

УДК 531.383

К АНАЛИЗУ СИЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОДВЕСА КРИОГЕННОГО ГИРОСКОПА

ЖУРАВЛЕВ В. Ф., РУДЕНКО В. М.

Предлагается методика приближенного расчета силовых характеристик подвеса криогенного гироскопа, которая позволяет получить конечные формулы для величин сил и жесткостей подвеса в случае поддерживающих катушек произвольной (не обязательно круговой) формы. Развиваемый подход дает возможность решать задачи оптимизации формы и параметров катушек подвеса, а также производить сравнительный анализ различных схем. Рассматриваемый метод расчета — асимптотический: указана предельная ситуация, при стремлении к которой погрешность вычислений стремится к нулю. Для частного случая кольцевого контура с током приведены оценки сверху и снизу для относительной погрешности в определении удерживающей силы.

В публикуемой работе рассматривается внешний магнитный неуправляемый подвес криогенного гироскопа, состоящий из одного или нескольких сверхпроводящих контуров с током. Задача расчета магнитного поля в различных частных случаях может быть решена в рядах по специальным функциям [1, 2]. Здесь же поставлена задача разработки приближенной методики расчета силовых характеристик криогенного подвеса, позволяющей получить конечные, удобные для анализа формулы для удерживающих контуров различной формы (не обязательно круговой). В основе приближенного решения лежит предположение о малости отношения зазора между контуром с током и ротором к радиусу ротора. Стремление к нулю этого отношения может быть достигнуто двумя путями: стремлением к нулю величины зазора (расстояние между контуром и ротором) и стремлением к бесконечности радиуса ротора. Математически оба пути эквивалентны и результаты получаются одинаковые, однако второй сразу приводит к простым и физически наглядным представлениям о силовом взаимодействии ротора и контура с током, что и кладется в основу расчета.

Рассмотрим следующую задачу. Ротор гироскопа (фиг. 1), имеющий форму шара радиуса R_c , выполненный из идеального диамагнитного материала ($\mu=0$), находится в магнитном поле, создаваемом замкнутым сверхпроводящим контуром l с током I . Будем считать, что этот контур представляет собой произвольную сферическую кривую, лежащую на сфере радиуса R ($R>R_c$). В предположении, что начальное значение тока в контуре известно, требуется определить равнодействующую и момент сил, действующих на ротор, а также жесткость такого подвеса. В невозмущенном состоянии центры обеих сфер совпадают. Обозначим l' центральную проекцию контура l на поверхность ротора. Впоследствии будет показано, что не уменьшая точности полученных решений некоторые из сделанных выше ограничений можно ослабить.

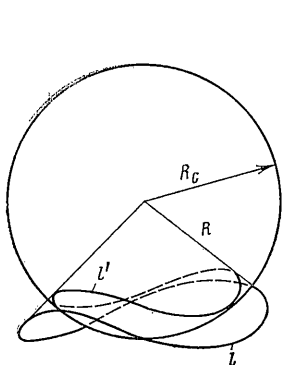
Для того чтобы получить точные силовые характеристики подвеса криогенного гироскопа необходимо решить уравнения магнитостатики

$$\operatorname{div} \mathbf{B}=0, \quad (1/\mu) \operatorname{rot} \mathbf{B}=\mathbf{j} \quad (1)$$

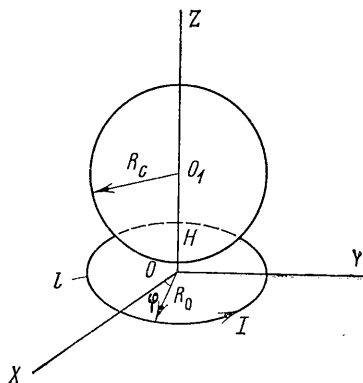
где $\mathbf{B}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока в точке, μ — магнитная проницаемость среды.

Решение уравнений (1) должно удовлетворять граничным условиям на шаре

$$\mathbf{B}_n|_0=0 \quad (2)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Кроме того, поле на бесконечности должно обращаться в нуль.

Будем строить асимптотическое решение поставленной уравнениями (1) и граничными условиями (2) задачи при следующих условиях:

$$(R-R_c)/R_c \rightarrow 0 \text{ при } R_c \rightarrow \infty; \quad (R-R_c)/\rho \rightarrow 0 \text{ при } R_c \rightarrow \infty \quad (3)$$

Первое условие означает, что расстояние (зазор) между шаром и контуром с током мало по сравнению с радиусом шара. Второе условие означает, что ρ — радиус кривизны контура есть величина одного порядка с R_c . Кроме того, будем считать, что контур l не имеет самопересечений, и что расстояние между различными участками контура много больше зазора между шаром и контуром. В этих условиях при $R_c \rightarrow \infty$ удельная сила, действующая между шаром и контуром l , стремится к удельной силе, действующей между прямолинейным проводником с током и сверхпроводящей плоскостью

$$\mathbf{F} = -\mu_0 I^2 n dl / (4\pi h) \quad (4)$$

Здесь μ_0 — магнитная проницаемость среды, в которой находится и ротор и контур l ; I — ток в контуре (в дальнейшем предполагается, что он зависит от смещений ротора), n — вектор внешней нормали, опущенной из элемента с током dl на поверхность ротора, h — высота элемента с током над поверхностью ротора. Если ротор не смещен из начального положения, то $h = R - R_c$.

Обозначим δ — смещение ротора, которое считается малым. Тогда выражение для силы, действующей на шар, можно получить интегрируя выражение (4):

$$\mathbf{F} = - \oint_l \frac{\mu_0 I^2(\delta) \mathbf{n} dl}{4\pi h} \quad (5)$$

Здесь ток I и расстояние h являются функциями δ . Зависимость h от δ определяется геометрией подвеса, а величину тока I будем определять исходя из постоянства магнитного потока, пронизывающего контур l .

В соответствии с принципом непрерывности магнитного потока [3]

$$\Phi = \oint_{S'} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

находим равенство, из которого определяем значение тока, протекающего в контуре l при заданном смещении ротора

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \text{const} = \Phi_0$$

Здесь S представляет собой часть конической поверхности, заключенной между сферой (ротором) и контуром с током (или, что то же самое, между контурами l и l' фиг. 1), Φ_0 — значение магнитного потока через поверхность S при отсутствии смещений ротора, а вектор магнитной индукции $\mathbf{B}$ будет определяться выражением

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I(\delta)}{2\pi} \left[\frac{1}{R(l) - r} + \frac{1}{R(l) - 2R_c + r} \right] \cdot [\mathbf{n} \times d\mathbf{l}] \quad (6)$$

где $R(l)$ — расстояние из центра шара (ротора) до элемента $d\mathbf{l}$ контура l , r — расстояние из центра шара до точки на конической поверхности S .

Из выражений (5) и (6) находим зависимость силы $\mathbf{F}$ от смещения δ , а дифференцируя выражение (5) по перемещению в заданном направлении, находим значение жесткости подвеса криогенного гироскопа в этом направлении. Если $\delta = (x, y, z)^T$ (индекс T означает транспонирование)

$$C_x = - \left. \frac{\partial F_x}{\partial x} \right|_{\delta=0}, \quad C_y = - \left. \frac{\partial F_y}{\partial y} \right|_{\delta=0}, \quad C_z = - \left. \frac{\partial F_z}{\partial z} \right|_{\delta=0} \quad (7)$$

Выражение для момента сил найдем с использованием выражения (4)

$$\mathbf{M} = - \oint_l \frac{\mu_0 I^2 [\mathbf{r} \times \mathbf{n}] dl}{[R(l) - r] 4\pi} \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — вектор, проведенный из центра шара (момент сил определяется относительно этой точки) в точку, являющуюся проекцией элемента dl на поверхность ротора. Если ротор — шар, вектор $\mathbf{r}$ коллинеарен вектору нормали $\mathbf{n}$ и момент сил будет равен нулю.

Вернемся к сделанным выше ограничениям. Считалось, что ротор гироскопа выполнен в виде шара. Однако для получения формул (4)–(8) достаточно выполнения условий (3) при стремлении к бесконечности радиуса кривизны поверхности ротора. Кроме того, выражение (4) может быть заменено аналогичным, но учитывающим магнитную проницаемость ротора μ_1 :

$$d\mathbf{F} = - \frac{\mu_0 I^2 \mathbf{n} dl}{4\pi h} \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right)$$

Выполнение условий (3) позволяет рассчитывать силы и моменты для контуров произвольной формы, не обязательно лежащих на сфере концентричной с ротором. В этих условиях с учетом несферичности ротора вектор нормали $\mathbf{n}$ к его поверхности уже не будет проходить через центр ротора — точку O , и выражение (8) в общем случае даст отличный от нуля момент.

Определим силы и жесткость подвесов для некоторых наиболее распространенных простейших схем криогенных гироскопов.

Рассмотрим (фиг. 2) криогенный подвес, где ротор, выполненный в виде шара, поддерживается контуром с током, выполненным в виде окружности. Введем систему координат O, X, Y, Z так, что начало координат точка O совпадает с центром окружности (контур l). Причем, контур l находится в плоскости O, X, Y , а сама система координат вместе с контуром считаются неподвижными. В невозмущенном положении в контуре l протекает ток I , а центр ротора точка O_1 лежит на оси OZ и отстоит от точки O на величину H .

Одновременно с системой координат O, X, Y, Z введем в рассмотрение (фиг. 2) полярный угол φ , определяющий вместе с радиусом R_0 точки контура l . Если ротор не смещен из начального положения, то расстояние h между точками контура l и ротором есть величина постоянная, равная $R - R_c$, где $R = (R_0^2 + H^2)^{1/2}$ — расстояние между центром ротора (точ-

кой O) и точками контура. Вектор нормали $\mathbf{n}$, восстановленной с поверхности ротора в точку контура, определяемую углом φ , дается выражением: $\mathbf{n} = [(R_0/R) \cos \varphi, (R_0/R) \sin \varphi, -\dot{H}/R]^T$.

Тогда в соответствии с выражением (5) находим приближенные значения проекций силы, действующей на ротор со стороны контура

$$F_x=0, \quad F_y=0, \quad F_z = - \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I^2 R_0}{4\pi (R-R_c)} \left(-\frac{H}{R} \right) d\varphi = \frac{\mu_0 I^2 R_0 H}{2R(R-R_c)} \quad (9)$$

Опуская несложные выкладки, приведем полученные при помощи описанной выше процедуры выражения для расчета жесткостей в рассматриваемом случае

$$C_x = C_y = \frac{\mu_0 I^2 R_0 [R_0^2 (2R-R_c) - 2R^2 (R-R_c)]}{4R^3 (R-R_c)^2} \quad (10)$$

$$C_z = \frac{\mu_0 I^2 R_0}{2R^2 (R-R_c)} \left\{ \frac{H^2}{R-R_c} - \frac{R_0^2}{R} + \frac{4H^2}{P_0} \left[\frac{R-r_0}{2(R-R_c)-r_0} - \frac{R_c}{R} \ln \left(2 - \frac{r_0}{R-R_c} \right) \right] \right\}$$

$$P_0 = R \ln \frac{R-R_c}{r_0} + (2R_c-R) \ln \left(2 - \frac{r_0}{R-R_c} \right)$$

где r_0 — радиус сечения проводника, I — ток в контуре в невозмущенном положении ротора, индекс внизу у знака жесткости указывает, по какой оси определяется ее значение.

Положим в выражениях (10) $H=0$ и $R_0=R$, что соответствует случаю, когда центр сверхпроводящего шара находится в плоскости кругового контура и совпадает с его центром. Отсюда находим

$$C_x = C_y = \mu_0 I^2 R_c / [4(R-R_c)^2], \quad C_z = -\mu_0 I^2 / [2(R-R_c)] \quad (11)$$

Для подвеса криогенного гироскопа с двумя независимыми круговыми контурами (т. е. значения токов в них могут быть различны) допустимо использовать выражения (10), учитывая взаимодействие сначала одного, а затем другого. В частности, если контуры одинаковые, ротор находится посредине между ними и токи в этом положении в контурах текут одинаковые, то будем иметь удвоенные значения жесткостей, определяемые выражениями (10). В этом случае, естественно, равнодействующая сил, действующих на ротор, будет равна нулю.

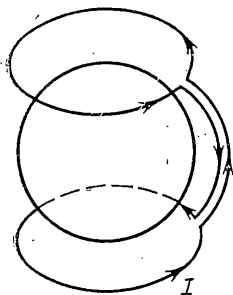
Если ротор криогенного гироскопа удерживается двумя связанными (фиг. 3) контурами (т. е. в них протекает один и тот же ток), то из формул (5), (6) и (7) находим

$$C_x = C_y = \{ \mu_0 I^2 R_0 [R_c R_0^2 - 2H^2 (R-R_c)] \} / [2(R-R_c)^2 R^3] \quad (12)$$

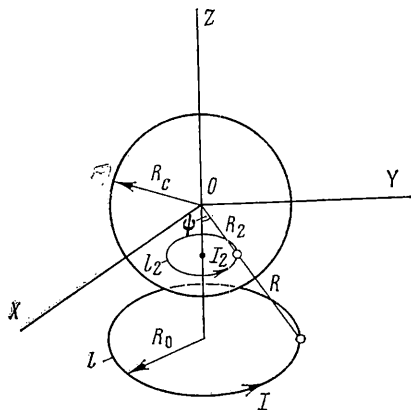
$$C_z = \{ \mu_0 I^2 R_0 [R H^2 - R_0^2 (R-R_c)] \} / [(R-R_c)^2 R^3]$$

Выражения (10)–(12) указывают зависимость жесткости подвеса от его параметров и имеют достаточно простой вид, удобный для дальнейшего анализа этих выражений. Например, из выражений (12) легко найти условия равной жесткости подвеса во всех направлениях. Для этого достаточно приравнять C_x величине C_z , после чего находим, что R_0/H должно равняться $\sqrt{2}$.

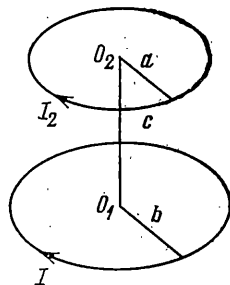
Проведем оценку точности предложенной методики расчета силовых характеристик подвеса криогенного гироскопа в том случае, когда имеется точное решение.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Рассмотрим сферическую сверхпроводящую оболочку радиуса R_c , удерживаемую в поле кругового постоянного тока (фиг. 4). Будем предполагать, что ток течет по круговому контуру радиуса R_0 , лежащему на сферической поверхности радиуса R с центром, совпадающим с центром ротора. Таким образом, в соответствии с фиг. 4 вертикальная ось является осью симметрии. Положение ротора относительно контура считается неизменным. Будем искать силу, действующую на сверхпроводящий ротор со стороны кругового контура с током. Найдем для поставленной задачи точное и приближенное решения и произведем их сравнение.

Найдем точное значение силы, действующей на ротор. Исходим из закона Био — Савара — Лапласа. Согласно этому закону, при отсутствии ферромагнитных сред отрезок линейного провода $d\mathbf{l}$, по которому течет ток I , создает магнитную индукцию $d\mathbf{B}$ в точке, удаленной на расстояние P от элемента тока, определяемую следующим образом: $d\mathbf{B} = \mu_0 I [d\mathbf{l} \times \mathbf{P}] / (4\pi P^3)$. Здесь $\mathbf{P}$ — вектор, проведенный от $d\mathbf{l}$ к точке, в которой определяется магнитная индукция. Результирующая индукция в этой точке

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{[d\mathbf{l} \times \mathbf{P}]}{P^3} \quad (13)$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру l .

В соответствии с методом изображений, который в применении к рассматриваемому случаю достаточно полно изложен в работах [4, 5], будем искать изображение l_2 контура l , внутри сферической оболочки.

Контур l_2 является круговым и вместе с контуром l находится на конусе с вершиной в центре ротора. На фиг. 4 обозначено: R_2 — расстояние от центра сферы до точек контура, I_2 — ток в контуре l_2 , H и H_2 — высота контуров l и l_2 соответственно над центром O .

Магнитная индукция от контуров l и l_2 представляет собой сумму двух составляющих, определяемых выражением (13) с интегрированием по соответствующему контуру. Полученное таким образом поле, вне ротора криогенного гироскопа, удовлетворяет уравнениям (1), а кроме того граничные условия (2) удовлетворяются, если выполнены следующие соотношения:

$$R_2 R = R_c^2, \quad I_2 \sqrt{R_2} + I \sqrt{R} = 0 \quad (14)$$

Определим силу, действующую на ротор гироскопа со стороны контура l с протекающим в нем током I . Для этого найдем силу взаимодействия между электрическими контурами l и l_2 (фиг. 5). Значение силы определяется [6] выражением

$$F = - \frac{\mu_0 I I_2 c}{[(a+b)^2 + c^2]^{3/2}} \left[-K + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{c^2 + (a-b)^2} E \right] \quad (15)$$

Здесь a и b — радиусы соответственно первого и второго контуров, а c — высота одного контура над другим (фиг. 5). С учетом соотношений (14) находим $a = R \sin \psi$, $b = (R_c^2/R) \sin \psi$, $c = [(R^2 - R_c^2)/R] \cos \psi$, где ψ — угол между образующей конуса и его осью симметрии.

В выражении (15) K и E — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, а модуль k определяется соотношением

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + c^2} = \frac{4R_c^2 R_0^2}{4R_c^2 R_0^2 + (R^2 - R_c^2)^2}$$

В исходных переменных выражение (15) примет вид

$$F = \frac{\mu_0 I^2 H}{R_c} \left[E \frac{(1+k'^2)}{2k'} - k' K \right] \quad (16)$$

где $H = R \cos \psi$ — высота ротора над контуром, а k' — дополнительный модуль, который определяется величиной зазора между контуром и ротором $k'^2 = (R^2 - R_c^2)^2 / [4R_0^2 R_c^2 + (R^2 - R_c^2)^2]$. Величина k'^2 — малый безразмерный параметр (порядка 0,01 ÷ 0,001). Это позволяет пользоваться разложениями полных эллиптических интегралов K и E по параметру k'^2 . Тогда

$$E \frac{1+k'^2}{2k'} - k' K = \frac{1}{2k'} - \frac{3k'}{4} \ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n k'^{2n+1} \quad (17)$$

$$a_n = \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n)^2 \cdot 2} \left[\frac{3}{2(n+1)(2n-1)} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{2}{1 \cdot 2} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \dots - \frac{2}{2n \cdot (2n-1)} \right) + \frac{3(4n+1)}{4(n+1)^2(2n-1)^2} \right]$$

Приближенное значение силы в соответствии с предложенной выше методикой расчета определяется выражением (9).

Величину относительной погрешности в определении посредством формулы (9) силы, действующей на ротор криогенного гироскопа, находим из соотношения

$$\delta = \left| \frac{F_n - F_r}{F_n} \right| = \left| 1 - \frac{F_r}{F_n} \right|$$

— где значения F_n и F_r определяются соответственно формулами (9), (16), (17).

Найдем оценку относительной погрешности δ . Для этого воспользуемся оценками выражения (17), которые затем с равенством (16) соответственно подставим в формулу для относительной погрешности. Из двух получившихся выражений выбираем наибольшее и тем самым находим строгую оценку сверху для величины относительной погрешности.

В выражении (17) коэффициенты ряда — a_n обладают некоторыми свойствами. Во-первых, для каждого n выполняется неравенство $a_n > 0$. Это позволяет для выражения (17) получить оценку снизу. Во-вторых, для $j > i$ выполняется неравенство $a_j < a_i$. Это свойство следует из соотношения

$$a_{n+1} = a_n \frac{(2n-1)(2n+1)}{4(n+1)(n+2)} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-3)^2 (2n-1)^2 3 (4n^2 + 18n + 3)}{2^2 \cdot 4^2 \dots (2n-2)^2 (2n)^2 (2n+2)^2 (2n+4)^2}$$

и позволяет получить оценку сверху для выражения (17). Окончательно для выражения (17) имеем оценки

$$0 < \left[E \frac{1+k'^2}{2k'} - k'K \right] - \frac{1}{2k'} + \frac{3k'}{4} \left(\ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) - \sum_{n=1} a_n k'^{2n+1} < a_p \frac{k'^{2p+3}}{1-k'^2}$$

где a_n определяются соотношениями (17), а целое p определяет точность оценок.

Кроме того, для полного эллиптического интеграла первого рода K существует оценка Трикоми: $\ln(4/k') < K < \frac{1}{2}\pi + \ln(1/k')$.

Сделав необходимые подстановки и упрощая выражение посредством закругления оценок, получаем

$$\delta < \left| \frac{R-R_c}{R+R_c} + \frac{(R-R_c)Rk'}{4R_0R_c} [6 \ln k' - 2(\pi + \ln 4) + 5] \right| \quad (18)$$

Пример. Рассмотрим криогенный гироскоп, имеющий параметры $R_c=100$, $R=105$; $R_0=70$. Для этих значений параметров подвеса криогенного гироскопа имеем $k'=0,073$, $\delta=0,0016$, $\delta_0=0,0026$. Здесь δ_0 — значение оценки относительной погрешности, найденное в соответствии с (18).

Для расчетов, не требующих большой точности, можно использовать оценку вида: $\delta < (R-R_c)/(R+R_c)$. Для рассмотренного числового примера выражение в правой части этого неравенства равно 0,0244.

Таким образом, точное решение отличается от приближенного на малые величины. При этом приближенная методика расчета силовых характеристик криогенного подвеса позволяет получить существенно более простые выражения (достаточно сравнить формулы (16) и (9)). Кроме того, точное решение поставленной задачи может быть выписано лишь в редких случаях.

Заметим, что выражение (5), (8) и (7) позволяют рассчитывать силы, моменты сил и жесткости криогенных подвесов и в случаях, когда удерживающий контур имеет произвольный вид, и в случаях, когда форма ротора отличается от сферы. При этом, как и в рассмотренных выше примерах, получаются конечные, достаточно простые выражения, связывающие основные параметры криогенного гироскопа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябов А. Б. Расчет силовых характеристик внешнего сферического подвеса криогенного гироскопа. — В кн.: Системы ориентации и наведения летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1968, с. 120–142.
2. Линьков Р. В., Урман Ю. М. Силовое воздействие на проводящий шар, движущийся в магнитном поле. — ЖТФ, 1977, т. 47, вып. 4, с. 716–723.
3. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616 с.
4. Левин М. Л. О решении одной задачи квазистационарной электродинамики методом изображений. — ЖТФ, 1964, т. 34, вып. 3, с. 395–398.
5. Белозеров В. Н., Левин М. Л. Метод изображений в магнитостатике при сферической сверхпроводящей границе. — ЖТФ, 1966, т. 36, вып. 1, с. 3–6.
6. Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Изд-во иностр. лит., 1954. 604 с.

Москва

Поступила в редакцию
5.IV.1982