

УДК 539.3.01

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧЕ
ДЛЯ СПЛОШНОГО ВЕСОМОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

АБРАМЯН Б. Л.

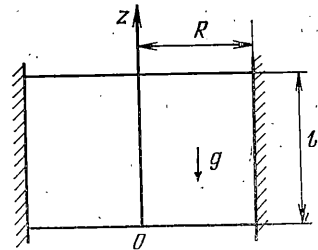
Рассматривается осесимметричная задача для сплошного цилиндра конечной длины, находящегося под действием собственного веса, когда цилиндр закреплен своей боковой поверхностью, а основания цилиндра свободны от напряжений.

Решение задачи приведено к бесконечной регулярной системе линейных алгебраических уравнений. Рассмотрен численный пример.

Одна задача для пространства с цилиндрической выработкой при наличии сил тяжести рассматривалась в [1]. Осесимметричная задача для конечного цилиндра, когда граничные условия заданы напряжениями, решена в [2]. Другие осесимметричные задачи для конечных цилиндров, когда на одном или двух торцах заданы перемещения, а на остальных поверхностях — напряжения, или когда перемещения заданы на боковой поверхности, а на торцах — напряжения при отсутствии гравитационного поля, рассматривались в [3–8].

1. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии при наличии объемных сил в перемещениях будут иметь вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho R}{G} &= 0 \\ \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\rho Z}{G} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь u_r и u_z — компоненты перемещения, ρ — плотность материала цилиндра, G — модуль сдвига, R и Z — компоненты объемных сил.

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \Delta &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Если ось z направить в обратную сторону действия силы тяжести (фиг. 1), будем иметь $R=0$, $Z=-g$. В этом случае частное решение уравнений (1.1) можно брать в виде

$$u_r^{(0)} = Arz, \quad u_z = Az^2, \quad A = [(1-2\nu)\rho g]/[2(3-2\nu)G] \quad (1.2)$$

Пользуясь известными формулами и выражениями (1.2), для напряжений будем иметь соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= \frac{2G(1+2\nu)}{1-2\nu} Az \\ \sigma_\varphi^{(0)} &= \frac{2G(1+2\nu)}{1-2\nu} Az \\ \sigma_z^{(0)} &= \frac{4G}{1-2\nu} Az, \quad \tau_{rz}^{(0)} = GAR, \quad \tau_{r\varphi}^{(0)} = \tau_{z\varphi}^{(0)} = 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Для построения общего решения уравнений (1.1) при отсутствии объёмных сил бигармоническую функцию Лява примем в виде

$$\Phi(r, z) = A_0 r^2 z^2 + B_0 z^4 + C_0 r^4 + F_0 z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r)] \cos \lambda_k z + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \operatorname{sh} \mu_k z + B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z) J_0(\mu_k r) \quad (1.4)$$

$$C_0 = -\frac{1-2\nu}{16(1-\nu)} A_0, \quad B_0 = -\frac{3-2\nu}{6(1-\nu)} A_0$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя n -го порядка первого рода с действительным аргументом, $I_n(t)$ — функция Бесселя первого рода мнимого аргумента.

Пользуясь теперь выражениями (1.2)–(1.4), для решения задачи о весоом цилиндре для перемещений и напряжений будем иметь зависимости

$$u_r(r, z) = \frac{1}{2G} \left\{ \left(\frac{1-2\nu}{3-2\nu} \rho g - 4A_0 \right) rz + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sin \lambda_k z [E_k I_1(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r)] + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_1(\mu_k r) [(A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z] \right\}$$

$$u_z(r, z) = \frac{1}{2G} \left\{ \left(\frac{1-2\nu}{3-2\nu} \rho g + \frac{2A_0}{1-\nu} \right) z^2 + 2(1-2\nu) F_0 + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z [G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + [E_k + 4(1-\nu) G_k] I_0(\lambda_k r)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k r) \{ [2(1-2\nu) D_k - A_k] \operatorname{sh} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + \\ + [2(1-2\nu) C_k - B_k] \operatorname{ch} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \} \}$$

$$\sigma_z(r, z) = 2 \left(\frac{\rho g}{3-2\nu} + 2A_0 \right) z + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [D_k(1-2\nu) - A_k] \operatorname{ch} \mu_k z + \\ + [C_k(1-2\nu) - B_k] \operatorname{sh} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \{ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + [E_k + 2(2-\nu) G_k] I_0(\lambda_k r) \}$$

$$\sigma_r(r, z) = \left(\frac{1+2\nu}{3-2\nu} \rho g - \frac{4A_0}{1-\nu} \right) z + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \left\{ [E_k + (1-2\nu) G_k] I_0(\lambda_k r) + \right.$$

$$+ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) - E_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \left. \right\} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \{ [A_k + (1+2\nu) D_k] \operatorname{ch} \mu_k z + \\ + [B_k + (1+2\nu) C_k] \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 \frac{J_1(\mu_k r)}{r} \{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \left(\frac{1-2\nu}{2(3-2\nu)} \rho g - 2A_0 \right) r + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \{ [E_k + 2(1-\nu) G_k] I_1(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) \} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_1(\mu_k r) \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k z + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \} \end{aligned}$$

2. В случае осесимметричной задачи для круглого цилиндра конечной длины, находящегося под действием собственного веса, когда цилиндр закреплён своей боковой поверхностью при свободных от напряжений основаниях, граничные условия будут иметь вид

$$\begin{aligned} u_r(R, z) = u_z(R, z) = 0 \\ \tau_{rz}(r, 0) = \sigma_z(r, 0) = 0 \\ \tau_{rz}(r, l) = \sigma_z(r, l) = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Полагая $\lambda_k = k\pi/l$, $J_1(\mu_k R) = 0$ и удовлетворяя условиям (2.1), найдем

$$\begin{aligned} A_0 = -\frac{\rho g}{2(3-2\nu)}, \quad F_0 = \frac{\nu \rho g l^2}{6(1-\nu)(1-2\nu)} - \\ - \frac{1-\nu}{(1-2\nu)l} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k R) \operatorname{sh} \mu_k l \left(C_k + D_k \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} A_k = D_k(1-2\nu) \\ B_k = C_k(1-2\nu - \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l) - D_k \mu_k l \\ E_k = \frac{2\rho g R(-1)^k}{\lambda_k^3 I_1(\lambda_k R)} - G_k \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для определения коэффициентов C_k , D_k и G_k получаем следующие бесконечные системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} G_m \lambda_m^4 R I_1(\lambda_m R) \Delta_m = 2\rho g R \frac{I_0(\lambda_m R)}{I_1(\lambda_m R)} - \frac{4\nu}{1-\nu} \frac{\rho g}{\lambda_m} - \\ - \frac{4\lambda_m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^3 J_0(\mu_k R)}{(\lambda_m^2 + \mu_k^2)^2} \operatorname{sh} \mu_k l \left(C_k + \operatorname{cth} \frac{\mu_k l}{2} D_k \right) [\nu \lambda_m^2 - (1-\nu) \mu_k^2] \quad (m=1, 3, \dots) \\ \Delta_m = 1 - \frac{I_0^2(\lambda_m R)}{I_1^2(\lambda_m R)} + 4(1-\nu) \frac{I_0(\lambda_m R)}{\lambda_m R I_1(\lambda_m R)} \\ G_m \lambda_m^4 R I_1(\lambda_m R) \Delta_m = -2\rho g R \frac{I_0(\lambda_m R)}{I_1(\lambda_m R)} + \frac{4\nu}{1-\nu} \frac{\rho g}{\lambda_m} + \\ + \frac{4\lambda_m}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^3 J_0(\mu_k R)}{(\lambda_m^2 + \mu_k^2)^2} \operatorname{sh} \mu_k l \left(C_k + \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{2} D_k \right) [\nu \lambda_m^2 - (1-\nu) \mu_k^2] \quad (m=2, 4, \dots) \\ \mu_m^3 J_0(\mu_m R) (\operatorname{sh} \mu_m l - \mu_m l) \operatorname{cth} \frac{\mu_m l}{2} \left(C_m + D_m \operatorname{th} \frac{\mu_m l}{2} \right) = 2\rho g l \operatorname{cth} \mu_m l - \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\rho g}{\mu_m} \left(1 - \frac{\mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l}\right) + \frac{8\mu_m}{R} \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k^3 G_k I_1(\lambda_k R)}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1-\nu)\mu_m^2 - \nu\lambda_k^2] \quad (m=1,2,\dots) \\
& \mu_m^3 J_0(\mu_m R) (\operatorname{sh} \mu_m l + \mu_m l) t h \frac{\mu_m l}{2} \left(C_m + D_m \operatorname{cth} \frac{\mu_m l}{2}\right) = \\
& = 2\rho g l t h \frac{\mu_m l}{2} - \frac{8\mu_m}{R} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_k^3 G_k I_1(\lambda_k R)}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1-\nu)\mu_m^2 - \nu\lambda_k^2] \quad (m=1,2,\dots)
\end{aligned}$$

После введения новых неизвестных

$$\begin{aligned}
X_k &= \mu_k^3 J_0(\mu_k R) \operatorname{sh} \mu_k l [D_k \operatorname{cth}(\mu_k l/2) + C_k] \\
Y_k &= \mu_k^3 J_0(\mu_k R) \operatorname{sh} \mu_k l [D_k \operatorname{th}(\mu_k l/2) + C_k] \\
Z_m &= l G_m \lambda_m^3 I_1(\lambda_m R) / R
\end{aligned} \quad (2.5)$$

бесконечные системы (2.4) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned}
X_m &= \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} a_{mk}^{(1)} Z_k + M_m^{(1)} \quad (m=1,2,\dots), \\
Y_m &= \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} a_{mk}^{(2)} Z_k + M_m^{(2)} \quad (m=1,2,\dots) \\
Z_m &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^{(1)} X_k + N_m^{(1)} \quad (m=1,3,\dots) \\
Z_m &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{mk}^{(2)} Y_k + N_m^{(2)} \quad (m=2,4,\dots)
\end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
a_{mk}^{(1)} &= -\frac{8\mu_m [(1-\nu)\mu_m^2 - \nu\lambda_k^2]}{l(1+\mu_m l/\operatorname{sh} \mu_m l) \operatorname{th}(\mu_m l/2)} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} \\
a_{mk}^{(2)} &= \frac{8\mu_m [(1-\nu)\mu_m^2 - \nu\lambda_k^2]}{l(1-\mu_m l/\operatorname{sh} \mu_m l) \operatorname{cth}(\mu_m l/2)} \frac{1}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} \\
b_{mk}^{(1)} = -b_{mk}^{(2)} &= \frac{4[(1-\nu)\mu_k^2 - \nu\lambda_m^2]}{R^2 \Delta_m (\lambda_m^2 + \mu_k^2)^2}, \quad M_m^{(1)} = \frac{2\rho g l \operatorname{sh} \mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l + \mu_m l} \\
M_m^{(2)} &= \frac{2\rho g l \operatorname{sh} \mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l - \mu_m l} \left[1 - \frac{\operatorname{th}(\mu_m l/2)}{\mu_m l}\right] \\
N_m^{(1)} = -N_m^{(2)} &= \frac{2\rho g l}{\lambda_m R \Delta_m} \left[\frac{I_0(\lambda_m R)}{I_1(\lambda_m R)} - \frac{2\nu}{(1-\nu)\lambda_m R}\right]
\end{aligned}$$

Докажем, что системы (2.6) регулярны. Используя значения рядов

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_m^2} &= \frac{R}{2\lambda_m} \left[\frac{I_0(\lambda_m R)}{I_1(\lambda_m R)} - \frac{2}{\lambda_m R}\right] \\
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{(\mu_k^2 + \lambda_m^2)^2} &= \frac{R^2}{4} \left[\frac{2I_0(\lambda_m R)}{\lambda_m R I_1(\lambda_m R)} + 1 - \frac{I_0^2(\lambda_m R)}{I_1^2(\lambda_m R)}\right] \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_h^2 + \lambda_m^2)^2} = \frac{R^2}{4\lambda_m^2} \left[\frac{I_0^2(\lambda_m R)}{I_1^2(\lambda_m R)} - 1 - \frac{4}{\lambda_m^2 R^2} \right]$$

где μ_h — корни уравнения $J_1(\mu_h R) = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h^2 + \mu_m^2} &= \frac{l}{4\mu_m} \operatorname{th} \frac{\mu_m l}{2}, \quad \lambda_h = \frac{k\pi}{l} \\ \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_h^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} &= \frac{l}{8\mu_m} \left(1 + \frac{\mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l} \right) \operatorname{th} \frac{\mu_m l}{2} \\ \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} &= \frac{l}{8\mu_m^3} \left(1 - \frac{\mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l} \right) \operatorname{th} \frac{\mu_m l}{2} \\ \sum_{h=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h^2 + \mu_m^2} &= \frac{l}{4\mu_m} \left(\operatorname{cth} \frac{\mu_m l}{2} - \frac{2}{\mu_m l} \right) \\ \sum_{h=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_h^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} &= \frac{l}{8\mu_m} \left(1 - \frac{\mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l} \right) \operatorname{cth} \frac{\mu_m l}{2} \\ \sum_{h=2,4,\dots}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} &= \frac{l}{8\mu_m^3} \left[\left(1 + \frac{\mu_m l}{\operatorname{sh} \mu_m l} \right) \operatorname{cth} \frac{\mu_m l}{2} - \frac{4}{\mu_m l} \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

будем иметь следующую общую оценку:

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_h^2} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\gamma_h^2}{(\gamma_h^2 + x^2)^2} > \sum_{h=1}^{\infty} \frac{x^2}{(\gamma_h^2 + x^2)^2} \geq 0 \quad (2.9)$$

Здесь γ_h — собственные значения некоторой краевой задачи для некоторой собственной функции.

Для вывода оценки (2.9) вводится обозначение

$$f(x) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{\gamma_h^2 - x^2}{(\gamma_h^2 + x^2)^2} \quad (2.10)$$

Показывается, что для случаев $\gamma_h = \lambda_h = k\pi/l$ ($k=1, 2, \dots$; $k=1, 3, \dots$; $k=2, 4, \dots$) и $\gamma_h = \mu_h R$, где $J_1(\mu_h R) = 0$, функция $f(x)$ всегда больше нуля, при этом $f(0) = \sum (1/\gamma_h^2)$, $f(\infty) = 0$ и $f'(x) < 0$, т. е. для указанных случаев оценка (2.9) справедлива.

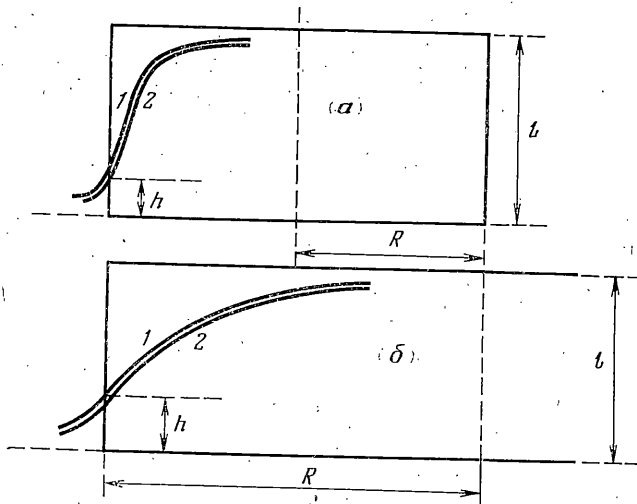
Тогда для сумм модулей коэффициентов бесконечных систем (2.6) будем иметь следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} |a_{mh}^{(1)}| &< \frac{8\mu_m \operatorname{sh} \mu_m l \operatorname{cth}^{1/2} \mu_m l}{l(\operatorname{sh} \mu_m l + \mu_m l)} \left[\nu \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_h^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} + \right. \\ &+ (1-\nu) \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\mu^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} \left. \right] < \frac{8\mu_m \operatorname{sh} \mu_m l \operatorname{cth}^{1/2} \mu_m l}{l(\operatorname{sh} \mu_m l + \mu_m l)} \sum_{h=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_h^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} = 1 \\ \sum_{h=2,4,\dots}^{\infty} |a_{mh}^{(2)}| &< \frac{8\mu_m \operatorname{sh} \mu_m l \operatorname{th}^{1/2} \mu_m l}{l(\operatorname{sh} \mu_m l - \mu_m l)} \left[\nu \sum_{h=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\lambda_h^2}{(\lambda_h^2 + \mu_m^2)^2} + \right. \end{aligned}$$

$$+(1-\nu) \sum_{k=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{(\lambda_k^2 + \mu_k^2)^2} \Big] < 1 \quad (2.11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_{mk}^{(1)}| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_{mk}^{(2)}| < \frac{4}{R^2 \Delta_m} \left[\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \mu_k^2)^2} + \right. \\ \left. + (1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{(\lambda_m^2 + \mu_k^2)^2} \right] < \frac{4}{R^2 \Delta_m} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2}{(\mu_k^2 + \lambda_m^2)^2} < 1$$

Из оценок (2.11) следует, что системы (2.6) регулярны.



Фиг. 2

3. В численном примере решаются укороченные бесконечные системы из 60 уравнений для двух значений коэффициентов Пуассона ($\nu=0,28$ и $\nu=0,42$) и для двух значений отношения $\beta=R/l$ ($\beta=1$ и $\beta=2$). Значения найденных неизвестных коэффициентов систем (2.6) приводятся в табл. 1 ($\nu=0,28$) и 2 ($\nu=0,42$). Первые столбцы соответствуют $\beta=1$, а вторые — $\beta=2$

$$(X_k^\circ = X_k / (2\rho g l), \quad Y_k^\circ = Y_k / (2\rho g l), \quad Z_k^\circ = Z_k / (2\rho g l))$$

Контактные напряжения определяются в различных точках осевого сечения цилиндра на закрепленной части боковой поверхности. При этом напряжения не вычисляются в крайних точках закрепленной части осевого сечения цилиндра, где они бесконечно велики и из-за слабой сходимости рядов по имеющимся коэффициентам табл. 1 и 2 определяются недостаточно точно. В непосредственной близости к этим точкам на очень малых участках напряжения бесконечно много раз меняют свои знаки. Это явление впервые было обнаружено в [9]. Но поскольку вблизи угловых точек в действительности возникают области с остаточными деформациями, то можно допустить несоблюдение постоянства знака напряжений на боковой поверхности вблизи угловых точек.

Численные значения для контактных напряжений $\sigma_r(R, z) = 2\rho g l \sigma(z)$ и $\tau_{rz}(R, z) = 2\rho g l \tau(z)$ приводятся в табл. 3, соответственно, при $\nu=0,28$ и $\nu=0,42$ (через σ_1 и τ_1 обозначены напряжения в случае $\beta=1$, а через σ_2 и τ_2 — в случае $\beta=2$).

Вычисления показывают, что для цилиндров, закрепленных по боковой поверхности и находящихся под действием только собственного веса, контактное давление возникает на нижней части боковой поверхности, имеющей высоту $h \approx 0,2l$ при $\beta=1$ (фиг. 2, а) и $h \approx 0,3l$ при $\beta=2$ (фиг. 2, б). На верхней же части закрепленной поверхности контактные нормальные напряжения растягивающие (кривые 1 и 2 соответственно $\nu=0,28$ и $\nu=0,42$)¹.

Вычисления, показывающие искривления торцов $z=0$ и $z=l$ и провисание цилиндра под действием собственного веса, приводятся в табл. 4 ($\xi_{\beta i} = G u_z(r, 0) / (\rho g l^2)$, $\xi_{\beta i} = G u_z(r, l) / (\rho g l^2)$, $i=1$ соответствует $\nu=0,28$, а $i=2 - \nu=0,42$).

¹ Вычисления выполнены на ЭВМ сотрудником Института механики АН АрмССР В. Н. Минасяном, которому автор очень благодарен.

Таблица 1

k	X°_k		Y°_k		Z°_k	
1	0,67950	0,67859	0,96557	1,57190	0,67118	0,65781
2	0,66988	0,67972	0,80411	0,99826	-0,66942	-0,61690
3	0,66215	0,67737	0,75286	0,86819	0,63859	0,59973
4	0,65642	0,67415	0,72535	0,81549	-0,62317	-0,55679
5	0,65204	0,67154	0,70791	0,78660	0,61046	0,55496
6	0,64878	0,66966	0,69598	0,76781	-0,59286	-0,51987
7	0,64655	0,66828	0,68753	0,75442	0,58564	0,52430
8	0,64528	0,66725	0,68155	0,74435	-0,56842	-0,49672
9	0,64692	0,66645	0,67744	0,73649	0,56413	0,50524
10	0,64542	0,66583	0,67484	0,73021	-0,54817	-0,48352
11	0,64670	0,66537	0,67348	0,72509	0,54599	0,49438
12	0,64871	0,66504	0,67318	0,72087	-0,53158	-0,47685
13	0,65136	0,66485	0,67378	0,71735	0,53115	0,48879
14	0,65457	0,66478	0,67516	0,71441	-0,51832	-0,47423
15	0,65828	0,66485	0,67720	0,71195	0,51925	0,48642
16	0,66241	0,66505	0,67980	0,70990	-0,50789	-0,47398
17	0,66688	0,66539	0,68288	0,70821	0,50993	0,48598
18	0,67163	0,66586	0,68635	0,70684	-0,49993	-0,47505
19	0,67661	0,66647	0,69015	0,70577	0,50280	0,48659
20	0,68176	0,66721	0,69421	0,70495	-0,49395	-0,47686

Таблица 2

k	X°_k		Y°_k		Z°_k	
1	0,82280	0,82195	1,09496	1,68380	0,81383	0,79912
2	0,80068	0,81842	0,92871	1,11182	-0,79166	-0,70015
3	0,78181	0,80915	0,87058	0,98300	0,76927	0,72270
4	0,76641	0,79912	0,83572	0,93050	-0,73373	-0,63944
5	0,75331	0,79053	0,81107	0,90071	0,73349	0,66882
6	0,74206	0,78334	0,79224	0,88020	-0,69877	-0,60415
7	0,73246	0,77711	0,77725	0,86454	0,70382	0,63595
8	0,72440	0,77155	0,76510	0,85184	-0,67192	-0,58562
9	0,71778	0,76647	0,75521	0,84117	0,67944	0,61923
10	0,71252	0,76176	0,74721	0,83195	-0,65073	-0,57928
11	0,70852	0,75737	0,74084	0,82384	0,66002	0,61329
12	0,70568	0,75327	0,73588	0,81659	-0,63443	-0,58053
13	0,70391	0,74944	0,73218	0,81005	0,64522	0,61375
14	0,70308	0,74587	0,72959	0,80412	-0,62249	-0,58605
15	0,70311	0,74255	0,72797	0,79870	0,63435	0,61771
16	0,70388	0,73948	0,72722	0,79374	-0,61445	-0,59365
17	0,70531	0,73666	0,72720	0,78920	0,62684	0,62347
18	0,70729	0,73410	0,72784	0,78505	-0,60888	-0,60199
19	0,70974	0,73178	0,72904	0,78125	0,62208	0,62985
20	0,71260	0,72971	0,73071	0,77779	-0,60602	-0,61049

Таблица 3

z/l	σ_1	τ_1	σ_2	τ_2	σ_1	τ_1	σ_2	τ_2
0,1	-0,168	-0,147	-0,907	-0,385	-0,139	-0,158	-0,826	-0,397
0,2	0,028	-0,122	-0,338	-0,379	0,062	-0,139	-0,248	-0,416
0,3	0,154	-0,107	0,057	-0,372	0,198	-0,126	0,164	-0,420
0,4	0,267	-0,101	0,407	-0,369	0,322	-0,119	0,539	-0,422
0,5	0,352	-0,101	0,771	-0,373	0,459	-0,120	1,419	-0,428
0,6	0,555	-0,109	1,208	-0,386	0,646	-0,130	0,936	-0,443
0,7	0,809	-0,128	1,823	-0,418	0,931	-0,153	2,103	-0,475
0,8	1,289	-0,174	2,899	-0,507	1,471	-0,207	3,307	-0,566
0,9	2,650	-0,376	5,944	-0,904	2,992	-0,435	6,753	-0,962

Таблица 4

r/R	κ_1^1	κ_2^1	κ_1^2	κ_2^2	ξ_1^1	ξ_2^1	ξ_1^2	ξ_2^2
0	-0,32	-2,07	-0,28	-1,74	-0,28	-1,48	-0,27	-1,18
0,1	-0,32	-2,04	-0,28	-1,71	-0,30	-1,50	-0,27	-1,19
0,2	-0,31	-1,94	-0,27	-1,63	-0,29	-1,47	-0,26	-1,17
0,3	-0,29	-1,79	-0,25	-1,51	-0,27	-1,41	-0,25	-1,14
0,4	-0,26	-1,59	-0,23	-1,34	-0,25	-1,32	-0,23	-1,10
0,5	-0,23	-1,35	-0,21	-1,14	-0,22	-1,21	-0,21	-1,04
0,6	-0,20	-1,08	-0,18	-0,92	-0,19	-1,07	-0,18	-0,96
0,7	-0,15	-0,82	-0,14	-0,69	-0,15	-0,89	-0,14	-0,85
0,8	-0,11	-0,58	-0,10	-0,50	-0,10	-0,66	-0,10	-0,69
0,9	-0,06	-0,40	-0,06	-0,36	-0,05	-0,31	-0,05	-0,41

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки круглого сечения. — Изв. АН СССР. ОТН, 1938, № 7, с. 69–76.
2. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. — Докл. АН АрмССР, 1954, т. 19, № 1, с. 3–12.
3. Валов Г. М. Осесимметричная задача о сжатии упругого цилиндра, покоящегося на гладком жестком основании. — Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 6, с. 151–154.
4. Валов Г. М. Об осесимметричной деформации сплошного круглого цилиндра конечной длины. — ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 650–667.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жесткозакрепленной плиты. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 5, с. 125–142.
6. Баблюян А. А., Тоноян В. С. Изгиб двухслойной толстой круглой плиты осесимметричной нагрузкой. — Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 1, с. 13–32.
7. Гринченко В. Т., Карнаухов В. Г., Сенченков И. К. Напряженно-деформированное состояние и разогрев вязкоупругого цилиндра с ограничениями по торцам. — Прикл. механика, 1975, т. 11, вып. 4, с. 27–36.
8. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
9. Абрамов В. М. Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. — Докл. АН СССР, 1937, т. 17, № 4, с. 173–178.

Ереван

Поступила в редакцию
29.IV.1981