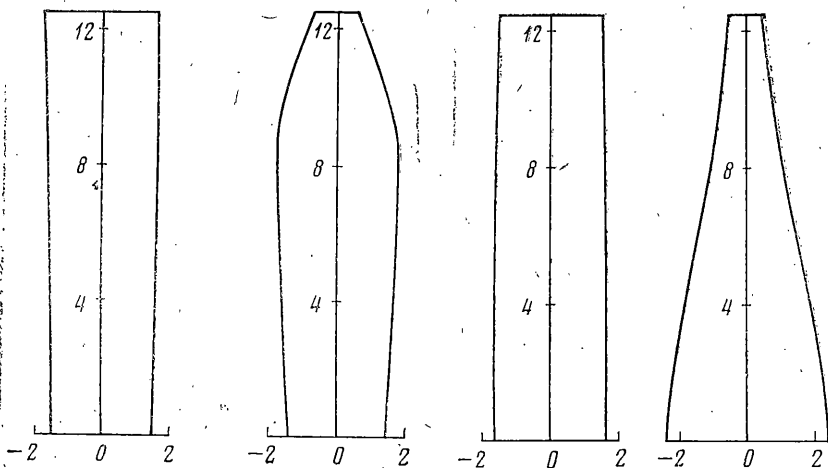
$$S(t, \tau) = -\beta^* E_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \varphi_1(\tau) \int_\tau^t \exp \left( - \int_\tau^z ((1 - \beta^*) E_0 \varphi_1(s) + \psi_1(s)) ds \right) dz \right]$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi_1(\tau) &= (C_0 + A_0 e^{-\beta \tau}) \gamma (\beta^*)^{-1} E E_0^{-1} \\ (1 - \beta^*) E_0 \varphi_1(\tau) + \psi_1(\tau) &= \gamma = \text{const} \end{aligned}$$

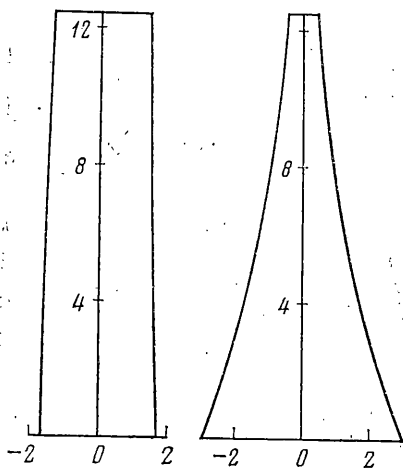
Тогда ядро  $S(t, \tau)$  имеет вид, соответствующий принятому в п. 2 выражению для ядра ползучести

$$S(t, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} [E (C_0 + A_0 e^{-\beta \tau}) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)})]$$

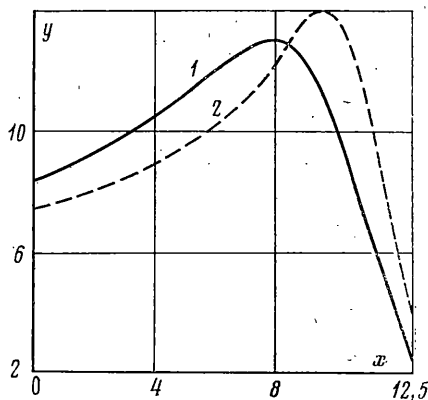


Фиг. 2

Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Следовательно, оптимальная форма армированной колонны найдется из полученных ранее соотношений (2.16), (2.17). При этом мера ползучести основного материала определится формулами

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) \gamma (\beta^*)^{-1} \int_{\tau}^t \exp \left[ -\gamma(z-\tau) + (1-\beta^*) \gamma (\beta^*)^{-1} \int_{\tau}^z \varphi(s) ds \right] dz, \\ \varphi(\tau) = (C_0 + A_0 e^{-\beta \tau}) E E_0^{-1} \quad (3.4)$$

При  $\beta^* = 1$  в (3.4) приходим к принятому в п. 2 выражению для меры ползучести. Отметим, что в рассмотренном методе для каждого значения параметра армирования  $\beta^*$  нужно подбирать постоянные  $C_0$ ,  $A_0$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  так, чтобы выражение (3.4) достаточно точно аппроксимировало реальные кривые ползучести.

На фиг. 2–4 показан оптимальный вертикальный профиль колонны с квадратным поперечным сечением при случайной скорости возведения. Для иных форм поперечного сечения зависимость площади сечения от высоты остается прежней и, следовательно, соответствующие профили отличаются лишь масштабным коэффициентом. При расчетах фиксированы следующие параметры:  $E_0 = 4 \cdot 10^{10}$  Н/м<sup>2</sup>;  $E_a = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>;  $\alpha = 0,99$ ;  $A_0 =$

$=0,7E_0^{-1}$ ;  $C_0=0,2E_0^{-1}$ ;  $g_0=2 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>;  $g_a=7,88 \cdot 10^4$  Н/м<sup>3</sup>;  $V=125$  м<sup>3</sup>;  $l=12,5$  м;  $\lambda_0=\lambda_1=0,03$  сут<sup>-1</sup>;  $\beta=0,025$  сут<sup>-1</sup>;  $\gamma=0,06$  сут<sup>-1</sup>;  $t_0=20$  сут. Для колонн в левой части фиг. 2–4  $P_0=3 \cdot 10^6$  Н, а в правой части  $P_0=3 \cdot 10^4$  Н; значения средней скорости для каждой фигуры постоянны и равны 1, 5, 30 м<sup>3</sup>/сут. Параметры  $C_0$ ,  $A_0$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  выбраны из условия аппроксимации выражением (3.4) кривых ползучести бетона, приведенных в [10].

На фиг. 5 приведены зависимости площади поперечного сечения колонны от высоты для случайной (кривая 1) и детерминированной (кривая 2) скорости возведения при  $v_m=v=1$  м<sup>3</sup>/сут.

При проектировании оптимальной колонны необходимо учитывать влияние неоднородности старения и собственного веса. Если средняя скорость возведения велика, то преобладающим является влияние собственного веса и соответствующая колонна оптимальной формы расширяется книзу. Если же средняя скорость возведения мала, то влияние неоднородности становится существенным и может привести к двум различным профилям, показанным на фиг. 2.

Результаты расчетов показывают отличие оптимальных профилей колонны при случайной и детерминированной скоростях возведения: при случайной скорости возведения площадь поперечного сечения изменяется более равномерно, что можно объяснить эффектом вероятностного осреднения в функционале (1.12).

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за внимание к работе и полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые задачи теории ползучести для неоднородно-старяющихся тел.— Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 153–164.
2. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Задача оптимизации в теории ползучести для неоднородных балок, подверженных старению.— Прикл. механика, 1979, т. 15, № 10, с. 97–106.
3. Арутюнян Н. Х., Зевин А. А. Задачи оптимизации в теории ползучести для нарастающих тел, подверженных старению.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 1, с. 100–107.
4. Арутюнян Н. Х., Шойхет Б. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи теории ползучести неоднородных стареющих тел с односторонними связями.— Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 31–48.
5. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно-старяющихся вязкоупругих стержней.— ПММ, 1979, т. 43, вып. 4, с. 709–721.
6. Арутюнян Н. Х., Колмановский В. Б. Об устойчивости неоднородно-вязкоупругих стержней.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1980, № 4, с. 26–37.
7. Гизман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1965. 655 с.
8. Дуб Дж. Л. Вероятностные процессы. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 605 с.
9. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 383 с.
10. Ross A. D. Creep of concrete under variable stress.— J. Amer. Concr. Inst., 1958, v. 29, No. 9, p. 739–758.

Москва

Поступила в редакцию  
24.II.1981