

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПРИЕМЕ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА
В ЗАДАЧАХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЛН
СО СФЕРИЧЕСКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

ГОРШКОВ А. Г., ПОРУЧИКОВ В. Б., ТАРЛАКОВСКИЙ Д. В.

Известно, что наиболее часто используемым методом решения осесимметричных задач динамики толстостенной упругой сферы, заполненной и окруженной упругими или акустическими средами, является преобразование Лапласа по времени. Однако при таком подходе все трудности переносятся на задачу вычисления оригинала, соответствующего полученному решению в пространстве изображений. В [1] обращение преобразования Лапласа предлагается проводить численно при помощи разложения изображений в ряды по ультрасферическим полиномам. Асимптотическое решение, справедливое в начальные моменты взаимодействия внешней акустической волны с препятствием, построено в [2].

Однако при нахождении оригинала желательно учитывать, что в рассматриваемом классе задач в изображениях искомых функций входят модифицированные функции Бесселя полуполого индекса, которые выражаются через элементарные. В [3] для внутренних (источник волны находится в среде, заполняющей сферу), а в [4] для внешних¹ (источник волны расположен в окружающей среде) задач решения построены в виде суперпозиции элементарных обобщенных сферических волн. При этом преобразование Лапласа используется только для решения соответствующих рекуррентных уравнений. Принципиально при таком методе можно обойтись без преобразования Лапласа, решая на каждом шаге каким-либо методом систему обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

В предлагаемом подходе для вычисления оригинала используется разложение изображений в ряд по экспонентам (аналогичный прием для случая одной системы отраженных волн использован в [5]). Полученные формулы дают возможность получить аналитическое решение рассматриваемых задач и указывают на непосредственную связь с решением, найденным в [3].

1. Постановка задачи. Рассмотрим толстостенную упругую сферу ($i=1$) с внешним радиусом $R=b$ и внутренним $R=a$, заполненную упругой средой ($i=2$) и окруженную бесконечной упругой средой ($i=0$). Все три среды ($i=0, 1, 2$) предполагаются однородными, изотропными и линейно-упругими. Во внешней и внутренней средах соответственно на расстояниях D_0 и D_2 от центра сферы O на оси x расположены точечные источники упругой волны расширения, задаваемые потенциалами $\varphi_{0s}(R, \theta, t)$ или $\varphi_{2s}(R, \theta, t)$.

Возмущенное движение сферы рассматривается в сферической системе координат (R, θ, φ) , начало которой совпадает с центром сферы O . Угол φ отсчитывается в плоскости, перпендикулярной оси x , а θ — угол между радиальным лучом и осью x . За начальный момент времени $t=0$ принимается момент касания набегающей волны поверхности препятствия. При $t < 0$ возмущенное движение отсутствует.

Для построения решения рассматриваемой задачи используем безраз-

¹ См. также: Горшков А. Г., Григолюк Э. И., Тарлаковский Д. В. Применение обобщенных сферических волн в нестационарных задачах дифракции. — В кн.: Тез. докл. Всес. конф. по теории упругости. Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1979, с. 123—125.

мерные величины (штрих означает размерную величину):

$$\begin{aligned} r &= R/b, \quad \tau = a_1^{(0)} t/b, \quad \delta = (b-a)/b, \quad r_1 = 1 - \delta \\ \gamma_i &= a_1^{(0)}/a_1^{(i)}, \quad \eta_i = a_1^{(0)}/a_2^{(i)}, \quad \kappa_i = \lambda_i/(\lambda_i + 2\mu_i) \\ \beta_i &= (\lambda_i + 2\mu_i)/(\lambda_i + 2\mu_i), \quad a_1^{(i)} = [(\lambda_i + 2\mu_i)/\rho_i]^{1/2} \\ a_2^{(i)} &= (\mu_i/\rho_i)^{1/2}, \quad \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} = \sigma_{\alpha\beta}^{(i)}/(\lambda_i + 2\mu_i), \quad u_i = u_i'/b \\ v_i &= v_i'/b, \quad \phi_i = \phi_i'/b^2, \quad \psi_i = \psi_i'/b^2 \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned}$$

Здесь u_i, v_i — радиальное и тангенциальное перемещение; $\sigma_{\alpha\beta}^{(i)}$ — компоненты тензора напряжений, ϕ_i, ψ_i — скалярный и ненулевая компонента векторного потенциала упругих смещений, соответствующих возмущенному движению, λ_i, μ_i — упругие постоянные Ламе, ρ_i — плотность, $a_1^{(i)}, a_2^{(i)}$ — скорости распространения упругих волн объемного расширения и сдвига.

Учитывая осесимметричный характер задачи и представляя искомые функции в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos \theta)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}(\cos \theta)$, для коэффициентов этих рядов ϕ_{in}, ψ_{in} и т. д. получим следующую задачу [3]:

$$\begin{aligned} \gamma_i^2 \frac{\partial^2 \phi_{in}}{\partial \tau^2} &= \Delta_n \phi_{in}, \quad \eta_i^2 \frac{\partial^2 \psi_{in}}{\partial \tau^2} = \Delta_n \psi_{in} \\ \Delta_n &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} \quad (i=0, 1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\phi_{in}|_{\tau=0} = \psi_{in}|_{\tau=0} = \frac{\partial \phi_{in}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \psi_{in}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0$$

$$\sigma_{rrn}^{(1)}|_{r=r_m} = \sigma_{rrn}^{(j)} + \sigma_{rrns}^{(j)}|_{r=r_m}, \quad u_{1n}|_{r=r_m} = u_{jn} + u_{jns}|_{r=r_m}$$

$$\sigma_{r\theta n}^{(1)}|_{r=r_m} = \sigma_{r\theta n}^{(j)} + \sigma_{r\theta ns}^{(j)}|_{r=r_m} = k_{ij}(-1)^m (v_{jn} + v_{jns} - v_{1n})|_{r=r_m} \quad (j=0, 2; m=j/2; r_0=1) \quad (1.2)$$

В центре сферы $r=0$ ставится условие ограниченности искомых функций. Введенные в граничных условиях коэффициенты k_{10} и k_{12} позволяют рассмотреть два случая контакта сред: абсолютно жесткое сцепление ($k_{1j}=\infty$) и свободное проскальзывание контактирующих поверхностей ($k_{1j}=0$).

2. Решение задачи в пространстве преобразований Лапласа по времени τ . Изображения искомых потенциалов, удовлетворяющих уравнениям (1.1), можно представить в виде (L обозначает трансформанту Лапласа, s — параметр преобразования):

$$\begin{aligned} \phi_{in}^L(r, s) &= r^{-1/2} [E_{in}^{(1)}(s) I_{n+1/2}(\gamma_i r s) + E_{in}^{(2)}(s) K_{n+1/2}(\gamma_i r s)] \\ \psi_{in}^L(r, s) &= r^{-1/2} [E_{in}^{(3)}(s) I_{n+1/2}(\eta_i r s) + E_{in}^{(4)}(s) K_{n+1/2}(\eta_i r s)] \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $E_{in}^{(j)}(s)$ — константы интегрирования, $I_{n+1/2}(x)$ и $K_{n+1/2}(x)$ — модифицированные функции Бесселя.

Принимая во внимание связь между коэффициентами рядов, соответствующих потенциалам, компонентам вектора перемещения и тензора напряжений [3], а также свойства функций Бесселя [6], получим сле-

дующие выражения:

$$\begin{aligned}
 u_{in}^L(r, s) &= r^{-\frac{1}{2}} \{ E_{in}^{(1)} [\gamma_i r s I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + n I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + E_{in}^{(2)} [-\gamma_i r s K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + \\
 &\quad + n K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s)] - E_{in}^{(3)} n(n+1) I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - E_{in}^{(4)} n(n+1) K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) \} \\
 v_{in}^L(r, s) &= r^{-\frac{1}{2}} \{ E_{in}^{(1)} I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + E_{in}^{(2)} K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + E_{in}^{(3)} [-\eta_i r s I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - \\
 &\quad - (n+1) I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] + E_{in}^{(4)} [\eta_i r s K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - (n+1) K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] \} \\
 \sigma_{rrn}^{(i)L}(r, s) &= \beta_i r^{-\frac{1}{2}} \{ E_{in}^{(1)} [\gamma_i^2 r^2 s^2 I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + \gamma_i r s (2n+1+2\kappa_i) I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + \\
 &\quad + n(n-1) (1-\kappa_i) I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s)] + E_{in}^{(2)} [\gamma_i^2 r^2 s^2 K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) - \\
 &\quad - \gamma_i r s (2n+1+2\kappa_i) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + n(n-1) (1-\kappa_i) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s)] + \\
 &\quad + E_{in}^{(3)} n(n+1) (1-\kappa_i) [-\eta_i r s I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - (n-1) I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] + \\
 &\quad + E_{in}^{(4)} n(n+1) (1-\kappa_i) [\eta_i r s K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - (n-1) K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] \} \\
 \sigma_{r\theta n}^{(i)L}(r, s) &= -\frac{1}{2} \beta_i (1-\kappa_i) r^{-\frac{1}{2}} \{ 2 E_{in}^{(1)} [\gamma_i r s I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + (n-1) I_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s)] + \\
 &\quad + 2 E_{in}^{(2)} [-\gamma_i r s K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s) + (n-1) K_{n+\frac{1}{2}}(\gamma_i r s)] + E_{in}^{(3)} [-\eta_i^2 r^2 s^2 I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - \\
 &\quad - (2n+1) \eta_i r s I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - 2(n^2-1) I_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] + E_{in}^{(4)} [-\eta_i^2 r^2 s^2 K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) + \\
 &\quad + (2n+1) \eta_i r s K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s) - 2(n^2-1) K_{n+\frac{1}{2}}(\eta_i r s)] \} \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Из условий ограниченности изображений при $r \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ (последнее вытекает из гиперболического характера исходных уравнений и нулевых начальных данных для возмущений ϕ_i , ψ_i) и, учитывая неограниченность $I_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при $x \rightarrow \infty$ и $K_{n+\frac{1}{2}}(x)$ при $x \rightarrow 0$ [6], найдем, что $E_{0n}^{(1)} = E_{0n}^{(3)} = E_{2n}^{(2)} = E_{2n}^{(4)} = 0$.

Выражая функции Бесселя через элементарные [6]:

$$\begin{aligned}
 I_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi z}^{n+\frac{1}{2}}} [e^z R_{n0}(-z) - e^{-z} R_{n0}(z)] \\
 K_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z}}{z^{n+\frac{1}{2}}} R_{n0}(z), \quad R_{n0}(z) = \sum_{k=0}^n A_{nk} z^{n-k}, \quad A_{nk} = \frac{(n+k)!}{(n-k)! k! 2^k} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

представим формулы (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
 u_{in}^L(r, s) &= -r^{-(n+2)} [C_{in}^{(1)} R_{n1}(-\gamma_i r s) e^{\gamma_i r s} + C_{in}^{(2)} R_{n1}(\gamma_i r s) e^{-\gamma_i r s} + \\
 &\quad + C_{in}^{(3)} n(n+1) R_{n0}(-\eta_i r s) e^{\eta_i r s} + C_{in}^{(4)} n(n+1) R_{n0}(\eta_i r s) e^{-\eta_i r s}] \\
 v_{in}^L(r, s) &= r^{-(n+2)} [C_{in}^{(1)} R_{n0}(-\gamma_i r s) e^{\gamma_i r s} + C_{in}^{(2)} R_{n0}(\gamma_i r s) e^{-\gamma_i r s} + \\
 &\quad + C_{in}^{(3)} R_{n3}(-\eta_i r s) e^{\eta_i r s} + C_{in}^{(4)} R_{n3}(\eta_i r s) e^{-\eta_i r s}] \\
 \sigma_{rrn}^{(i)L}(r, s) &= \beta_i r^{-(n+3)} [C_{in}^{(1)} Q_{n1}^{(1)}(-\gamma_i r s) e^{\gamma_i r s} + C_{in}^{(2)} Q_{n1}^{(1)}(\gamma_i r s) e^{-\gamma_i r s} + \\
 &\quad + C_{in}^{(3)} Q_{n2}^{(1)}(-\eta_i r s) n(n+1) e^{\eta_i r s} + C_{in}^{(4)} n(n+1) Q_{n2}^{(1)}(\eta_i r s) e^{-\eta_i r s}]
 \end{aligned}$$

$$\sigma_{r\theta n}^{(i)L}(r, s) = \beta_i r^{-(n+3)} [C_{in}^{(1)} Q_{n2}^{(i)} (-\gamma_i r s) e^{\gamma_i r s} + C_{in}^{(2)} Q_{n2}^{(i)} (\gamma_i r s) e^{-\gamma_i r s} + C_{in}^{(3)} Q_{n3}^{(i)} (\eta_i r s) e^{\eta_i r s} + C_{in}^{(4)} Q_{n3}^{(i)} (\eta_i r s) e^{-\eta_i r s}] \quad (2.4)$$

$$C_{in}^{(1)}(s) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}(\gamma_i s)^{n+1/2}} E_{in}^{(1)}(s),$$

$$C_{in}^{(2)}(s) = \frac{1}{(\gamma_i s)^{n+1/2}} \left[-\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} E_{in}^{(1)}(s) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_{in}^{(2)}(s) \right]$$

$$C_{in}^{(3)}(s) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}(\eta_i s)^{n+1/2}} E_{in}^{(3)}(s),$$

$$C_{in}^{(4)}(s) = \frac{1}{(\eta_i s)^{n+1/2}} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} E_{in}^{(3)}(s) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} E_{in}^{(4)}(s) \right]$$

$$C_{0n}^{(1)} = C_{0n}^{(3)} = 0, \quad C_{2n}^{(2)} = -C_{2n}^{(1)}, \quad C_{2n}^{(4)} = -C_{2n}^{(3)}, \quad R_{n1}(s) = R_{n+1,0}(s) - nR_{n0}(s)$$

$$R_{n3}(s) = R_{n+1,0}(s) - (n+1)R_{n0}(s), \quad R_{n2}(s) = R_{n+2,0}(s) - (2+1)R_{n+1,0}(s) + n(n-1)R_{n0}(s)$$

$$Q_{n1}^{(i)}(s) = R_{n2}(s) - 2\chi_i R_{n1}(s) - n(n+1)\chi_i R_{n0}(s), \quad Q_{n2}^{(i)}(s) = (1-\chi_i)[R_{n1}(s) + R_{n0}(s)]$$

$$Q_{n3}^{(i)}(s) = 1/2(1-\chi_i)[R_{n2}(s) + (n+2)(n-1)R_{n0}(s)]$$

Подставляя выражения (2.4) в граничные условия (1.2), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $C_{in}^{(j)}(s)$ ($i=0, 1, 2; j=1, 2, 3, 4$):

$$AC = B, \quad A = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \end{vmatrix} \quad (2.5)$$

$$A_m = \| a_1^{(m)} e^{-\gamma_0 r m s}, a_2^{(m)} e^{-\eta_0 r m s}, a_3^{(m)} e^{\gamma_1 r m s}, a_4^{(m)} e^{-\gamma_1 r m s}, a_5^{(m)} e^{\eta_1 r m s},$$

$$a_6^{(m)} e^{-\eta_1 r m s}, a_7^{(m)'} e^{\gamma_2 r m s} + a_7^{(m)''} e^{-\gamma_2 r m s}, a_8^{(m)'} e^{\eta_2 r m s} + a_8^{(m)''} e^{-\eta_2 r m s} \|$$

$$a_k^{(m)} = \| a_{1+4m,k}, a_{2+4m,k}, a_{3+4m,k}, a_{4+4m,k} \|^T \quad (m=0,1; k=1,2,\dots,8)$$

$$C = \| C_{0n}^{(2)}, C_{0n}^{(4)}, C_{1n}^{(1)}, C_{1n}^{(2)}, C_{1n}^{(3)}, C_{1n}^{(4)}, C_{2n}^{(1)}, C_{2n}^{(3)} \|^T, \quad B = \| b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8 \|^T$$

$$b_1 = \sigma_{rrns}^{(0)L}(1, s), \quad b_2 = u_{0ns}^L(1, s), \quad b_3 = \sigma_{r\theta ns}^{(0)L}(1, s), \quad b_4 = k_{10} v_{0ns}^L(1, s), \quad b_5 = r_1^3 \sigma_{rrns}^{(2)L}(r_1, s)$$

$$b_6 = r_1^2 u_{2ns}^L(r_1, s), \quad b_7 = r_1^3 \sigma_{r\theta ns}^{(2)L}(r_1, s), \quad b_8 = k_{12} r_1^3 v_{2ns}^L(r_1, s), \quad a_{l1} = a_{l2} = 0 \quad (l=5,6,7,8)$$

$$a_{17}' = a_{17}'' = a_{18}' = a_{18}'' = 0 \quad (l=1,2,3,4), \quad a_{11}(s) = -\beta_0 Q_{n1}^{(0)}(\gamma_0 s),$$

$$a_{12}(s) = -\beta_0 n(n+1) Q_{n2}^{(0)}(\eta_0 s)$$

$$a_{21}(s) = R_{n1}(\gamma_0 s), \quad a_{22}(s) = n(n+1) R_{n0}(\eta_0 s), \quad a_{31}(s) = -\beta_0 Q_{n2}^{(0)}(\gamma_0 s),$$

$$a_{32}(s) = -\beta_0 Q_{n3}^{(0)}(\eta_0 s)$$

$$a_{41}(s) = -k_{10} R_{n0}(\gamma_0 s), \quad a_{42}(s) = -k_{10} R_{n3}(\eta_0 s), \quad a_{1+4m,4}(s) = a_{1+4m,3}(-s) = \beta_1 Q_{n1}^{(1)}(\gamma_1 r m s)$$

$$a_{2+4m,4}(s) = a_{2+4m,3}(-s) = -R_{n1}(\gamma_1 r m s), \quad a_{3+4m,4}(s) = a_{3+4m,3}(-s) = \beta_1 Q_{n2}^{(1)}(\gamma_1 r m s),$$

$$a_{4+4m,4}(s) = a_{4+4m,3}(-s) = \beta_1 Q_{n2}(\gamma_1 r m s) + (-1)^m k_{1,2m} r m R_{n0}(\gamma_1 r m s)$$

$$\begin{aligned}
a_{1+4m,6}(s) &= a_{1+4m,5}(-s) = \beta_1 n(n+1) Q_{n2}^{(1)} (\eta_1 r_m s), \\
a_{2+4m,6}(s) &= a_{2+4m,5}(-s) = -n(n+1) R_{n0} (\eta_1 r_m s) \\
a_{3+4m,6}(s) &= a_{3+4m,5}(-s) = \beta_1 Q_{n3}^{(1)} (\eta_1 r_m s), \\
a_{4+4m,6}(s) &= a_{4+4m,5}(-s) = \beta_1 Q_{n3}^{(1)} (\eta_1 r_m s) + (-1)^m k_{1,2m} r_m R_{n3} (\eta_1 r_m s) \\
a_{57}''(s) &= -a_{57}'(-s) = \beta_2 Q_{n2}^{(2)} (\eta_2 r_1 s), \quad a_{67}''(s) = -a_{67}'(-s) = -R_{n1} (\eta_2 r_1 s), \\
a_{77}''(s) &= -a_{77}'(-s) = -\beta_2 Q_{n2} (\eta_2 r_1 s) \\
a_{87}''(s) &= -a_{87}'(-s) = -k_{12} r_1 R_{n0} (\eta_2 r_1 s), \quad a_{58}''(s) = -a_{58}'(-s) = \beta_2 Q_{n2}^{(2)} (\eta_2 r_1 s), \\
a_{68}''(s) &= -a_{68}'(-s) = -n(n+1) R_{n0} (\eta_2 r_1 s). \\
a_{78}''(s) &= -a_{78}'(-s) = -\beta_2 Q_{n3}^{(2)} (\eta_2 r_1 s), \quad a_{88}''(s) = -a_{88}'(-s) = -k_{12} r_1 R_{n3} (\eta_2 r_1 s)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь A — матрица размера 8×8 , A_m — матрица размера 4×8 , a_k (вместе с экспоненциальным множителем) — k -й столбец матрицы A (седьмой и восьмой столбцы — сумма двух столбцов), C — столбец неизвестных, B — столбец свободных членов, элементами которого являются изображения соответствующих напряжений и перемещений в набегающих волнах.

Используя известные представления плоских и сферических волн [3, 4] и теоремы о сложении функций Бесселя, запишем элементы столбца B :

$$\begin{aligned}
u_{0ns}^L(r, s) &= -F_0(s) r^{-(n+2)} e^{\gamma_0 r s} [R_{n1}(-\gamma_0 r s) - e^{-2\gamma_0 r s} R_{n0}(\gamma_0 r s)], \\
v_{0ns}^L(r, s) &= F_0(s) r^{-(n+2)} e^{\gamma_0 r s} [R_{n0}(-\gamma_0 r s) - e^{-2\gamma_0 r s} R_{n0}(\gamma_0 r s)] \\
\sigma_{rrns}^{(0)L}(r, s) &= \beta_0 F_0 r^{-(n+3)} e^{\gamma_0 r s} [Q_{n1}^{(0)}(-\gamma_0 r s) - e^{-2\gamma_0 r s} Q_{n1}^{(0)}(\gamma_0 r s)], \\
\sigma_{\theta\theta ns}^{(0)L}(r, s) &= \beta_0 F_0(s) r^{-(n+3)} e^{\gamma_0 r s} [Q_{n2}^{(0)}(-\gamma_0 r s) - e^{-2\gamma_0 r s} Q_{n2}^{(0)}(\gamma_0 r s)] \\
u_{2ns}^L(r, s) &= -F_2(s) \frac{R_{n1}(\gamma_2 r s)}{(\gamma_2 s)^{n+1} r^{n+2}} e^{-\gamma_2 r s}, \quad v_{2ns}^L(r, s) = F_2(s) \frac{R_{n0}(\gamma_2 r s)}{(\gamma_2 s)^{n+1} r^{n+2}} e^{-\gamma_2 r s} \\
\sigma_{rrns}^{(2)L}(r, s) &= \beta_2 F_2(s) \frac{Q_{n2}^{(2)}(\gamma_2 r s)}{(\gamma_2 s)^{n+2} r^{n+3}} e^{-\gamma_2 r s}, \quad \sigma_{\theta\theta ns}^{(2)L}(r, s) = \beta_2 F_2(s) \frac{Q_{n2}^{(2)}(\gamma_2 r s)}{(\gamma_2 s)^{n+2} r^{n+3}} e^{-\gamma_2 r s}
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$F_0(s) = f^L(s) e^{-\gamma_0 s} (-1)^n (n+1/2) \Gamma_\xi \quad (\xi=1, 2), \quad \Gamma_1 = (\gamma_0 s)^{-n-1}, \quad \Gamma_2 = (\gamma_0 s)^{-2n-1} d_0^{-n} R_{n0}(\gamma_0 s d_0)$$

$$F_2(s) = (r_1 - d_2) f^L(s) e^{\gamma_2 r s} \frac{(-1)^n (2n+1)}{2(\gamma_2 s)^n d_2^{n+1}} [R_{n0}(-\gamma_2 s d_2) - e^{-2\gamma_2 s d_2} R_{n0}(\gamma_2 s d_2)],$$

$$d_0 = \frac{D_0}{b}, \quad d_2 = \frac{D_2}{b}$$

где $f^L(s)$ — изображение функции, задающей закон изменения по времени τ потенциала в набегающей волне, Γ_1 соответствует плоской волне, а Γ_2 — сферической.

Элементы матрицы A несколько упрощаются в случае предельных значений коэффициентов k_{10} и k_{12} : абсолютно жесткое сцепление сред ($k_{10}, k_{12} \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned}
a_{41}(s) &= -R_{n0}(\gamma_0 s), \quad a_{42}(s) = -R_{n3}(\eta_0 s), \quad a_{4+4m,4}(s) = a_{4+4m,3}(-s) = (-1)^m r_m R_{n0}(\eta_1 r_m s) \\
a_{4+4m,6}(s) &= a_{4+4m,5}(-s) = (-1)^m r_m R_{n3}(\eta_1 r_m s), \quad a_{87}''(s) = -a_{87}'(-s) = r_1 R_{n0}(\eta_2 r_1 s) \\
a_{88}''(s) &= -a_{88}'(-s) = -r_1 R_{n3}(\eta_2 r_1 s), \quad b_4(s) = v_{0ns}^L(1, s), \quad b_8(s) = -r_1^3 v_{2ns}^L(r_1, s)
\end{aligned}$$

свободное проскальзывание ($k_{10} = k_{12} = 0$)

$$\begin{aligned}
a_{41}(s) &= a_{42}(s) = a_{87}''(s) = a_{87}'(s) = a_{88}''(s) = a_{88}'(s) = b_4(s) = b_8(s) = 0 \\
a_{4+4m,4}(s) &= a_{4+4m,3}(-s) = a_{3+4m,4}(s), \quad a_{4+4m,6}(s) = a_{4+4m,5}(-s) = a_{3+4m,6}(s)
\end{aligned}$$

Решение системы уравнений (2.5)

$$C_{0n}^{(2)} = \Delta_1 / \Delta_0, \quad C_{0n}^{(4)} = \Delta_2 / \Delta_0, \quad C_{2n}^{(1)} = \Delta_7 / \Delta_0, \quad C_{2n}^{(3)} = \Delta_8 / \Delta_0, \quad (2.8)$$

$$C_{1n}^{(j)} = \Delta_{j+2} / \Delta_0, \quad \Delta_0 = \det A \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

и формулы (2.4) дают полное решение краевой задачи (1.1), (1.2) в пространстве изображений по Лапласу; Δ_j — определитель, полученный из определителя матрицы A заменой j -го столбца на столбец свободных членов.

3. Вычисление оригиналов. Определители Δ_j ($j=0, 1, \dots, 8$), как видно из структуры матрицы A (2.6), представляют сумму произведений многочленов аргумента s и экспонент. Поскольку вид их аналогичен, раскроем определитель Δ_0 . Для выделения экспонент, используя теорему Лапласа об определителе, представим Δ_0 в виде (при этом учтено наличие нулевых элементов в матрице A):

$$\Delta_0 = M_{1234}^{1234} M_{5678}^{5678} - M_{1235}^{1234} M_{4678}^{5678} + M_{1236}^{1234} M_{4578}^{5678} + M_{1245}^{1234} M_{3678}^{5678} - M_{1246}^{1234} M_{3578}^{5678} + M_{1256}^{1234} M_{3478}^{5678} \quad (3.1)$$

Здесь $M_{j_1 j_2 j_3 j_4}^{i_1 i_2 i_3 i_4}$ — минор матрицы A , составленный из элементов, стоящих в строках с номерами i_1, i_2, i_3, i_4 и столбцах j_1, j_2, j_3, j_4 .

Принимая во внимание свойства определителей, выражение (3.1) можно представить так:

$$\Delta_0 = e^{\tau_{02}s} \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^3 X_{lm}(s) e^{-\nu_{lm}s} \quad (3.2)$$

$$\tau_{02} = -\gamma_0 - \eta_0 + (\gamma_1 + \eta_1)\delta + (\gamma_2 + \eta_2)r_1, \quad \nu_{1m} = 2\gamma_1\delta + \alpha_m$$

$$\nu_{2m} = (\gamma_1 + \eta_1)\delta + \alpha_m, \quad \nu_{3m} = 2\eta_1\delta + \alpha_m, \quad \nu_{4m} = 2(\gamma_1 + \eta_1)\delta + \alpha_m$$

$$\nu_{0m} = \alpha_m \quad (m=0, 1, 2, 3); \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2\gamma_2 r_1, \quad \alpha_2 = 2\eta_2 r_1, \quad \alpha_3 = 2(\gamma_2 + \eta_2)r_1$$

$$X_{0m}(s) = Z_{35}(s) Y_{46}^{(m)}(s), \quad X_{1m} = Z_{45}(s) Y_{36}^{(m)}(s), \quad X_{2m}(s) = Z_{34}(s) Y_{56}^{(m)}(s) + Z_{56}(s) Y_{34}^{(m)}(s)$$

$$X_{3m}(s) = Z_{35}(s) Y_{45}^{(m)}(s), \quad X_{4m}(s) = -Z_{46}(s) Y_{35}^{(m)}(s)$$

Многочлены $Z_{i_1 i_2}(s)$ и $Y_{j_1 j_2}^{(m)}(s)$ определяются так: $Z_{i_1 i_2}(s) = M_{12i_1 i_2}^{1234}$ при $\gamma_i = \eta_i = 0$ ($i=0, 1, 2$), $Y_{j_1 j_2}^{(m)}(s) = M_{j_1 j_2 78}^{5678}$ при тех же предположениях; причем $m=0$, в последних двух столбцах стоят элементы с одним штрихом, при $m=1$ в третьем столбце — элементы с двумя штрихами, а в четвертом — с одним штрихом; при $m=2$ в третьем столбце — элементы с одним штрихом, а в четвертом — с двумя; при $m=3$ в последних двух столбцах — элементы с двумя штрихами.

Основная трудность нахождения оригиналов состоит в обращении выражения $\Delta_0^{-1}(s)$. Заметим, что с учетом асимптотических свойств показательной функции ($\nu_{lm} > 0$) существует такое s_0 , что ($l+m \neq 0$)

$$\left| \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^3 \frac{X_{lm}(s)}{X_{00}(s)} e^{-\nu_{lm}s} \right| < 1 \quad (\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0) \quad (3.3)$$

Следовательно, используя известное разложение в ряд для суммы геометрической прогрессии, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} s_0$ будем иметь

$$\Delta_0^{-1}(s) = \frac{e^{\tau_{02}s}}{X_{00}(s)} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \left(\sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^3 \frac{X_{lm}(s)}{X_{00}(s)} e^{-\nu_{lm}s} \right)^p \quad (3.4)$$

Возводя коэффициенты ряда в степень p , преобразуем выражение (3.4):

$$\Delta_0^{-1}(s) = e^{\tau_0 s} \sum_{p=0}^N (-1)^p \frac{V_p(s)}{X_{00}^{p+1}(s)} e^{-\tau_p s}, \quad N = E\left(\frac{\tau}{\nu_{10}}\right) \quad (3.5)$$

$$V_p(s) = \sum_{|\alpha|=p} (p; \alpha) \prod_{l=0}^4 \prod_{m=0}^3 X_{lm}^{p_{lm}}(s) \quad (l+m \neq 0)$$

$$\tau_p = \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^3 \nu_{lm} p_{lm}, \quad |\alpha| = \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^3 p_{lm} \quad (l+m \neq 0), \quad (p; \alpha) = \frac{p!}{(p_{01}! p_{02}! \dots p_{43}!)}$$

Здесь $\alpha = (p_{01}, p_{02}, \dots, p_{43})$ — мультииндекс, $|\alpha|$ — длина мультииндекса, $(p; \alpha)$ — мультиномиальный коэффициент, $E(x)$ — целая часть x .

Верхний предел суммирования в (3.5) заменен на конечный, так как при обращении этого выражения для конечного момента времени τ оригиналы всех последующих членов равны нулю вследствие наличия экспонент, характеризующих запаздывание. Причем, можно показать, что для фиксированного номера p величина τ_p достигает минимума при $p_{01} = p$ и $p_{lm} = 0$ ($l \neq 0, p \neq 1$).

Из структуры выражения (3.5) видно, что оно представляет сумму произведений рациональных функций и экспонент. Отсюда и из формул (2.4) и (2.8) следует, что аналогичный вид будут иметь и представления трансформант функций, характеризующих напряженно-деформированное состояние системы. Точное вычисление оригиналов таких функций не представляет трудностей и может быть проведено, например, при помощи алгоритма, указанного в [3].

Сопоставление полученных результатов с рекуррентными соотношениями, построенными в [3], показывает, что найденные здесь формулы типа (3.5) есть решения упомянутых рекуррентных соотношений. Причем многочлен $X_{00}(s)$, стоящий в знаменателе всех рациональных функций (3.5), связан со знаменателями рекуррентных соотношений в [3]: $X_{00} = -X_{n1} X_{n0}$ при $\beta_1 = 1$ и $\gamma_0 = 1$ (коэффициенты, величины которых зависят только от выбора единиц измерения безразмерных параметров). Отличие в знаке объясняется аналогичным отличием в знаках числителей.

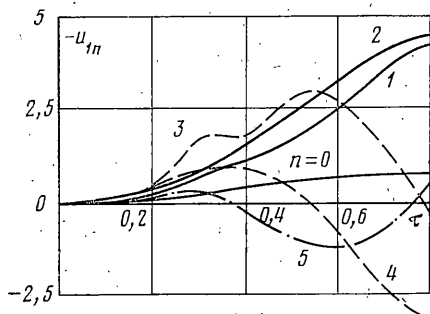
Таким образом, выражения (2.4), (2.8) и (3.5) вместе с алгоритмом обращения преобразования Лапласа для такого класса функций дают точные интегралы краевой задачи (1.1), (1.2) и после проведения суммирования соответствующих рядов по полиномам Лежандра позволяют получить решение внутренних и внешних нестационарных задач динамики толстой упругой сферы, соприкасающейся с упругими средами.

4. Частные случаи окружающих сред. Если внешняя и внутренняя среды ($i=0, 2$) акустические, то это соответствует отсутствию сопротивления сдвигу. Выполняя предельный переход $\eta_0, \eta_2 \rightarrow \infty$ ($\nu_{i2}, \nu_{i3} \rightarrow \infty$), получим упрощение соотношения (3.5):

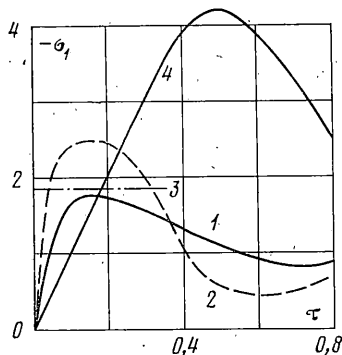
$$V_p(s) = \sum_{|\alpha|=p} (p; \alpha) \prod_{l=0}^4 \prod_{m=0}^1 X_{lm}^{p_{lm}}(s), \quad \tau_p = \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^1 \nu_{lm} p_{lm} \quad (l+m \neq 0) \quad (4.1)$$

$$\alpha = (p_{01}, p_{10}, p_{11}, \dots, p_{41}), \quad \tau_{02} = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \eta_1) \delta + \gamma_2 r_1$$

При вычислении определителей $Z_{i_1 i_2}$ и $Y_{j_1 j_2}^{(m)}$ в матрице A следует вычеркнуть второй и восьмой столбцы и четвертую и восьмую строки. Порядок определителей понижается до трех. Соответственно уменьшается и степень многочленов $X_{lm}(s)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Пусть теперь внешняя среда акустическая, а внутренняя отсутствует (внутренняя поверхность сферы свободна). Этому случаю соответствует предельный переход $\gamma_2 \rightarrow \infty$ ($\nu_{11} \rightarrow \infty$). Тогда соотношения (3.5) преобразуются к виду

$$V_p(s) = \sum_{|\alpha|=p} (p; \alpha) \prod_{l=1}^4 X_{l0}^{p_{l0}}(s), \quad \tau_p = \sum_{l=0}^4 \nu_{l0} p_{l0} \quad (4.2)$$

$$\alpha = (p_{10}, p_{20}, p_{30}, p_{40}), \quad \tau_{02} = -\gamma_0 + (\gamma_1 + \eta_1) \delta$$

В этом случае порядок определителей $Y_{j_1 j_2}^{(0)}$ по сравнению с предыдущим вариантом понижается до двух и при их вычислении в матрице A необходимо дополнительно вычеркнуть седьмые столбец и строку.

5. Пример. В качестве числового примера рассмотрим задачу взаимодействия плоской акустической волны, распространяющейся во внешней среде (вода) с полой толстостенной сферической стальной оболочкой. При этом положим, что давление в падающей волне изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$, где $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда.

В расчетах были приняты следующие значения безразмерных параметров: $\gamma_1 = -0,252$, $\beta_0 = 0,00862$, $\kappa_1 = 0,393$.

Некоторые результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2. Все графики соответствуют точке на препятствии с координатами $r=1$, $\theta=0$.

Заметим, что, как следует из метода решения, с уменьшением относительной толщины оболочки δ и увеличением рассматриваемых моментов времени τ количество учитываемых элементарных волн возрастает, что связано с большими затратами машинного времени и значительным ростом ошибок округления. Поэтому при толщинах $\delta < 0,05$, по-видимому, следует рассматривать препятствие как тонкую упругую оболочку.

На фиг. 1 приведена зависимость форм радиального перемещения оболочки $u_{1n}(1, \tau)$ от времени τ при $\delta=0,3$. Номера кривых соответствуют номеру члена ряда ($n=0, 1, \dots, 5$). Из анализа графиков видно, что вклад всех рассмотренных форм в сумму ряда значительный, однако с увеличением номера n он уменьшается.

На фиг. 2 показана зависимость напряжений от времени для оболочки с относительной толщиной $\delta=0,3$. Кривая 4 соответствует напряжению $\sigma_{\theta\theta}^{(1)}$; а остальные — радиальному напряжению $\sigma_{rr}^{(1)}$. Штриховая кривая 2 получена при помощи обычного суммирования, а сплошные кривые — суммированием средними Чезаро первого порядка [7]. Прямая 3 соответствует асимптотическому решению, приведенному в [2]. Как видно, обычные суммы дают приближение к точному решению сверху, а суммы Чезаро — снизу.

Суммирование соответствующих рядов по полиномам Лежандра проведено с учетом шести первых членов. Это ограничение обеспечивает достаточную точность результатов, так как соответствующая сумма Чезаро для внешней нагрузки (единичная функция) отличается от точного значения при $\tau \geq 0,5$ приблизительно на 6%.

Числовые результаты, полученные по построенному здесь алгоритму и по решению [3], полностью совпадают. Причем при малых и средних значениях времени взаимодействия, вероятно, более экономично с точки зрения затрат машинного времени пользоваться решением [3], а при достаточно больших, но конечных временах — приведенными здесь зависимостями. Это связано с тем, что с ростом τ увеличивается

число последовательных операций в рекуррентных соотношениях, что может привести к значительным вычислительным ошибкам.

Отметим, что использованный в настоящей работе метод обращения преобразования Лапласа может быть применен также к решению нестационарных осесимметричных задач распространения волн в кусочно-однородном упругом пространстве с концентрическими сферическими границами раздела. При этом число сумм в формулах (3.5) будет зависеть от количества границ раздела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Berger B. S.* Vibration of the hollow sphere in an acoustic medium.— *Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech.*, 1969, v. 36, No. 2, p. 330–333.
2. *Векслер Н. Д.* Дифракция плоской звуковой волны на полой упругой сфере.— *Акуст. ж.*, 1975, т. 21, № 5, с. 694–700.
3. *Горшков А. Г., Григолюк Э. И., Тарлаковский Д. В.* Внутренние задачи динамики толстостенной сферы, соприкасающейся с упругими или акустическими средами.— *Прикл. механика*, 1978, т. 14, № 12, с. 12–22.
4. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В.* Взаимодействие слабых ударных волн с полой упругой сферой, погруженной в акустическую среду. Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. М.: Стройиздат, 1979, вып. 18, с. 21–55.
5. *Бабаев А. Э., Кубенко В. Д.* Действие внутренней ударной волны на упругую сферическую оболочку.— *Прикл. механика*, 1977, т. 13, № 5, с. 73–78.
6. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами.* / Под ред. Абрамовича М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 359 с.

Москва

Поступила в редакцию
10.III.1984