МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1983

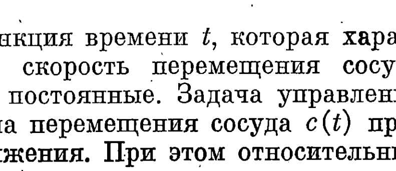
УДК 532.5+62–50

О КИНЕМАТИЧЕСКОМ УПРАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЕМ СОСУДА С ИДЕАЛЬНОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

АКУЛЕНКО Л. Д.

Исследуется плоская задача об управлении движением прямоугольного жесткого сосуда, содержащего идеальную тяжелую жидкость со свободной поверхностью. Относительное движение жидкости описывается в рамках линейной модели бесконечно малых волн [1–4]. Требуется, чтобы в конце процесса управления сосуд совершал заданные движения, а относительные колебания жидкости отсутствовали. Получены приближенные решения, приводящие к простым законам управления. Задача может представить интерес при управлении движением таких технических объектов как танкеры, цистерны и др. Исследование динамики тел, содержащих полости с жидкостью, имеющей свободную поверхность, проводилось в [1, 4] и других работах. Задачи управления, в том числе оптимального, для механических систем, содержащих распределенные колебательные звенья, при помощи распределенных и сосредоточенных управляющих воздействий кинематического и силового типа рассматривались в ряде работ [5–7].

1. Постановка задачи управления. Рассматривается плоская задача об управляемом движении прямоугольного абсолютно жесткого сосуда, содержащего идеальную тяжелую жидкость (фиг. 1). Сосуд может перемещаться вдоль горизонтальной оси Ox. Для описания движения системы используется линейная модель бесконечно малых волн, теория которой изложена в [1–3]. Вводится неподвижная система координат Oxy и подвижная $O'xy$, связанная, для определенности, с левой стенкой сосуда. Величина s — расстояние OO', a — длина сосуда, h — высота столба жидкости, ρ — плотность, g — ускорение сил тяжести, $c=c(t)$ — функция времени t, которая характеризует управляемую кинематически скорость перемещения сосуда ($s^{\boldsymbol{\cdot}}=c$). Параметры системы a, h, ρ, g — постоянные. Задача управления заключается в том, чтобы выбором закона перемещения сосуда $c(t)$ привести систему в состояние заданного движения. При этом относительные волновые движения жидкости должны отсутствовать.



Фиг. 1

Вводится потенциал $\varphi(t, x, y)$ относительных скоростей частиц жидкости и выписываются соотношения, определяющие движение жидкости в подвижной системе $O'xy$. Краевые условия на стенках сосуда и свободной поверхности имеют вид [1]

$$\varphi_x'|_{x=0}=\varphi_x'|_{x=a}=\varphi_y'|_{y=0}=0, \qquad \varphi_x'\equiv\partial\varphi/\partial x, \qquad \varphi_y'\equiv\partial\varphi/\partial y \tag{1.1}$$

$$(\varphi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}+g\varphi_y')|_{y=h}=xc^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}(t), \qquad \varphi^{\boldsymbol{\cdot}}\equiv\partial\varphi/\partial t, \quad \varphi^{\boldsymbol{\cdot\cdot}}\equiv\partial^2\varphi/\partial t^2 \tag{1.2}$$

Условия (1.1) следуют из требований обтекания стенок и дна сосуда, а специфическое приближенное условие (1.2) характеризует постоянство давления на свободной поверхности жидкости. Уравнение состояния эллиптического типа

$$\varphi_{x^2}''+\varphi_{y^2}''=0 \tag{1.3}$$

задает гармоническую по x, y функцию $\varphi(t, x, y)$, зависящую от времени t, как от параметра. Соотношения (1.1)—(1.3) с дополнительными начальными условиями и требованиями гладкости на $c(t)$, обсуждаемыми ниже, определяют движение жидкости в сосуде.

Движение стенок сосуда (точки O') в системе Oxy описывается кинематическими уравнениями с известными начальными условиями

$$s^{\cdot}=c, \quad c^{\cdot}=w, \quad w^{\cdot}=\gamma \quad (\gamma=c^{\cdot\cdot}) \tag{1.4}$$

$$s(0)=c^{\circ}, \quad c(0)=c^{\circ}, \quad w(0)=w^{\circ} \tag{1.5}$$

Предполагается, что до момента времени $t=0$ жидкость покоится в системе $O'xy$, т. е.

$$\varphi(0, x, y)=\text{const} \quad (\varphi(t, x, y)=\varphi_0(t), \quad t\leqslant 0) \tag{1.6}$$

Условие (1.6) означает, что распределение относительных скоростей $v_{x,y}=-\varphi_{x,y}'$ и ускорений $w_{x,y}=v_{x,y}^{\cdot}$ частиц жидкости нулевое. Ненулевые начальные условия могут сводиться к начальному импульсивному давлению $I(x)$, приложенному в точках поверхности жидкости, а также к отклонению $G(x)$ последней от равновесного состояния [1]

$$\rho\varphi(0,x,h)=I(x), \quad -\frac{c^{\cdot}(0)}{g}x+\frac{1}{g}\varphi^{\cdot}(0,x,h)=G(x), \quad \int_0^a G(x)\,dx=0 \tag{1.7}$$

Общий случай возмущенного в начальный момент относительного движения жидкости значительно усложняет построение функции φ.

Для уравнения поверхности жидкости согласно [1] имеет место приближенное выражение

$$\eta(t,x)=h-\frac{c^{\cdot}(t)}{g}x+\frac{1}{g}\varphi^{\cdot}(t,x,h) \quad (0\leqslant x\leqslant a)$$

которое совместно с равенствами $\eta^{\cdot}(t, x)=v_y(t, x, h)=-\varphi_y'(t, x, h)$ приводит к соотношению (1.2).

Ставится следующая задача управления движением описанной выше системы. Выбором управляющей функции $\gamma=\gamma(t)$ из некоторого класса Γ, уточняемого ниже, перевести систему (1.1)—(1.4) из начального состояния (1.5), (1.6) в заданное конечное состояние к некоторому моменту времени $t=T<\infty$. Как отмечалось, конечным условием является отсутствие относительных движений

$$\varphi(T, x, y)=\text{const} \quad (\varphi(t, x, y)=\varphi_T(t),\ t\geqslant T) \tag{1.8}$$

Рассматриваются следующие основные состояния движения сосуда с жидкостью, как целого.

1. Переместить сосуд в заданную точку оси Ox с заданными скоростью и ускорением; конечные условия для левой стенки имеют вид

$$s(T)=s^*, \quad c(T)=c^*, \quad w(T)=w^* \tag{1.9}$$

В частности, при $c^*=w^*=0$ система будет покоиться.

2. Привести сосуд с жидкостью в состояние движения с заданными скоростью и ускорением (без учета $s(T)$)

$$c(T)=c^*, \quad w(T)=w^* \tag{1.10}$$

В частности, при $w^*=0$ система, как целое, должна двигаться с постоянной скоростью $c(t)=c^*$ для $t\geqslant T$.

3. Аналогично ставится задача о приведении системы в состояние равноускоренного движения (без учета $s(T)$, $c(T)$)

$$w(T)=w^* \tag{1.11}$$

Потенциал $\varphi(t, x, y)$ относительных скоростей $(v_{x,y}=-\varphi_{x,y})$ должен удовлетворять условию (1.8). Для $t\geqslant T$ при $\gamma\equiv 0$ система (1.1)–(1.4) допускает стационарные решения указанного выше вида.

Время T окончания процесса управления в приведенных постановках заранее не фиксируется. Его величина, как и функция γ, могут выбираться из некоторых дополнительных условий, например оптимальности и др.

Известно [5–7], что в общем случае величина T должна быть достаточно большой. Это обстоятельство связано с конечной скоростью распространения волновых процессов в сплошных средах. В рассматриваемой задаче указанное свойство усугубляется дисперсией прогрессивных волн вдоль оси $O'x$: фазовая скорость n-й моды убывает как $n^{-1/2}$ при достаточно больших n [1–3]. Приведенные соображения указывают на то, что точное решение задачи управления может потребовать неограниченного интервала времени. Однако величина T не должна быть слишком большой, так как линейная модель волновых процессов идеальной жидкости, полученная отбрасыванием нелинейных и других малых возмущающих членов, может привести к большим погрешностям описания движения в реальных условиях.

Проблема существования точных решений поставленных задач управления, в том числе оптимальных по некоторым критериям качества, остается открытой. Она сводится к рассматриваемой ниже проблеме моментов [5, 7–9].

2. Решение краевой задачи. Решение краевой задачи (1.1)–(1.11) строится методом разделения переменных [1]

$$\varphi(t,x,y)=\Theta_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}\Theta_n(t)X_n(x)Y_n(y)\quad(0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant h) \tag{2.1}$$

$$X_n(x)=\cos\pi n(x/a),\qquad Y_n(y)=\operatorname{ch}\pi n(y/a)\quad(n=1,2,\ldots) \tag{2.2}$$

Система функций Θ_0, Θ_n строится на основе уравнения (1.2). Вначале x представляется рядом по функциям X_n (2.2) на отрезке $x\in[0, a]$ и подставляется вместе с выражением (2.1) для φ в соотношение (1.2). Приравниванием коэффициентов при X_n получается для неизвестных функций $\Theta_0(t)$, $\Theta_n(t)$ бесконечная система

$$\Theta_0^{\cdot\cdot}={}^1/_2 a\gamma,\qquad \Theta_0(0)=\varphi_0(0),\qquad \Theta_0^{\cdot}(0)=\varphi_0^{\cdot}(0) \tag{2.3}$$

$$\Theta_n^{\cdot\cdot}+\omega_n^2\Theta_n=\alpha_n\gamma,\qquad \Theta_n(0)=\Theta_n^{\cdot}(0)=0\quad(n=1,2,\ldots)$$

$$\omega_n^2=\pi n\frac{g}{a}\operatorname{th}nr,\qquad r=\pi\frac{h}{a},\qquad \alpha_n=-\frac{2}{\pi^2n^2}[1-(-1)^n]\frac{a}{\operatorname{ch}nr}$$

Из соотношений (2.3) следует, что функции Θ_n с четными индексами $n=2k$, $k=1, 2,\ldots$ равны нулю тождественно, так как $\alpha_{2k}=0$. Для нечетных значений $n=2k-1$ получаются выражения

$$\Theta_n(t)=\frac{\alpha_n}{\omega_n}\int_0^t\sin\omega_n(t-\tau)\gamma(\tau)\,d\tau,\qquad \Theta_n^{\cdot}=\frac{d\Theta_n}{dt} \tag{2.4}$$

Таким образом, при заданной достаточно гладкой функции $\gamma(t)$, $t\in[0, T]$ решение краевой задачи (1.1)–(1.3), (1.6) полностью построено в виде (2.1)–(2.4). Решение задачи Коши (1.4), (1.5) проводится элементарным интегрированием по t. Для решения задачи управления (с учетом конечных условий (1.8)—(1.11)) требуется найти функцию $\gamma \in \Gamma$, такую, чтобы ряды для функции φ (2.1) и ее производных $\varphi'_{x,y}(t, x, y)$, $\dot{\varphi}'_{x,y}(t, x, y)$ были равномерно сходящимися для всех $t \in [0, T]$, $x \in [0, a]$, $y \in [0, h]$ и, кроме того, выполнялись конечные соотношения для $\varphi(T, x, y)$, т. е.

$$\Theta_n(T)=0, \quad \Theta_n^{\cdot}(T)=0, \quad n=2k-1, \quad k=1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

а также для левой стенки сосуда (точки O'). Последние согласно (1.4), (1.5), (1.9)—(1.11) имеют следующий вид.

1) В задаче с условиями (1.9) требуется найти управление $\gamma=\gamma_s(t) \in \Gamma$, такое, чтобы

$$\begin{gathered}\int_0^T (T-\tau)^2 \gamma_s(\tau)\, d\tau = s^* - s^\circ - c^\circ T - {}^1/_2 w^\circ T^2 \\ \int_0^T (T-\tau)\gamma_s(\tau)\, d\tau = c^* - c^\circ - w^\circ T, \quad \int_0^T \gamma_s(\tau)\, d\tau = w^* - w^\circ\end{gathered} \tag{2.6}$$

2) В задаче с условиями (1.10) функция $\gamma=\gamma_c(t)$ помимо (2.5) должна удовлетворять соотношениям

$$\int_0^T (T-\tau)\gamma_c(\tau)\, d\tau = c^* - c^\circ - w^\circ T, \quad \int_0^T \gamma_c(\tau)\, d\tau = w^* - w^\circ \tag{2.7}$$

3) Для задачи равноускоренного движения согласно (1.11) требуется найти такое управление $\gamma=\gamma_w(t)$, чтобы

$$\int_0^T \gamma_w(\tau)\, d\tau = w^* - w^\circ \tag{2.8}$$

Выписанные соотношения (2.4)—(2.8) определяют бесконечномерную проблему моментов [5, 8]. Обычно помимо указанных выше условий на управление налагаются дополнительные требования: оптимальности по некоторым критериям качества, ограничения на $\gamma(t)$, фазовые координаты и др. [5, 7, 9, 10]. Как отмечалось, построение точного решения задачи управления для любой из постановок (2.6)—(2.8) не представляется возможным. Поэтому важное значение приобретает развитие приближенных методов решения задачи управления как численных (Бубнова — Галеркина, конечных элементов и др.), так и аналитических (методы теории возмущений, основанные на выделении малых параметров). Ниже применяется приближенный способ решения, основанный на замене бесконечной системы конечно-мерной [11] с последующими оценками погрешностей для исходной задачи управления. Следует отметить, что точные аналитические решения задач управления, в том числе оптимального по интегральному квадратичному функционалу, удается построить в явном виде для однородных распределенных колебательных систем, описываемых гиперболическими уравнениями с распределенными или сосредоточенными управляющими воздействиями (для механических моделей типа струны [5], упругого бруса или вала [6, 7] и др.).

Далее задача построения приближенного управления решается для двух случаев:

1°. Широкий сосуд [1] (или случай «мелкой воды»), когда высота столба жидкости h мала по сравнению с длиной сосуда a, т. е. $r=\pi h/a \ll 1$.

2°. Медленный процесс, когда время процесса T много больше периода колебаний T_1 низшей частоты ω_1: $T \gg T_1 = 2\pi/\omega_1$ (величина ω_1 определена в (2.3)).

Рассматриваемая система допускает введение безразмерных переменных на основе единицы длины a и времени $(a/g)^{1/2}$, что позволяет избавиться от параметров a и g и считать их равными единице. Тогда в указанных случаях безразмерные величины h и T^{-1} — малые параметры.

3. Приближенные решения задач управления. 1°. В случае $r \ll 1$ строится управление движением конечно-мерной колебательной системы большой размерности $N \gg 1$, для которой предполагаются выполненными соотношения

$$\operatorname{th} Nr \approx Nr \qquad (N = r^{-\lambda}, \quad 0 < \lambda < 1) \tag{3.1}$$

Требуется определить управление $\gamma_{s,c,w}(t)$ для вспомогательной задачи, описываемой уравнениями (1.4), (1.5) и $(N+1)$-м уравнением (2.3), (2.5) с заменами Θ_n на θ_n и ω_n^2 на $\pi^2 n^2 h$

$$\theta_n^{\cdot\cdot} + \nu^2 n^2 \theta_n = \alpha_n \gamma, \qquad \nu^2 = \pi^2 h \ll 1 \tag{3.2}$$

$$\theta_n(0) = \theta_n^{\cdot}(0) = \theta_n(T) = \theta_n^{\cdot}(T) = 0 \qquad (n = 1, 3, \ldots, N)$$

В качестве допустимых управлений достаточно взять класс кусочно-непрерывных ограниченных функций $\gamma(t)$ [1]]. Представляют прикладной интерес задачи управления, для которых критерий качества и ограничение на $\gamma(t)$ имеют вид

$$T \to \min_\gamma, \qquad |\gamma| \leqslant \gamma_0, \qquad \gamma_0 = \text{const} > 0 \tag{3.3}$$

Известно [10, 11], что система (1.4), (3.2) управляема, а соответствующее (3.3) управление $\gamma(t)$ — релейная функция. Число и положение точек переключения зависят от параметров задачи. Аналитическое решение вспомогательных задач оптимального быстродействия приводит к большим трудностям [11]. Возможно построение численного решения для конкретных значений параметров задачи. Однако практического смысла точное решение для рассматриваемой приближенной системы (3.2) не имеет. Представляется важным определение приближенных квазиоптимальных управлений в классе релейных функций времени, имеющих небольшое число точек переключения [11].

Обобщением приема [6] удается построить допустимые управления, обеспечивающие удовлетворение конечных условий (2.6)—(2.8) и (3.2) за время T, кратное периоду $T_0 = 2\pi/\nu$ наинизшей моды $n=1$

$$T = T_{s,c} = 4m_{s,c} T_0, \qquad m_{s,c} = 1, 2, \ldots \tag{3.4}$$

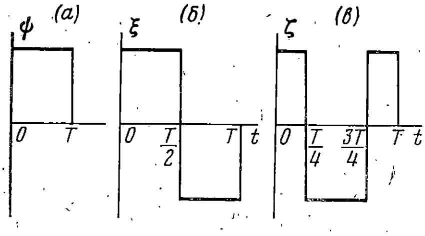
$$T = T_w = 2m_w T_0, \qquad m_w = 1, 2, \ldots$$

Здесь числа $m_{s,c,w}$ определяются параметрами задачи γ_0, T_0 и $s^{\circ,*}$, $c^{\circ,*}$, $w^{\circ,*}$, независимо от размерности N. Если величина ограничения γ_0 достаточно велика, то задачи управления могут быть решены при минимальном $m=1$. И, наоборот, при малом γ_0 значения m, а вместе с ними и T должны быть достаточно большими (см. ниже).

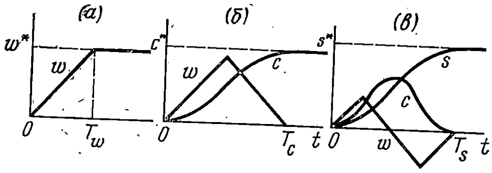
Допустимые управления $\gamma_{s,c,w}(t)$ строятся при помощи вспомогательных функций ψ, ξ, ζ (фиг. 2), которые могут быть последовательно выражены на основе единичной функции $\chi(t)$ — функции Хевисайда: $\chi(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 0$. Следует отметить, что ψ, ξ, ζ — первые три функции системы функций Уолша [12] — полной ортонормированной системы на отрезке $t \in [0, T]$. Их выражения выписываются ниже.

Методически целесообразнее начать построение управлений $\gamma(t)$ для задачи 3) с условиями (2.8), (3.2). В качестве допустимого можно взять управляющую функцию γ_w вида (фиг. 2, a)

$$\gamma_w(t) = \Gamma_\psi^w \psi(t, T_w), \qquad \psi(t, T) = \chi(t) - \chi(t - T) \tag{3.5}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь Γ_ψ^w — амплитудное значение, выбираемое из условия (3.3): $|\Gamma_\psi^w|\leqslant\gamma_0$. Подстановка (3.5) в (2.8) при $T=T_w$ из (3.4) приводит к искомым выражениям

$$\gamma_w(t)=(w^*-w^\circ)T_w^{-1}\psi(t,\ T_w),\qquad \Gamma_\psi^w=(w^*-w^\circ)T_w^{-1} \tag{3.6}$$

Ограничение (3.3) будет удовлетворено, если целое число m_w в (3.4) взять достаточно большим: $m_w\geqslant|w^*-w^\circ|(T_0\gamma_0)^{-1}$. Конечные условия (3.2) для θ_n, $\dot\theta_n$, как следует из (2.4), выполняются автоматически при любом Γ_ψ^w. На фиг. 3, *а* схематически представлено изменение ускорения $w(t)$, соответствующее $w^\circ=0$.

Для задачи 2) с условиями (2.7), (3.2) допустимое управление $\gamma_c(t)$ строится в виде линейной комбинации функций ψ и ξ

$$\gamma_c(t)=\Gamma_\psi^c\psi(t,\ T_c)+\Gamma_\xi^c\xi(t,\ T_c),\qquad \xi(t,\ T)=\chi(t)-2\chi(t-{}^1/_2T)+\chi(t-T) \tag{3.7}$$

Здесь неизвестные параметры Γ_ψ^c, Γ_ξ^c выбираются из условий (2.7); конечные условия (3.2) согласно (2.4) будут удовлетворены, как и выше, автоматически при $T_c=4m_cT_0$, $m_c=1,\ 2,\ldots$. Вначале из условия для ускорения находится сразу Γ_ψ^c, так как интегрирование функции ξ дает нуль, а затем из соотношения для скорости — величина Γ_ξ^c

$$\begin{gathered}\gamma_c(t)=(w^*-w^\circ)T_c^{-1}\psi(t,\ T_c)+4[(c^*-c^\circ)T_c^{-2}-{}^1/_2w^\circ T_c^{-1}]\xi(t,\ T_c)\\ \Gamma_\psi^c=(w^*-w^\circ)T_c^{-1},\qquad \Gamma_\xi^c=4(c^*-c^\circ)T_c^{-2}-2w^\circ T_c^{-1}\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что выбором достаточно большого целого m_c можно удовлетворить ограничению (3.3): $|\gamma_c|\leqslant\gamma_0$. Подстановка найденного значения m_c в (3.8) позволяет получить искомое управление $\gamma_c(t)$. На рис. 3, *б* схематически приводятся функции $c(t)$ и $w(t)$, отвечающие управлению $\gamma_c(t)$ при $c^\circ=w^\circ=w^*=0$; это задача «разгона» из состояния покоя до заданной скорости $c(t)=c^*$ поступательного перемещения системы как целого.

Для задачи 1) с условиями (2.6), (3.2) допустимое управление $\gamma_s(t)$ конструируется на основе вспомогательных функций ψ, ξ, ζ (фиг. 2)

$$\begin{gathered}\gamma_s(t)=\Gamma_\psi^s\psi(t,\ T_s)+\Gamma_\xi^s\xi(t,\ T_s)+\Gamma_\zeta^s\zeta(t,\ T_s)\\ \zeta(t,\ T)=\chi(t)-2\chi(t-T/4)+2\chi(t-3T/4)-\chi(t-T)\end{gathered} \tag{3.9}$$

Постоянные $\Gamma_{\psi;\xi,\zeta}^s$ находятся из условий (2.6)

$$\begin{gathered}\Gamma_\psi^s=(w^*-w^\circ)T_s^{-1},\qquad \Gamma_\xi^s=4(c^*-c^\circ)T_s^{-2}-2w^\circ T_s^{-1}\\ \Gamma_\zeta^s=-(16/3)\Gamma_\psi^s-4\Gamma_\xi^s+16(s^*-s^\circ)T_s^{-3}-16c^\circ T_s^{-2}-8w^\circ T_s^{-1}\end{gathered} \tag{3.10}$$

Из (3.4), (3.9), (3.10) следует, что выбором достаточно большого $m_s=1,\ 2,\ldots$ амплитуду $\gamma_s(t)$, $t\in[0,\ T_s]$ можно аналогично изложенному выше сделать достаточно малой: ограничение (3.3) будет удовлетворено. На фиг. 3, *в* условно приведено решение задачи о перемещении колебательной системы (1.4), (3.2) из состояния покоя $s^\circ=c^\circ=w^\circ=0$ в заданное положение с гашением относительных колебаний и $c^*=w^*=0$. Управление $\gamma_s(t)$ при этом с точностью до множителя $16s^*T_s^{-3}$ совпадает с функцией $\zeta(t,\ T_s)$.

Таким образом, допустимые управления $\gamma_{s,c,w}(t)$ для вспомогательной системы (1.4), (3.2) построены и имеют простой вид кусочно-постоянных функций времени с небольшим числом точек переключения, не зависящим от порядка аппроксимирующей системы. Изложенная выше процедура не применима в случае ненулевых условий (1.7). Далее найденные выражения $\gamma_{s,c,w}(t)$ подставляются в исходные задачи управления (см. п. 2). Условия (2.6)—(2.8), налагаемые на движение левой стенки сосуда (точки O'), будут удовлетворены точно, а условия (2.5), согласно формулам (2.3), (2.4), — с некоторой погрешностью. В силу быстрого убывания членов ряда (2.1) (при $n\to\infty$) выбором достаточно малого r и большого N можно добиться, чтобы при $t\geqslant T$ величины $|\varphi-\varphi_{(N)}|$, $|v_{x,y}|$, $|w_{x,y}|$ были сколь угодно малыми для всех $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant h$. Эти обстоятельства гарантируют малость амплитуд волновых колебаний жидкости относительно стенок сосуда после окончания процесса управления. Действительно, оценки указанных величин содержат соответственно множители $N^{-3}r$, $N^{-2}r^{-1}$, $N^{-3/2}r^{-1}$ и, кроме того, согласно (3.1) $Nr\ll 1$. Чтобы величины этих коэффициентов были малыми, параметр λ должен удовлетворять неравенствам $1>\lambda>{}^2/_3$.

2°. Ставится задача оптимального управления движением сосуда с идеальной жидкостью, описываемым исходными соотношениями (1.4), (2.3), на фиксированном достаточно большом интервале времени. Критерий качества и ограничения принимаются в виде

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T\gamma^2dt\to\min\nolimits_\gamma\quad(|\gamma|<\infty)\tag{3.11}$$

Интегральный квадратичный функционал (3.11) не имеет явного механического смысла, однако позволяет ограничить величину $|\gamma(t)|$ — исключить обобщенные управления типа δ-функции Дирака.

Для задачи (2.3), (3.11) применение принципа максимума [10] приводит к бесконечной алгебраической системе (проблеме моментов [5, 8]) вида

$$\begin{gathered}\Theta_n(T)=\frac{\alpha_n}{\omega_n}\int_0^T\sin\omega_n(T-t)\gamma(t)\,dt=0,\quad \Theta_n^{\boldsymbol\cdot}(T)=0\quad(n=1,2\ldots)\\ \gamma(t)=A_st^2+A_ct+A_w+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(A_k\sin\omega_kt+B_k\cos\omega_kt)\end{gathered}\tag{3.12}$$

Выражения для $\Theta_n^{\boldsymbol\cdot}(T)$ в (3.12) получаются дифференцированием $\Theta_n(T)$ по T. Неизвестные коэффициенты $A_{s,c,w}$, A_n, B_n подлежат определению из конечных условий (2.6)—(2.8), (3.12) и некоторых дополнительных. Если A_n и B_n определены как линейные функции параметров A_s, A_c, A_w из системы (3.12), то эти последние должны удовлетворять линейным уравнениям (2.6)—(2.8) и условиям трансверсальности для соответствующих сопряженных переменных p_s, p_c, p_w

$$p_w=A_st^2+A_ct+A_w,\qquad p_c=-p_w^{\boldsymbol\cdot},\quad -p_s=p_c^{\boldsymbol\cdot}=-2A_s\tag{3.13}$$

В случае конечных условий (2.6) для определения неизвестных $A_{s,c,w}$ получаются три линейных уравнения. Для условий (2.7) из соотношения трансверсальности $p_s(T)=0$ согласно (3.13) находится $A_s=0$; дальнейшему определению подлежат коэффициенты $A_{c,w}$. Если же зафиксировано конечное значение только ускорения согласно (2.8), то из условий трансверсальности $p_s(T)=p_c(T)=0$ следует, что $A_s=A_c=0$; требуется найти лишь один параметр A_w. Возможна процедура решения в другом порядке.

Проблема моментов (2.6)—(2.8), (3.12) исследуется приближенно. Рассматривается случай больших значений T: $T\gg 2\pi/\omega_1$, см. (2.3). Тогда в первом приближении полагаются $A_n=B_n=0$, а постоянные $A_{s,c,w}$ определяются согласно изложенному выше. В частности, для задачи 1 о перемещении системы в заданное положение при значениях $c^{\circ,*}=w^{\circ,*}=0$ из (2.6) получается выражение

$$\gamma_s(t)=60(s^*-s^\circ)T^{-3}(6\tau^2-6\tau+1), \qquad \tau=t/T, \quad \tau\in[0,\ 1] \qquad (3.14)$$

Аналогично в задаче 2 о разгоне до заданной скорости из условий $A_s=0$ и (2.7) при $w^{\circ,*}=0$ получается искомое управление первого приближения в виде

$$\gamma_c(t)=6(c^*-c^\circ)T^{-2}(-2\tau+1), \qquad \tau\in[0,\ 1] \qquad (3.15)$$

Управление, приводящее систему в состояние равноускоренного движения (задача 3), получается из условий $A_s=A_c=0$ и (2.8) и равно

$$\gamma_w(t)=(w^*-w^\circ)T^{-1}, \qquad t\in[0,\ T] \qquad (3.16)$$

При $t>T$ функции $\gamma_{s,c,w}(t)$ полагаются равными нулю. Подстановка найденных в (3.14)–(3.16) управлений в (3.12) и (2.1) приводит к оценкам погрешностей, из которых следует, что величины относительных скоростей и ускорений будут сколь угодно малыми для всех $t>T$, $0\leqslant x\leqslant a$, $0\leqslant y\leqslant h$, если величина T достаточно велика; а именно, относительные погрешности будут порядка $1/\omega_1T$ даже для больших величин рассогласований: $s^*-s^\circ\sim a(\omega_1T)^2$, $c^*-c^\circ\sim a\omega_1^2T$. Аналогичным образом можно построить управления $\gamma_{s,c,w}(t)$, приводящие к полному гашению конечного числа мод колебаний, в первую очередь низших, и провести оценки погрешностей.

Вопрос существования точного решения проблемы моментов (2.6)–(2.8), (3.12) для конечного T является открытым, а построение управляющих функций $\gamma_{s,c,w}$ весьма проблематичным. Существенные трудности связаны с отмеченной выше сильной дисперсией волн [1, 2], приводящей к сближению частот: $\omega_{n+1}-\omega_n\sim n^{-1/2}$. Это приводит к «резонансным» соотношениям в уравнениях (3.12), причем «ширина резонансной зоны» увеличивается с ростом индекса n как величина $n^{1/2}$.

Рассмотренная выше постановка задачи управления о перемещении сосуда с жидкостью в качественной форме была высказана А. Ю. Ишлинским.

Автор благодарит также В. Ф. Журавлева, С. В. Нестерова и С. Я. Секерж-Зеньковича за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 600 с.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 492 с.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
6. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управлении системами с упругими элементами.– ПММ, 1980, т. 44, вып. 1, с. 22–31.
7. *Акуленко Л. Д.* Приведение упругой системы в заданное состояние посредством силового граничного воздействия.– ПММ, 1981, т. 45, вып. 6, с. 1095–1103.
8. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
9. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
10. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
11. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями. М.: Наука, 1980. 384 с.
12. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Физматгиз, 1958. 508 с.

Москва

Поступила в редакцию
1.III.1982