МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1983

УДК 539.3.01

О ДВУХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИИ К СМЕШАННЫМ ЗАДАЧАМ

МХИТАРЯН С. М.

В [1] получено спектральное соотношение, согласно которому многочлены Чебышева – Лагерра являются собственными функциями интегрального оператора, порожденного симметричным разностным ядром в виде функции Макдональда на полубесконечном интервале. Ряд таких соотношений, содержащих другие классические ортогональные многочлены, установлен в [2–7]. Основанный на них метод ортогональных многочленов, использованный впервые в [8] и в дальнейшем существенно развитый в [1–7], а также в [9], в последнее время нашел широкое применение в исследованиях по контактным и смешанным задачам теории упругости. Достаточно полный обзор основных результатов, относящихся к этому методу и его применению, приведен в [10].

В публикуемой работе при помощи методов теории потенциала, совершенно отличных от применяемых в [1], вновь устанавливается упомянутое спектральное соотношение. Эти же методы позволяют одновременно получить новое спектральное соотношение, связанное с интегральным уравнением Карлемана на полубесконечном интервале. Устанавливаются родственные с ними интегральные соотношения, справедливые на дополнительном полубесконечном интервале, физический смысл которых заключается в том, что ими даются перемещения вне штампа или напряжения вне трещины. В качестве приложения полученных результатов в известной постановке [11, 12] рассматривается контактная задача о вдавливании полубесконечного штампа в деформирующуюся по степенному закону полуплоскость.

1. Построим собственные функции интегрального оператора

$$\psi(\xi)=K\varphi=\int_0^\infty \frac{K_\mu(|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|^\mu}\varphi(\eta)\,d\eta \quad (|\mu|<{}^1\!/_2),\quad \varphi(\xi)\in L_\rho^2(0,\infty) \quad (\rho(\xi)>0)$$

Для этого рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|^\mu}\varphi(\eta)\,d\eta=f(\xi) \tag{1.1}$$

где $K_\mu(\xi)$ – функция Макдональда. Параллельно рассмотрим также интегральное уравнение

$$\iint_\omega \frac{p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\mu+{}^1\!/_2}}=g(x,y) \tag{1.2}$$

где ω – полуплоскость, точнее $\omega=\{-\infty<x<\infty,\ 0<y<\infty\}$.

Этим уравнением, как известно, описывается контактная задача о вдавливании штампа в виде полуплоскости в полупространство в постановке нелинейной теории установившейся ползучести [11, 12] или в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости полупространства по глубине изменяется по степенному закону [10, гл 4, § 2].

Утверждается, что уравнения (1.1) и (1.2) эквивалентны. Действительно, записав входящий в (1.2) двойной интеграл в виде повторного интеграла, а затем применив к обеим частям интегральное преобразование Фурье и воспользовавшись известной формулой [13, с. 443], будем иметь

$$\frac{\sqrt{\pi}\,|\lambda|^{\mu}}{2^{\mu}\Gamma(\mu+{}^{1}/_{2})}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{K_{\mu}(|\lambda|\,|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|^{\mu}}p_{\lambda}(\eta)\,d\eta=\frac{1}{2}g_{\lambda}(\xi)\quad(0<\xi<\infty)\qquad(1.3)$$

$$p_{\lambda}(\eta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}p(\xi,\eta)\,e^{i\lambda\xi}d\xi,\quad g_{\lambda}(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x,\xi)\,e^{i\lambda x}dx$$

где $p_{\lambda}(\eta)$, $g_{\lambda}(\xi)$ — трансформанты Фурье, $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера.

Далее, заменив $|\lambda|\xi$ на ξ и $|\lambda|\eta$ на η, придем к интегральному уравнению (1.1), причем

$$\varphi(\eta)=p_{\lambda}\left(\frac{\eta}{|\lambda|}\right),\quad f(\xi)=\frac{2^{\mu-1}\Gamma(\mu+{}^{1}/_{2})}{\sqrt{\pi}}|\lambda|^{1-2\mu}g_{\lambda}\left(\frac{\xi}{|\lambda|}\right)$$

Очевидно, что из (1.1) следует уравнение (1.2). Теперь введем в рассмотрение обобщенный потенциал

$$U(x,y,z)=\iint\limits_{\omega}\frac{p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}{[(x-\xi)^{2}+(y-\eta)^{2}+z^{2}]^{\mu+{}^{1}/_{2}}}\qquad(1.4)$$

обладающий конечной мощностью источников, т. е.

$$P=\iint\limits_{\omega}p(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta<\infty$$

Как показано, в [14, 15], функция $U(x, y, z)$ во всем пространстве, кроме полуплоскости ω плоскости $z=0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\partial^{2}U/\partial x^{2}+\partial^{2}U/\partial y^{2}+\partial^{2}U/\partial z^{2}+(2\mu/z)\,\partial U/\partial z=0$$

С другой стороны, нетрудно заметить, что

$$U(x,\ y,\ z)\cong P/r^{1+2\mu}\quad\text{при}\quad r\to\infty\quad(r=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}})$$

Следовательно, интегральное уравнение (1.2) в свою очередь эквивалентно следующей внешней краевой задаче:

$$\Delta U+\frac{2\mu}{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0\quad(x,y,z)\in\{\omega,z=0\}$$

$$U(x,\ y,\ z)\,|_{z=0}=g(x,\ y)\quad(x,\ y)\in\omega,\quad U(x,\ y,\ z)\cong P/r^{1+2\mu}\quad(r\to\infty)\qquad(1.5)$$

После того как построено решение задачи (1.5), решение интегрального уравнения (1.2) — плотность источников, определится по формуле [14, 15]:

$$-2\pi p(x,y)=\operatorname{sign}z\lim|z|^{2\mu}\frac{\partial u}{\partial z}\quad(x,y)\in\omega\qquad(1.6)$$

Применив к обеим частям (1.4) и (1.5) преобразование Фурье по переменной x, получим, что интегральное уравнение (1.1), точнее уравнение (1.3), в конечном итоге эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^{2}U_{\lambda}}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}U_{\lambda}}{\partial z^{2}}+\frac{2\mu}{z}\frac{\partial U_{\lambda}}{\partial z}-\lambda^{2}U_{\lambda}=0\quad(y,z)\in\omega_{0}\qquad(1.7)$$

$$U_{\lambda}(y,\ z)\,|_{z=0}=g_{\lambda}(y)\quad(0<y<\infty),\quad U_{\lambda}(y,\ z)\to0\quad(y^{2}+z^{2}\to\infty),$$

$$\omega_{0}=\{0<y<\infty,\ -\infty<z<\infty\}$$

$$U_\lambda(y,z)=\frac{\sqrt{\pi}\,|\lambda|^\mu}{2^{\mu-1}\Gamma\left(\mu+\dfrac{1}{2}\right)}\int\limits_0^\infty\frac{K_\mu(|\lambda|\sqrt{(y-\eta)^2+z^2})}{[(y-\eta)^2+z^2]^{\mu/2}}p_\lambda(\eta)\,d\eta \qquad (1.8)$$

Применение преобразования Фурье к (1.6) дает, что решение интегрального уравнения (1.3) будет определяться по формуле

$$-2\pi p_\lambda(y)=\lim_{z\to+0} z^{2\mu}\frac{\partial U_\lambda(y,z)}{\partial z} \qquad (1.9)$$

Краевая задача (1.7) сформулирована для плоскости yz с разрезом по положительной полуоси $y>0$. Ее решение построим методом разделения переменных, для чего положим $U_\lambda(y,z)=|z|^{-\mu}V_\lambda(y,z)$. Тогда задача (1.7) преобразуется в краевую задачу

$$\frac{\partial^2 V_\lambda}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_\lambda}{\partial z^2}+\mu(1-\mu)\frac{V_\lambda}{z^2}-\lambda^2V_\lambda=0 \quad (y,z)\in\omega_0$$

$$|z|^{-\mu}V_\lambda(y,z)|_{z=0}=g_\lambda(y) \quad (0<y<\infty), \quad |z|^{-\mu}V_\lambda(y,z)\to 0 \quad (y^2+z^2\to\infty) \qquad (1.10)$$

Далее, комплексную плоскость $w=y+iz$ с разрезом по положительной полуоси $y>0$ отобразим на верхнюю полуплоскость плоскости $\zeta=u+iv$. Отображающая функция имеет вид $w={}^1/_2\zeta^2$, откуда

$$y={}^1/_2(u^2-v^2), \quad z=uv \qquad (1.11)$$

С учетом последнего задача (1.10) преобретает вид

$$\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 W_\lambda}{\partial v^2}+\mu(1-\mu)\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)W_\lambda-\lambda^2(u^2+v^2)W_\lambda=0$$

$$(|u|v)^{-\mu}W_\lambda(u,v)|_{v=0}=g_\lambda\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (-\infty<u<\infty)$$

$$(|u|v)^{-\mu}W_\lambda(u,v)\to 0 \quad (u^2+v^2\to\infty), \quad W_\lambda(u,v)=V_\lambda[{}^1/_2(u^2-v^2),\ uv] \qquad (1.12)$$

Формула (1.9) при указанном преобразовании переходит в следующую ($y=u^2/2$):

$$-2\pi p_\lambda(y)=u^{2\mu-1}\lim_{v\to 0} v^{2\mu}\frac{\partial U_\lambda^\circ(u,v)}{\partial v} \quad (u>0) \qquad (1.13)$$

$$U_\lambda^\circ(u,v)=U_\lambda[{}^1/_2(u^2-v^2),\ uv]=(|u|v)^{-\mu}W_\lambda(u,v) \qquad (1.14)$$

Итак, в конечном итоге необходимо построить решение краевой задачи (1.12) для верхней полуплоскости $v>0$. Положим $W_\lambda(u,v)=X(u)Y(v)$. После простых выкладок приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2X}{du^2}+\left[\frac{\mu(1-\mu)}{u^2}-\lambda^2u^2+\alpha^2\right]X=0 \quad (|u|<\infty) \qquad (1.15)$$

$$\frac{d^2Y}{dv^2}+\left[\frac{\mu(1-\mu)}{v^2}-\lambda^2v^2-\alpha^2\right]Y=0 \quad (0<v<\infty) \qquad (1.16)$$

где α^2 — параметр разделения.

Построим ограниченное на всей оси $-\infty<u<\infty$ решение уравнения (1.15). После замены переменных [16, с. 237] это уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение для вырожденной гипергеометрической функции

$$t\frac{d^2F}{dt^2}+(c-t)\frac{dF}{dt}-aF=0 \quad (0\leqslant t<\infty) \tag{1.17}$$

$$a={}^1/_4(2\mu+1)-{}^1/_4\alpha^2/|\lambda|, \quad c=\mu+{}^1/_2$$

$$t=|\lambda|u^2, \quad X(u)=t^{u_1}e^{-t/2}F(t), \quad u_1=(2c-1)/4$$

Регулярное в точке $t=0$ решение последнего уравнения имеет вид $F(t)=\Phi(a, c; t)$, где $\Phi(a, c; t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Возвращаясь к прежним переменным, можем записать

$$X(u)=(\sqrt{|\lambda|}\,|u|)^{\mu}\exp(-{}^1/_2|\lambda|u^2)\,\Phi({}^1/_4(2\mu+1)-{}^1/_4\alpha^2/|\lambda|, \ \mu+{}^1/_2; \ |\lambda|u^2)$$

Эта функция при $u=0$ ограничена, если только $0\leqslant\mu<{}^1/_2$, что и будем пока предполагать. Но при $|u|\to\infty$ она неограниченно возрастает, что непосредственно вытекает из известного асимптотического представления [16, с. 266]. Поэтому, следуя известной методике [17, с. 567—570], потребуем, чтобы вырожденный гипергеометрический ряд $\Phi(a, c; |\lambda|u^2)$ на некотором члене обрывался, что случится, когда ${}^1/_4(2\mu+1)-{}^1/_4\alpha_n^2/|\lambda|=-n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Отсюда имеем $\alpha_n^2=(4n+1+2\mu)|\lambda|$ и, следовательно

$$X(u)=(\sqrt{|\lambda|}\,|u|)^{\mu}\exp(-{}^1/_2|\lambda|u^2)\,\Phi\left(-n, \mu+\frac{1}{2}; |\lambda|u^2\right) \quad {\scriptstyle (n=0,1,2,\ldots)}$$

С другой стороны, так как [18, с. 189]

$$L_n^{\alpha}(x)=\binom{n+\alpha}{n}\Phi(-n, \alpha+1; x) \quad {\scriptstyle (n=0,1,\ldots)}$$

где $L_n^{\alpha}(x)$ — многочлены Чебышева — Эрмита, то окончательно будем иметь

$$X(u)=(\sqrt{|\lambda|}\,|u|)^{\mu}\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|u^2\right)L_n^{\mu-1/2}(|\lambda|u^2) \quad (0\leqslant\mu<{}^1/_2) \tag{1.18}$$

Поскольку второе линейно-независимое решение $F(t)=t^{1/2-\mu}\Phi(a-c+1, 2-c; t)$ уравнения (1.17) при $t\to\infty$ неограниченно, то единственное ограниченное на всей оси $-\infty<u<\infty$ решение уравнения (1.15) будет (1.18).

Аналогичным образом можно показать, что ограниченное при $0<v<\infty$ решение уравнения (1.16) имеет вид

$$Y(v)=(\sqrt{|\lambda|}\,v)^{\mu}\exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|v^2\right)\Psi(n+\mu+{}^1/_2, \mu+{}^1/_2; |\lambda|v^2) \tag{1.19}$$

$$0<v<\infty, \quad 0\leqslant\mu<{}^1/_2 \quad {\scriptstyle (n=0,\,1,\,2,\,\ldots)}$$

где $\Psi(a, c, x)$ — известная функция Трикоми, связанная с $\Phi(a, c, x)$ формулой [16, с. 245]

$$\Psi(a, c; x)=\frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)}\Phi(a, c; x)+\frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)}x^{1-c}\Phi(a-c+1, 2-c; x) \quad (c\neq n) \tag{1.20}$$

Теперь при помощи (1.18) и (1.19) из (1.14) получим

$$U_\lambda^0(u, v)=|\lambda|^{\mu}\exp[-{}^1/_2|\lambda|(u^2+v^2)]L_n^{\mu-1/2}(|\lambda|u^2)\times$$
$$\times\Psi(n+\mu+{}^1/_2, \mu+{}^1/_2; |\lambda|v^2) \tag{1.21}$$

$$-\infty<u<\infty, \quad 0<v<\infty \quad {\scriptstyle (n=0,\,1,\,2,\,\ldots)}$$

где уже можно считать $-{}^1/_2<\mu<{}^1/_2$.

По формуле (1.13) вычислим соответствующую потенциалу (1.21) плотность источников. Приняв во внимание, что при $v=0$ имеем $y={}^1/_2u^2$, $z=0$, и воспользовавшись (1.20), а также формулой дифференцирования функции $\Psi(a, c; x)$ [16], находим

$$p_\lambda(y)=\frac{2n+2\mu+1}{\pi}\cdot\frac{2^{\mu-3/2}\Gamma(\mu+1/2)}{\Gamma(n+\mu+3/2)}\times$$

$$\times\sqrt{|\lambda|}\,y^{\mu-1/2}e^{-|\lambda|y}L_n^{-1/2}(2|\lambda|y)\quad(0<y<\infty)\tag{1.22}$$

С другой стороны, из (1.21) следует

$$U_\lambda(y,0)=\frac{\Gamma(1/2-\mu)}{n!}|\lambda|^\mu e^{-|\lambda|y}L_n^{\mu-1/2}(2|\lambda|y)\tag{1.23}$$

Далее, подставляя (1.22) и (1.23) в (1.8), после простых операций придем к спектральному соотношению

$$\int_0^\infty\frac{K_\mu(|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|^\mu}\frac{L_n^{\mu-1/2}(2\eta)}{e^\eta\eta^{1/2-\mu}}d\eta=\lambda_n e^{-\xi}L_n^{\mu-1/2}(2\xi)\tag{1.24}$$

$$\lambda_n=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,n!}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}-\mu\right),\quad|\mu|<\frac{1}{2}\quad{\scriptstyle(n=0,1,\ldots)}$$

полученному другими методами в [1]. Поскольку входящие в (1.24) функции по μ являются аналитическими, то согласно принципу симметрии Шварца это соотношение можно аналитически продолжить в полосу $-{}^1/_2<\operatorname{Re}\mu<{}^1/_2$.

Чтобы записать родственное с (1.24) соотношение при $\xi<0$, заметим, что при $u=0$ имеем $y=-{}^1/_2v^2$, $z=0$. Тогда, исходя из (1.21) и (1.22), совершенно аналогичным образом получим

$$\int_0^\infty\frac{K_\mu(|\xi-\eta|)}{|\xi-\eta|^\mu}\frac{L_n^{\mu-1/2}(2\eta)\,d\eta}{e^\eta\eta^{1/2-\mu}}=$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma^2(n+\mu+1/2)}{\sqrt{2}\,\Gamma(\mu+1/2)\,n!}e^\xi\Psi(n+\mu+1/2,\mu+1/2;-2\xi)\quad(\xi<0)\tag{1.25}$$

Соотношение (1.25) определяет значение интеграла (1.24) на полуоси $\xi<0$. При помощи (1.25) в упомянутой выше контактной задаче можно найти вертикальные перемещения граничных точек полупространства вне штампа. На этом, однако, здесь останавливаться не будем.

2. Рассмотрим далее интегральное уравнение Карлемана

$$\int_0^\infty\frac{\varphi(s)\,ds}{|y-s|^\mu}=f(y)\quad(0<\mu<1)\tag{2.1}$$

Решение этого уравнения можно построить известным методом [19]. Здесь его решение построим методами теории потенциала, для этого введем в рассмотрение функцию

$$U(y,z)=\int_0^\infty\frac{\varphi(s)\,ds}{[(y-s)^2+z^2]^{\mu/2}},\quad P=\int_0^\infty\varphi(s)\,ds<\infty\tag{2.2}$$

Очевидно, что интегральное уравнение (2.1) эквивалентно следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{\mu}{z}\frac{\partial U}{\partial z}=0 \quad (y,z)\in L$$

$$U(y, z)\,|_{z=0}=f(y)\,(0<y<\infty), \quad L=\{z=0,\ 0<y<\infty\}$$

$$U(y,z)\cong\frac{P}{r^{\mu}}, \quad r\to\infty \quad (r=\sqrt{y^2+z^2})$$

После замены

$$U(y, z)=|z|^{-\frac{1}{2}\mu}V(y, z) \tag{2.3}$$

придем к задаче

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+\frac{\mu}{2}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\frac{V}{z^2}=0 \quad (y,z)\in L \tag{2.4}$$

$$|z|^{-\frac{1}{2}\mu}V(y, z)\,|_{z=0}=f(y) \quad (0<y<\infty), \quad |z|^{-\frac{1}{2}\mu}V(y, z)\cong P/r^{\mu} \quad (r\to\infty)$$

для плоскости с разрезом вдоль положительной полуоси $0<y<\infty$. При этом решение интегрального уравнения (2.1) будет определяться формулой

$$-\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma[{}^1/_2(1+\mu)]}{\Gamma(\mu/2)}\,\mathrm{sign}\, z\varphi(y)=\lim_{z\to0}|z|^{\mu}\frac{\partial U(y,z)}{\partial z} \quad (0<y<\infty) \tag{2.5}$$

где функция $U(y, z)$ связана с $V(y, z)$ соотношением (2.3).

Далее, как выше, при помощи зависимостей (1.11) краевую задачу (2.4) преобразуем в следующую:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}+\frac{\mu}{2}\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)W=0 \quad (v>0)$$

$$(|u|v)^{-\frac{1}{2}\mu}W(u,v)\,|_{v=0}=f\left(\frac{u^2}{2}\right) \quad (0<u<\infty) \tag{2.6}$$

$$(|u|v)^{-\frac{1}{2}\mu}W(u, v)\to0 \quad (u^2+v^2\to\infty), \quad W(u, v)=V[{}^1/_2(u^2-v^2),\ uv]$$

Формула (2.5) при указанном преобразовании переходит в следующую:

$$-\frac{2\sqrt{\pi}\,\Gamma({}^1/_2(1+\mu))}{\Gamma(\mu/2)}\varphi(y)=u^{\mu-1}\lim_{v\to0}v^{\mu}\frac{\partial U^{\circ}(u,v)}{\partial v} \quad (y=u^2/2;\ u>0) \tag{2.7}$$

$$U^{\circ}(u, v)=U[{}^1/_2(u^2-v^2),\ uv]=(|u|v)^{-\frac{1}{2}\mu}W(u, v) \tag{2.8}$$

Положим в (2.6) $W(u, v)=X(u)Y(v)$. В результате получим дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2X}{du^2}+\left[\frac{\mu(2-\mu)}{4u^2}+\alpha^2\right]X=0 \quad (-\infty<u<\infty) \tag{2.9}$$

$$\frac{d^2Y}{dv^2}+\left[\frac{\mu(2-\mu)}{4u^2}-\alpha^2\right]Y=0 \tag{2.10}$$

Линейно-независимыми решениями уравнения (2.9) будут функции: $\sqrt{u}J_{\pm\varkappa}(\alpha u)$, $\sqrt{u}Y_{\pm\varkappa}(\alpha u)$, $\varkappa={}^1/_2(\mu-1)$, где $J_\nu(x)$ — функция Бесселя первого рода, а $Y_\nu(x)$ — функция Неймана. Чтобы из этих решений выделить только одно, заметим, что согласно (2.6) функция $|u|^{-\frac{1}{2}\mu}X(u)$ на всей оси $-\infty<u<\infty$ должна быть четной, ограниченной и исчезающей на бесконечности. Приняв во внимание известное представление [18]:

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x/2)^{2n+\nu}}{n!\Gamma(n+\nu+1)} \tag{2.11}$$

находим, что искомое решение имеет вид $X(u)=u^{1/2}J_\varkappa(\alpha u)$ $(\alpha,\ u>0)$, которое вместе со множителем $u^{-1/2\mu}$ допускает четное продолжение на полуось $-\infty<u<0$.

Решение уравнения (2.10), исчезающее на бесконечности, имеет форму $Y(v)=v^{1/2}K_\varkappa(\alpha v)$ $(\alpha,\ v>0)$.

Следовательно, краевая задача (2.6) имеет следующее нормальное решение: $W(u,\ v)=(uv)^{1/2}J_\varkappa(\alpha u)K_\varkappa(\alpha v)$; откуда при помощи (2.8) получим

$$U^\circ(u,\ v)=(uv)^{-\varkappa}J_\varkappa(\alpha u)K_\varkappa(\alpha v)\qquad(\alpha,\ u,\ v>0) \tag{2.12}$$

По формуле (2.7) вычислим соответствующую потенциалу (2.12) плотность источников. После простых операций будем иметь

$$\varphi(y)=\frac{\alpha^{-\varkappa}\Gamma(\mu/2)}{2^{7/4-3/4\mu}\sqrt{\pi}}\,y^{1/2\varkappa}J_\varkappa(\alpha\sqrt{2y})\qquad(\alpha,y>0) \tag{2.13}$$

Далее, воспользовавшись известными представлениями [18]:

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin(\pi\nu)}[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)],\qquad I_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода, получим

$$K_\varkappa(x)=\frac{\pi}{2\cos(^1/_2\pi\mu)}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma\left(n+\frac{1+\mu}{2}\right)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{x}{2}\right)^{-\varkappa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\Gamma[n+{}^1/_2(3-\mu)]}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}\right]$$

Отсюда непосредственно вытекает, что

$$\lim_{v\to0}v^{-\varkappa}K_\varkappa(\alpha v)=\frac{\pi\alpha^\varkappa}{2^{1/2(1+\mu)}\cos(^1/_2\pi\mu)\Gamma[^1/_2(1+\mu)]}$$

Учитывая последнее соотношение, из (2.12) находим

$$U^\circ(u,v)\,|_{v=0}=\frac{\pi\alpha^\varkappa u^{-\varkappa}}{2^{1/2(1+\mu)}\cos(^1/_2\pi\mu)\Gamma[^1/_2(1+\mu)]}J_\varkappa(\alpha u)\qquad(u=\sqrt{2y}) \tag{2.14}$$

Подставляя (2.13) и (2.14) в (2.2), после простых выкладок придем к спектральному соотношению

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{s^{1/2\varkappa}J_\varkappa(\alpha\sqrt{s})}{|y-s|^\mu}ds=\sigma(\alpha)\,y^{-1/2\varkappa}J_\varkappa(\alpha\sqrt{y})\qquad\sigma(\alpha)=\frac{2^{-2\varkappa}\alpha^{2\varkappa}}{\Gamma(\mu)\cos(^1/_2\pi\mu)}\qquad(\alpha>0) \tag{2.15}$$

Спектральным соотношением (2.15) определяются обобщенные собственные функции степенного ядра на полубесконечном интервале.

Получим также родственное с (2.15) соотношение, справедливое при $y<0$; для этого положим в (2.12) $u=0$. Приняв во внимание (2.11), будем иметь

$$U^\circ(0,v)=\frac{\alpha^\varkappa}{2^\varkappa\Gamma[^1/_2(1+\mu)]}v^{-\varkappa}K_\varkappa(\alpha v),\qquad(v=\sqrt{-2y},\ y<0) \tag{2.16}$$

Снова подставляя (2.13) и (2.16) в (2.2), после элементарных преобразований придем к искомому интегральному соотношению

$$\int_0^\infty \frac{s^{1/2\varkappa} J_\varkappa(\alpha\sqrt{s})}{|y-s|^\mu} ds = \frac{\alpha^{2\varkappa}(-y)^{-1/2\varkappa}}{2^{\mu-2}\Gamma(\mu)} K_\varkappa(\alpha\sqrt{-y}) \qquad (y<0) \tag{2.17}$$

Исходя из (2.15) запишем билинейное разложение степенного ядра на полубесконечном интервале. Воспользовавшись формулами преобразования Ханкеля, можем записать

$$\frac{(ys)^{1/2\varkappa}}{|y-s|^\mu} = \frac{\pi}{2^\mu \cos(^1/_2\pi\mu)\Gamma(\mu)} \int_0^\infty J_\varkappa(\alpha\sqrt{y}) J_\varkappa(\alpha\sqrt{s}) \alpha^\mu \, d\alpha \qquad (y, s>0)$$

Очевидно, что последний интеграл сходится.

Теперь (2.15) запишем в виде

$$-\mu \int_0^\infty \frac{|y^2-s^2|^{-\mu}-1}{-\mu} s^\varkappa J_\varkappa(\alpha s) s \, ds + \int_0^\infty s^\varkappa J_\varkappa(\alpha s) s \, ds =$$

$$= 2^{-2\varkappa} \sin(^1/_2\pi\mu)\Gamma(-2\varkappa)\alpha^{2\varkappa} y^{-\varkappa} J_\varkappa(\alpha y)$$

и совершим предельный переход при $\mu\to 0$. Воспользовавшись формулой $(a^x/x-1/x) = \ln a$ (при $x\to 0$), а затем, дифференцируя обе части полученного равенства, чтобы освободиться от некоторой постоянной, после простых преобразований придем к известному соотношению Гильберта

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos\alpha s \, ds}{s-y} = -\sin\alpha y \qquad (\alpha>0; -\infty<y<\infty)$$

3. В качестве приложения полученных результатов рассмотрим контактную задачу нелинейной теории установившейся ползучести о вдавливании полубесконечного штампа, занимающего полуось $y>0$, в деформирующуюся по степенному закону $\sigma_i = A_0 \varepsilon_i^h$ $(0<h<1)$ полуплоскость $z<0$. Здесь σ_i и ε_i — интенсивности напряжений и скоростей деформаций, а A_0 и h — физические константы материала. Для простоты будем предполагать, что полубесконечный штамп вдавливается в полуплоскость при помощи вертикальных сил, распределенных по всей его длине, и момента, под одновременным действием которых штамп может только поступательно перемещаться в вертикальном направлении.

В постановке, изложенной в [11, 12], решение указанной задачи в случае плоской деформации и отсутствия сил трения или сцепления сводится к решению интегрального уравнения

$$\int_0^\infty \frac{p(s)}{|y-s|^{1-h}} ds = \left[\frac{\delta - f_0(y)}{B_0}\right]^h, \qquad \int_0^\infty p(s)\, ds = P < \infty \tag{3.1}$$

$$B_0 = \frac{(2-\gamma)\sin(^1/_2\pi\beta)}{\beta A_0^\gamma (\gamma-1) J^\gamma(h)} \qquad \left(\beta = \frac{\sqrt{2h-1}}{h}, \gamma = \frac{1}{h}\right)$$

$$J(h) = 4\int_0^{1/2\pi} (\cos\beta\vartheta)^h \cos\vartheta \, d\vartheta$$

Здесь $p(y)$ — нормальное контактное давление, δ — осадка штампа, $f_0(y)$ — функция, характеризующая его основание, P — равнодействующая сил, приложенных к штампу.

Левая часть уравнения (3.1) имеет асимптотику $P/|y|^{1-h}$ при $|y|\to\infty$. Следовательно, функция $f_0(y)$ должна иметь асимптотику

$$f_0(y)\cong\delta-B_0P^{\gamma}|y|^{\gamma(h-1)},\quad |y|\to\infty \tag{3.2}$$

Из (3.2) фактически определяется осадка штампа δ.

Далее, в (3.1) перейдем к безразмерным величинам

$$p(y)/P=\varphi(y),\qquad \left[\frac{(\delta-f_0(y))}{B_0}\right]^h\Big/P=f(y)$$

После этого будем иметь

$$\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(s)\,ds}{|y-s|^\mu}=f(y)\qquad (\mu=1-h) \tag{3.3}$$

Решение уравнения (3.3) представим в виде

$$\varphi(y)=y^{1/2\varkappa}\int\limits_0^\infty\Phi(\alpha)J_\varkappa(\alpha\sqrt{y})\,d\alpha \tag{3.4}$$

где $\Phi(\alpha)$ — пока неизвестная функция. Учитывая (2.15) и формулу обращения Ханкеля, получим

$$\Phi(\alpha)=\frac{\Gamma(\mu)\cos(^1/_2\pi\mu)}{\pi2^{2-\mu}\alpha^{\mu-2}}\int\limits_0^\infty y^\varkappa f(y)J_\varkappa(\alpha\sqrt{y})\,dy \tag{3.5}$$

Итак, решение уравнения (3.3) определяется формулами (3.4) и (3.5). Положив

$$v_0(y)=\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(s)\,ds}{|y-s|^\mu}\qquad (y<0)$$

при помощи (2.17) находим

$$v_0(y)=\frac{(-y)^{-1/2\varkappa}}{2^{\mu-2}\Gamma(\mu)}\int\limits_0^\infty\Phi(\alpha)\alpha^{2\varkappa}K_\varkappa(\alpha\sqrt{-y})\,d\alpha\qquad (y<0)$$

Истинные перемещения, в пределах принятой точности, граничных точек полуплоскости вне штампа будут выражаться формулой $v(y)=-B_0P^{\gamma}v_0^{\gamma}(y)$ $(y<0)$. Результаты этого пункта могут быть распространены на рассматриваемую задачу в постановке линейной теории упругости, когда модуль упругости полуплоскости по глубине изменяется по степенному закону [15, 20].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины.– Ж. техн. физ., 1965, т. 35, вып. 3, с. 381–389.
2. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам.– ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 821–832.
3. *Попов Г. Я.* Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам.– ПММ, 1964, т. 28, вып. 4, с. 442–451.

4. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения.– ПММ, 1966, т. 30, вып. 3, с. 551–563.
5. *Попов Г. Я.* Некоторые новые соотношения для многочленов Якоби.– Сиб. матем. ж., 1967, т. 8, № 6, с. 1399–1404.
6. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби.– Укр. матем. ж., 1968, т. 20, № 4, с. 540–547.
7. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.– ПММ, 1969, т. 33, вып. 3, с. 518–531.
8. *Клубин П. И.* Расчет балочных и круглых плит на упругом основании.– Инж. сб., 1952, т. 12, с. 95–135.
9. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости.– ПММ, 1970, т. 34, вып. 4, с. 643–652.
10. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
11. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести.– ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901–924.
12. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения.– ПММ, 1963, т. 27, вып. 5, с. 813–820.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
14. *Раков А. Х., Рвачев В. Л.* Контактная задача теории упругости для полупространства, модуль упругости которого есть степенная функция глубины.– Докл. АН УССР, 1961, № 3, с. 286–290.
15. *Рвачев В. Л., Проценко В. С.* Контактные задачи теории упругости для неклассических областей. Киев: Наук. думка, 1977. 235 с.
16. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
17. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 3, ч. 2. М.: Наука, 1969. 672 с.
18. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2, М.: Наука, 1974. 295 с.
19. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов.– Успехи матем. наук, 1958, т. 13, № 5, с. 3–120.
20. *Попов Г. Я.* Осесимметричная контактная задача для упругого неоднородного полупространства при наличии сцепления.– ПММ, 1973, т. 37, вып. 6, с. 1109–1116.

Ереван

Поступила в редакцию
11.V.1981