

УДК 539.3.01

ЗАДАЧА О ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ С ПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

КАЛАШНИКОВ Б. В., КУДИШИН Ю. И.

Методом линейного сопряжения решается контактная задача теории упругости. Основное сингулярное интегральное уравнение на полубесконечном интервале решается приближенным методом, основанным на использовании полиномов Лагерра. Исследуется поведение искомой функции в нулевой и бесконечно удаленной точках и особенности численной реализации метода. Пример вычислений выполнен для подкрановой балки. Приведено сравнение теоретических результатов с данными эксперимента.

1. Рассмотрим две упругие полубесконечные пластины, пересекающиеся по линии, перпендикулярной кромкам, расположенным на одном уровне (фиг. 1). Пластины имеют различные геометрические и физические характеристики. Кромки пластин подкреплены бесконечными стержнями, обладающими различной жесткостью на изгиб и растяжение — сжатие. В точке пересечения стержней приложена сосредоточенная поперечная сила P . Кроме того, пластины испытывают растяжение в направлении, параллельном кромкам.

Вначале рассмотрим равновесие одной пластины, заменив действие на нее другой касательными силами $T(y)$, распределенными вдоль линии их сопряжения (фиг. 2). Разрежем пластину вдоль этой линии и рассмотрим равновесие сил, действующих на кромках разреза (фиг. 3). Величины, относящиеся к левому берегу разреза, будем отмечать знаком (+), к правому — знаком (—). Линию контакта полуплоскостей обозначим буквой L и выберем положительное направление на ней, совпадающее с направлением оси y координатной плоскости (см. фиг. 2). Из фиг. 3 имеем

$$X_y^+ - X_y^- = T(a)/d, \quad X_x^+ - X_x^- = 0 \quad (a \in L) \quad (1.1)$$

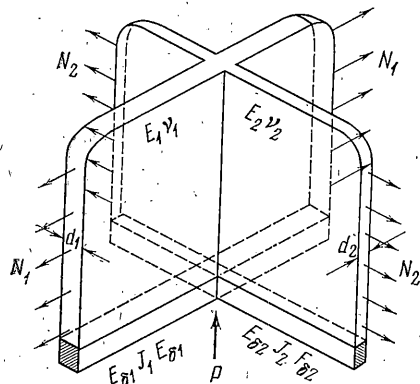
$$\partial v^+ / \partial y = \partial v^- / \partial y, \quad \partial u^+ / \partial y = 0$$

Здесь d — толщина пластины, $X_x, \dots, u, v$ — компоненты напряжений и перемещений.

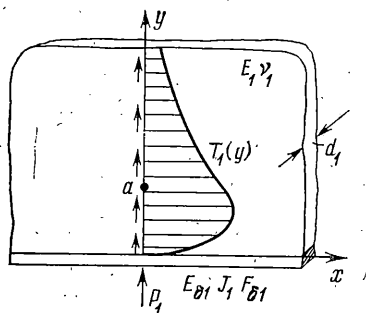
Рассматривая равновесие элементарного отрезка стержня, подкрепляющего кромку пластины, испытывающего изгиб от поперечной силы P_1 и растяжение — сжатие от касательных контактных сил взаимодействия стержня с пластиной, можно записать уравнения

$$\frac{E_\delta J}{d} v^{IV}(t) = Y_y(t) + \frac{P_1}{d} \delta(t), \quad X_y(t) = -\frac{F_\delta}{d} \sigma_\delta'(t) \quad (1.2)$$

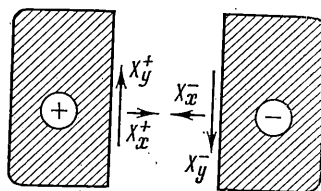
где $E_\delta J$, F_δ — жесткость стержня на изгиб и его площадь поперечного сечения, σ_δ — среднее нормальное напряжение в поперечном сечении стержня, P_1 — некоторая часть силы P , передающаяся на рассматриваемую пластину.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Граничные условия (1.1) и (1.2) аналогичны соответствующим условиям¹, записанным в [1], где рассматривается равновесие аналогичной полубесконечной пластины, но контур L представляет собой отрезок конечной длины, на котором пластина подкреплена стержнем, обладающим жесткостью на растяжение — сжатие. Используя метод решения задачи из [1] и опуская все промежуточные выкладки, запишем для комплексных потенциалов следующие выражения:

$$\Phi(z) = -iK \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'''(t)}{t-z} dt - i \frac{P_1}{2\pi dz} + iK_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\delta}^{IV}(t)}{t-z} dt + K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\delta}'(t)}{t-z} dt + n \int_L T(a) Q_1(\xi, z) d\xi + \frac{N_1}{4} \quad (1.3)$$

$$\Psi(z) = iKz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v'''(t)}{(t-z)^2} dt - \frac{iP_1}{2\pi dz} - iK_1z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\delta}^{IV}(t)}{(t-z)^2} dt - K_2z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\delta}'(t)}{(t-z)^2} dt - 2K_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{\delta}'(t)}{t-z} dt + n \int_L T(a) Q_2(\xi, z) d\xi - \frac{N_2}{2} \quad (1.4)$$

$$Q_1(\xi, z) = \frac{1}{\xi-z} - \frac{\kappa+2}{\xi+z} + \frac{2z}{(\xi+z)^2}$$

$$Q_2(\xi, z) = \frac{\kappa+1}{\xi-z} + \frac{\kappa+1}{\xi+z} + \frac{z}{(\xi-z)^2} - \frac{(\kappa+6)z}{(\xi+z)^2} + \frac{4z^2}{(\xi+z)^3}$$

$$K = \frac{2E_{\delta}J}{\pi Ed}, \quad K_1 = \frac{(1+\nu)E_{\delta}JF_{\delta}}{2\pi d^2E}, \quad K_2 = \frac{F_{\delta}}{2\pi d}, \quad n = \frac{1+\nu}{8\pi d}, \quad z = x+iy, \quad \xi = ia$$

$$v'''(t) = \frac{P_1}{4\pi d} \int_0^{\infty} \frac{\alpha^3 [2 + (1+\nu)K_F\alpha]}{D(\alpha)} \cos \alpha t d\alpha +$$

¹ Для полного совпадения в уравнениях (2.1) указанной работы надо принять $F\sigma_p'(a) = T(a)$.

$$+ n \int_L T(a) \int_0^\infty \frac{\alpha^3 \{ \kappa + 1 + 2a\alpha + 1/2 K_F \alpha [4 - K_J (1+\nu)^2 a \alpha^4] \}}{D(\alpha)} e^{-a\alpha} \cos \alpha t d\alpha da$$

$$\sigma_\delta'(t) = \frac{(1-\nu)E_\delta P_1}{\pi E d} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha t}{D(\alpha)} d\alpha +$$

$$+ \frac{4E_\delta n}{E} \int_L T(a) \int_0^\infty \frac{\alpha [\kappa - 1 + 2a\alpha + (1+\nu)K_J a \alpha^4]}{D(\alpha)} e^{-a\alpha} \sin \alpha t d\alpha da$$

$$D(\alpha) = 1 + K_F \alpha + K_J \alpha^3 + C K_J K_F \alpha^4, \quad K_J = 2E_\delta J / (Ed)$$

$$K_F = 2E_\delta F_\delta / (Ed), \quad C = 1/4 [(1+\nu)(3-\nu)], \quad \kappa = (3-\nu) / (1+\nu)$$

Значение $\sigma_\delta^{IV}(t)$ можно получить дифференцированием по t выражения для $\sigma_\delta'(t)$.

В соотношениях (1.3), (1.4) значения P_1 и $T(a)$ неизвестны. Для определения $T(a)$ воспользуемся условием равенства деформаций обеих пластин на линии их контакта $^2 e_{yy1} = e_{yy2}$.

Используя известную формулу для деформаций, выраженных при помощи комплексных потенциалов $e_{yy} = \partial v / \partial y = (1+\nu) \operatorname{Re} [(\kappa-1)\Phi(\zeta) - \zeta\Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta)]/E$ нетрудно получить с учетом (1.3) и (1.4) сингулярное интегральное уравнение относительно $T_1(a) = T(a)$:

$$\int_0^\infty \frac{T(a)}{a-y} da + \lambda \int_0^\infty T(a) K(a, y) da = f_0(y) \quad (1.5)$$

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^2 \frac{C_i}{d_i E_i} \right)^{-1}, \quad K(a, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{(1+\nu_i)^2}{8d_i E_i} R_i(a, y)$$

$$f_0(y) = \lambda \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left[\frac{P_i (1+\nu_i)}{2d_i E_i} J_i(y) + \frac{\pi \nu_i N_i}{E_i} \right]$$

$$R_i(a, y) = \frac{C_0}{a+y} - \frac{12y}{(a+y)^2} + \frac{8y^2}{(a+y)^3} + \int_L \frac{B_i(a, \alpha, y)}{D_i(\alpha)} e^{-\alpha(a+y)} d\alpha$$

$$B_i(a, \alpha, y) = \alpha [C_1 + (C_2 a + C_3 y) \alpha + (C_4 + C_5 a y) \alpha^2 + (C_6 + C_7 a + C_8 y) \alpha^3 +$$

$$+ (C_9 a + C_{10} y + C_{11} a y) \alpha^4 + C_{12} a y \alpha^5], \quad J_i(y) = \int_L \frac{F_i(\alpha, y)}{D_i(\alpha)} d\alpha$$

$$F_i(\alpha, y) = (\kappa_i - 1) + [2y + (1+\nu_i) K_{Fi} (\kappa_i - 1 + \alpha y)] \alpha$$

$$C_0 = (\kappa_i + 1) - (\kappa_i - 1)(\kappa_i + 2), \quad C_1 = (\kappa_i - 1)(\kappa_i - 3) K_{Fi}$$

$$C_2 = 2(\kappa_i - 3) K_{Fi}, \quad C_3 = 2(\kappa_i - 1) K_{Fi}, \quad C_4 = (\kappa_i^2 - 1) K_{Ji}, \quad C_5 = 4 K_{Fi}$$

$$C_6 = (\kappa_i - 1)(3 - \nu_i) K_{Ji} K_{Fi}, \quad C_7 = 2(\kappa_i - 1) K_{Ji}, \quad C_8 = 2(\kappa_i + 1) K_{Ji}, \quad C_9 = 2(1 - 3\nu_i) K_{Ji} K_{Fi}$$

$$C_{10} = 2(3 - \nu_i) K_{Ji} K_{Fi}, \quad C_{11} = 4 K_{Ji}, \quad C_{12} = 4(1 + \nu_i) K_{Ji} K_{Fi}$$

Неизвестные величины P_1 и P_2 , входящие в правую часть уравнения (1.5), связаны между собой очевидным соотношением $P_1 + P_2 = P$.

Рассматривая равновесие всех внешних сил, приложенных к пластинам, включая контактные силы $T(a)$, нетрудно получить второе соотношение между P_1 и P_2

$$P_1 - P_2 = P \frac{d_E - 1}{d_E + 1} - 2I, \quad d_E = \frac{d_1 E_1}{d_2 E_2}, \quad I = \int_0^\infty T(y) dy \quad (1.6)$$

² Здесь и далее величины, относящиеся к первой полуплоскости, будут отмечены индексом 1, ко второй — индексом 2.

В результате будем иметь

$$P_1 = Pd_E / (1 + d_E) - I, \quad P_2 = P / (1 + d_E) + I \quad (1.7)$$

Если теперь подставить значения (1.7) в (1.5), то получим уравнение с одной неизвестной функцией $T(a)$. С теоретической точки зрения такой результат является вполне удовлетворительным. Однако в практическом отношении он неприемлем. В настоящее время не существует точного метода решения уравнения (1.5) в замкнутом виде. Среди приближенных методов, очевидно, наиболее рациональным будет прямой метод решения без регуляризации, при котором интегралы заменяются соответствующими квадратурными формулами, а искомая функция представляется интерполяционным полиномом с узлами интерполяции, совпадающими с узлами некоторой ортогональной системы на участке интегрирования³. Известно, что полиномы Лагерра образуют такую систему на полубесконечном интервале [2].

Отметим, что в уравнении (1.5) путем предельного перехода при $y \rightarrow \infty$ можно также получить соотношение (1.6). Таким образом, используя это соотношение для определения P_1 и P_2 , предполагаем тождественное, относительно искомой функции $T(a)$, удовлетворение уравнения (1.5) в бесконечно удаленной точке. С другой стороны, при построении интерполяционного полинома для искомой функции по узлам полиномов Лагерра начальная (нулевая) точка интервала интегрирования не используется, так как она не является узлом этих полиномов. Таким образом, при получении приближенного решения уравнения (1.5) с использованием выражений (1.7) условие контакта в нулевой точке строго не выполняется, что вызывает сильные осцилляции искомой функции на всем интервале интегрирования.

Ниже приведены результаты исследования поведения функции $T(a)$ в нулевой точке, свидетельствующие о том, что она здесь имеет нуль порядка меньше единицы. По физическому смыслу это является следствием строгого соблюдения равенства $e_{y11} = e_{y12}$ в нулевой точке. Нетрудно показать⁴, что несоблюдение на сколь угодно малую величину данного равенства в нулевой точке принципиально изменит характер поведения искомой функции в этой точке. Она будет иметь здесь слабую особенность. Таким образом, выражение (1.6) надо было бы заменить соотношением, полученным из уравнения (1.5) предельным переходом при $y \rightarrow 0$. Однако в этом случае осцилляции искомой функции вблизи нулевой точки не исчезают. Очевидно, это связано с тем, что, удовлетворяя уравнению (1.5) в нулевой точке тождественно относительно $T(a)$, вносим некоторую неопределенность при вычислении ее в окрестности этой точки. Поэтому при практических вычислениях к уравнению (1.5) добавим только соотношение $P_1 + P_2 = P$, принимая в нем величину P_1 неизвестной.

Таким образом, подставляя в правую часть уравнения (1.5) $P_2 = P - P_1$ и перенося в левую часть все слагаемые, имеющие множитель P_1 , получаем

$$\int_0^\infty \frac{T(a)}{a-y} da + \lambda \int_0^\infty T(a) K(a, y) da + P_1 H(y) = f(y) \quad (1.8)$$

$$H(y) = -\lambda \sum_{i=1}^2 \frac{1+v_i}{2d_i E_i} J_i(y), \quad f(y) = \lambda \left[\pi \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \frac{v_i N_i}{E_i} - P \frac{1+v_2}{2d_2 E_2} J_2(y) \right]$$

³ В общем случае можно избрать и другой путь получения приближенного решения уравнения (1.5), однако здесь имеется в виду классический метод получения наиболее эффективных приближенных решений подобного класса уравнений (см., например, [3, 4]).

⁴ Например, если в рассматриваемой задаче сопряжение пластин осуществить на интервале $[\varepsilon, \infty]$ вместо $[0, \infty]$, где ε — сколь угодно малая положительная величина.

Для вычисления компонентов напряжений в различных точках пластин можно использовать соответствующие формулы, приведенные в [4], полагая в них $F\sigma_p'(a) = T(a)$, $n = (1+\nu)/(8\pi d)$ и обозначая индексами 1 и 2 величины, относящиеся к первой или второй пластине.

2. Перейдем в уравнении (1.8) к безразмерным параметрам $y^\circ = y/d_M$, $a^\circ = a/d_M$, $\alpha^\circ = \alpha d_M$, $T^\circ(a) = T_1^\circ(a) = T_1(a)/(d_M \sigma_s)$, $P^\circ = P/(d_M^2 \sigma_s)$, $P_1^\circ = P_1/(d_M^2 \sigma_s)$, $N_i^\circ = N_i/(M \sigma_s)$, $K_{ji}^\circ = K_{ji}/d_M^3$, $K_{Fi}^\circ = K_{Fi}/d_M$, $d_M = d_1 M$, $E = E_1/E_2$, где σ_s — предел пропорциональности материала пластины, M — масштабный коэффициент.

При вычислении компонентов напряжений потребуются аналогичные подстановки для следующих величин: $x^\circ = x/d_M$, $t^\circ = t/d_M$, $X_x^\circ = X_x/(d_M \sigma_s)$, ..., $T_2^\circ(y) = T_2(y)/(\sigma_s M d_2)$, $P_2^\circ = P_2/(\sigma_s d_1 d_2 M^2)$.

В дальнейшем, в целях упрощения обозначений, нулик в индексе опускается. Тогда уравнение (1.8) сохранит свой прежний вид, а входящие в него величины будут иметь следующие значения:

$$\lambda = \left(8 \sum_{i=1}^2 d_E^{i-1} C_i \right)^{-1}, \quad f(y) = 4\lambda \left[2\pi \sum_{i=1}^2 (-E)^{i-1} \nu_i N_i - P d_E (1+\nu_2) J_2(y) \right]$$

$$H(y) = -4\lambda \sum_{i=1}^2 d_E^{(i-1)} (1+\nu_i) J_i(y), \quad K(a, y) = \sum_{i=1}^2 d_E^{i-1} (1+\nu_i)^2 R_i(a, y)$$
(2.1)

Исследуем поведение искомой функции $T(y)$ в окрестности нулевой и бесконечно удаленной точек. Положим, что в нулевой точке функция $T(y)$ имеет слабую особенность и при малых y может быть представлена так:

$$T(y) = F(y)/y^\alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (2.2)$$

где $F(y)$ — функция, ограниченная в окрестности нуля, включая нулевую точку.

При определении величины α наиболее удобно использовать асимптотические представления интегралов типа Коши, входящих в уравнение (1.8) [5, с. 89].

Анализ ядер интегралов этого уравнения показывает, что интегралы, определяющие поведение искомой функции вблизи нулевой точки, имеют вид

$$G(y) = \int_0^\infty \frac{T(a)}{a-y} da, \quad \int_0^\infty \frac{P_{m-1}(a, y)}{(a+y)^m} T(a) da \quad (m \leq 3) \quad (2.3)$$

где $P_{m-1}(a, y)$ — полином по a степени не выше $m-1$. Остальные интегралы вблизи нуля ограничены. Второй тип интегралов (2.3) можно выразить через производные интеграла

$$M(y) = \int_0^\infty \frac{T(a)}{a+y} da \quad (2.4)$$

В соответствии с представлением (2.2) для интегралов $G(y)$ и $M(y)$ нетрудно получить асимптотические выражения [5, с. 92]:

$$G(y) = \pi F(0) y^{-\alpha} \operatorname{ctg} \pi \alpha + \Phi_G(y), \quad M(y) = \frac{\pi F(0) y^{-\alpha}}{\sin \pi \alpha} + \Phi_M(y) \quad (2.5)$$

где $\Phi_G(y)$ и $\Phi_M(y)$ — функции, ограниченные вблизи нуля, включая нулевую точку.

Заменяя в уравнении (1.8) соответствующие интегралы выражениями (2.5), умножая левую и правую части на y^α и переходя к пределу при $y \rightarrow 0$, получим характеристическое уравнение относительно α :

$$\cos \pi \alpha + \lambda \sum_{i=1}^2 d_E^{i-1} (1-v_i)^2 [m + K\alpha(2-\alpha)] = 0 \quad (2.6)$$

$$m = 2[1 + (1-3v_i)/C_i], \quad K = 4(1+v_i)/(3-v_i)$$

При $v_1 = v_2 = v$ уравнение (2.6) будет иметь более простой вид

$$\cos \pi \alpha - \gamma(1-\alpha)^2 + 1 = 0, \quad \gamma = 2(1+v)^2/(3-v)^2 \quad (2.7)$$

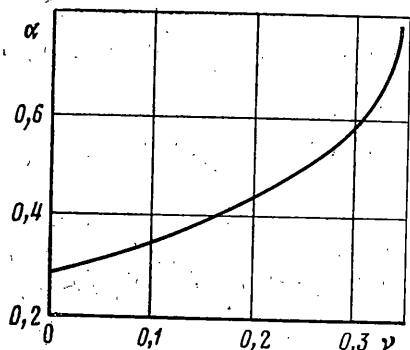
Для большинства конструкционных материалов коэффициент Пуассона изменяется в пределах $0 \leq v \leq 0,5$. Тогда значение γ будет заключено в пределах $0,233 \leq \gamma \leq 0,72$ и, как видно из уравнения (2.7), оно не имеет корней на участке $0 \leq \alpha < 1$. Следовательно, искомая функция является ограниченной в точке $y=0$.

Положим теперь, что в точке $y=0$ функция $T(y)$ имеет нуль порядка α и при малых y может быть представлена так:

$$T(y) = T_0(y) y^\alpha \quad (0 < \alpha \leq 1), \\ T_0(0) \neq 0 \quad (2.8)$$

Производная $T(y)$ будет иметь вид

$$T'(y) = F(y)/y^\beta + O(y^\alpha) \quad (\beta = 1-\alpha), \\ F(0) \neq 0 \quad (0 \leq \beta < 1) \quad (2.9)$$



Фиг. 4

Дифференцируя уравнение (1.8) по y и применяя правило интегрирования по частям, получим интегральное уравнение относительно $T'(y)$. Используя представление (2.9) для $T'(y)$ и

проводя исследование, аналогичное приведенному для α , получим характеристическое уравнение относительно β :

$$\cos \pi \beta + \lambda \sum_{i=1}^2 d_E^{i-1} (1+v_i)^2 [m + K\beta(4-\beta)] = 0 \quad (2.10)$$

$$m = 12 - (17 + 34v_i + v_i^2)/(2C_i), \quad K = 4(1+v_i)/(3-v_i)$$

При $v_1 = v_2 = v$ уравнение (2.10) приобретает вид:

$$\cos \pi \beta + l\beta(4-\beta) - \gamma = 0 \quad (2.11)$$

$$l = 2(1+v)^2/(3-v)^2, \quad \gamma = 7 - 64(1-v)/(3-v)^2$$

Решая численно трансцендентное уравнение (2.11), получим зависимость $\alpha(v)$, которая приведена на фиг. 4. Для стали при $v=0,3$ имеем $\alpha=0,525$. Это значение использовано в приведенном ниже примере.

Для выяснения поведения искомой функции $T(y)$ и ее производных на бесконечности перенесем начало координат в точку $y=y_0$, и, устремляя $y_0 \rightarrow \infty$, получим уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{T(a)}{a-y} da = C, \quad C = 8\pi\lambda \sum_{i=1}^2 (-E)^{i-1} v_i N_i \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) в обычном смысле не имеет решения, однако имеет очевидный физический смысл, являясь основным уравнением контактной задачи о пересечении двух неограниченных пластин, растягиваемых в на-

правлении, перпендикулярном линии их пересечения. Элементарное рассмотрение напряженно-деформированного состояния таких пластин свидетельствует об отсутствии нормальных деформаций вдоль линии их пересечения и, следовательно, об отсутствии сил взаимодействия между собой, т. е. $T(y)=0$.

Математически такое решение можно получить регуляризацией решения уравнения (2.12), которое проведем следующим образом. Заменим правую часть уравнения некоторой последовательностью функций, стремящихся в пределе к C , которая определит соответствующую последовательность решений уравнения (2.12). Предельное значение этой последовательности и примем в качестве решения уравнения (2.12).

В качестве примера правой части можно взять функции $C \exp(R^2 y^2)$ при $R \rightarrow 0$ или $C \theta(R - |y|)$ при $R \rightarrow \infty$. В этих случаях уравнение решается в замкнутом виде при помощи преобразования Фурье, а предельным значением его решений будет $T(y)=0$. Таким способом можно построить бесчисленное множество решений, сходящихся к нулю.

Видно, что относительно производной любого порядка от функции $T(y)$ на бесконечности уравнение задачи будет типа (2.12) с соответствующим нулевым решением.

Учитывая поведение функции $T(y)$ и ее производных в нуле и на бесконечности, представим ее в следующем виде:

$$T(a) = a^\alpha e^{-a} F(a) \quad (2.13)$$

где $F(a)$ — новая неизвестная функция полиномиального типа.

Представим приближенное значение функции $F(a)$ при помощи интерполяционного полинома Лагранжа, построенного по узлам y_k обобщенного полинома Лагерра $L_n(a)$ порядка n :

$$F(a) \approx \sum_{k=1} F_k \frac{L_n(a)}{L_n'(y_k)(a-y_k)} \quad (2.14)$$

Подставляя выражение (2.13) с учетом (2.14) в уравнение (1.8) и придавая параметру a значения узлов полинома Лагерра n -го порядка с добавлением к ним нулевой точки, получим систему $n+1$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+1} F_k B_{jk} = f_j \quad (2.15)$$

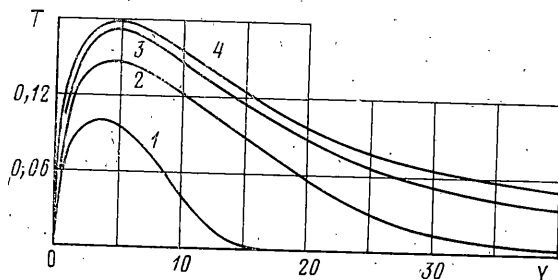
$$F_k = \bar{F}(a_k) \quad (k=1, \dots, n); \quad F_{n+1} = P_1, \quad B_{jk} = A_{jk} + \lambda S_k K(a_k, y_j) \quad (k=1, \dots, n)$$

$$B_{jk} = H(y_j) \quad (k=n+1), \quad y_{n+1}=0, \quad f_j = f(y_j), \quad A_{jk} = \frac{1}{a_k - y_j} \left[S_k - S_j \frac{L_n'(y_j)}{L_n'(a_k)} \right] \quad (j \neq k)$$

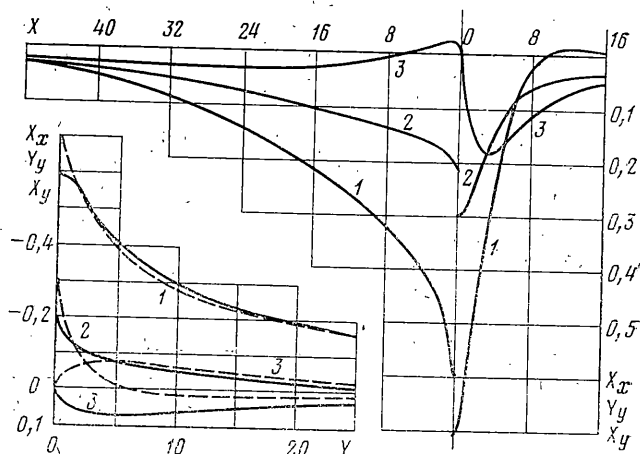
$$A_{jj} = \frac{1}{L_n'(y_j)} \int_0^\infty \frac{a^\alpha e^{-a} L_n(a)}{(a-y_j)^2} da, \quad S_j = \frac{n! \Gamma(\alpha + n + 1)}{y_j [L_n'(y_j)]^2}$$

Для вычисления узлов y_i полиномов Лагерра, производных $L_n'(y_j)$, коэффициентов S_j и A_{jj} разработан алгоритм и составлена ФОРТРАН-программа для ЭВМ. Для решения системы (2.15) и вычисления напряжений в любых точках пластин также составлена программа.

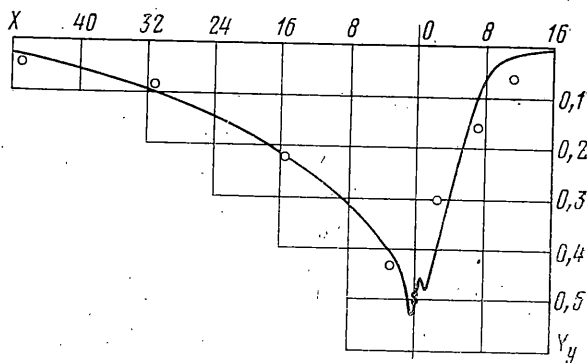
3. В качестве примера рассмотрим локальное напряженное состояние верхней части стенки стальной двутавровой подкрановой балки в месте примыкания ребра жесткости к верхнему поясу. Размеры конструкции взяты из [6, с. 189]. Положим, что у ребра жесткости отсутствуют треугольные вырезы в верхней части, так как они существенно ухудшают напряженное состояние стенки, создавая значительную концентрацию напряжений [4]. Как показал эксперимент [6, с. 189], стенку балки и ребро жесткости можно в расчетной схеме представить полубесконечными пласти-



Фиг. 5



Фиг. 6 и 7



Фиг. 8

нами, кромки которых подкреплены стержнями, работающими на изгиб и растяжение — сжатие. Положим, что полуплоскость, имитирующая стенку балки, имеет индекс 1, а ребро жесткости — индекс 2.

Безразмерные параметры задачи при $M=1$ будут иметь следующие значения: $P=23,44$, $K_{J1}=7290$, $K_{F1}=109$, $K_{J2}=15$, $K_{F2}=75$, $E=1$, $D=0,8$, $\nu_1=\nu_2=0,3$. Кроме того, положим $N_1=N_2=0$.

В результате решения системы (2.15) определяется значение P_1 , как $n+1$ -я неизвестная. Эта величина должна удовлетворять условию внешнего равновесия (1.7). Вычисления на ЭВМ при $M=1$ показали, что невязка с условием равновесия составляет около 40%. С увеличением M она уменьшается, при этом существенно изменяется искомая функция $T(y)$.

На фиг. 5 кривые 1–4 соответствуют функции $T(y)$ при $M=1$; 2,5; 5; 15. При дальнейшем увеличении M график $T(y)$ практически перестает изменяться, но при больших M (порядка 50 и более) кривая $T(y)$ в верхней части начинает осциллировать.

Такие результаты объясняются двумя обстоятельствами. Во-первых, при $M=1$ указанные безразмерные параметры задачи оказываются плохо согласованными с

длиной отрезка оси y , на которой фактически решается уравнение⁵ (1.8). Во-вторых, наличие экспоненты в представлении искомой функции (2.13) обуславливает резкое убывание функции при больших аргументах, что должно, по идее, компенсироваться ростом полинома $F(a)$, у которого возможности в этом отношении не сопоставимы с экспонентой. Очевидно, можно вместо введения масштабного коэффициента в выражения для безразмерных параметров понизить показатель экспоненты в (2.13). Однако это внесет дополнительные неудобства при практических вычислениях, например потребует модификации полиномов Лагерра, связанной со свойством их ортогональности и др.

Величина масштабного коэффициента M влияет также на выбор порядка n системы (2.15). С увеличением M необходимо увеличивать порядок n , в противном случае появляются осцилляции функции $T(y)$ при малых y . В приведенном примере устойчивые результаты⁶ получились при $M=15$ и $n=50$. При этом невязка значения P_1 с условием внешнего равновесия (1.7) составила около 6%. Дальнейшее увеличение M уменьшает эту невязку за счет увеличения значений $T(y)$ при больших y . При малых y это уточнение практически не влияет на $T(y)$.

На фиг. 6 и 7 показаны графики распределения напряжений соответственно на линии контакта полуплоскостей и на кромках. Графики напряжений, относящиеся к первой полуплоскости (стенке балки), на фиг. 6 показаны сплошной линией, а на фиг. 7 они расположены слева от вертикальной оси. Остальные кривые относятся ко второй полуплоскости (ребру). Кривые 1, 2, 3 означают соответственно графики напряжений Y_y , X_x и X_y .

Величины напряжений Y_y и X_x на линии пересечения пластин имеют различные значения для первой и второй полуплоскостей. Строго говоря, на этой линии, принадлежащей обоим полуплоскостям, напряжения Y_y и X_x не определены, значения их здесь следует понимать, как предельные при стремлении к точкам этого контура из соответствующей полуплоскости. В связи с этим указанное различие величин напряжений Y_y и X_x объясняется различием геометрических характеристик полуплоскостей и подкрепляющих их кромки стержней при условии равенства деформаций $e_{yy1}=e_{yy2}$.

Несмотря на существенную разницу в изгибных жесткостях подкрепляющих стержней ($K_{11}/K_{12}=486$), различие между силами, передающимися на первую и вторую полуплоскости, не столь существенно: $P_1=17,38$, $P_2=6,06$ ($P_1/P_2=2,87$). Это объясняется тем, что распределение внешней силы P между полуплоскостями зависит не только от условий на их кромках со стержневыми подкреплениями, но и от условий на линии их пересечения, где они деформируются совместно, обеспечивая взаимопередачу внешних сил.

Сравнение расчетных величин напряжений Y_y с напряжениями, полученными в эксперименте на крупноразмерной модели [6, с. 187], приведено на фиг. 8. Напряжения определялись в горизонтальном сечении балки, отстоящем от верхнего пояса на 20 мм, что было продиктовано условиями размещения тензодатчиков. Слева на фиг. 8 приведена эпюра напряжений для первой полуплоскости (стенка), справа — для второй полуплоскости (ребро). Точками отмечены экспериментальные данные. По площадям экспериментальных эпюр были подсчитаны величины $P_1^e=17,41$, $P_2^e=6,03$, $P_1^e/P_2^e=2,89$. Как видно из этого сравнения, совпадение опытных и теоретических данных является удовлетворительным, что подтверждает правомерность выбранной расчетной схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кудишин Ю. И. Напряженное состояние полуплоскости, подкрепленной балкой и стрингером, с учетом развития пластических деформаций. — Изв. АН СССР. МТТ, 1982, № 3, с. 131–142.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Физматгиз, 1959. 327 с.
3. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. М.: Наука, 1973. 303 с.
4. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. К.: Наук. думка, 1968. 287 с.
5. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е, М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
6. Металлические конструкции. Работа школы профессора Н. С. Стрелецкого. М.: Стройиздат, 1966. 440 с.

Москва

Поступила в редакцию
15.XII.1981

⁵ Длина этого отрезка определяется n -м узлом полинома Лагерра.

⁶ В смысле сходимости по n , удовлетворению условий внешнего равновесия, отсутствия осцилляций у функции $T(y)$, стабильности вычисляемых в дальнейшем величин компонентов напряжений.