МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1983

УДК 534.11

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ВОЗМУЩЕНИЕМ КОРРЕЛИРОВАННЫМИ ШУМАМИ МЕТОДОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

ЗАХАРОВ М. Г., КУЛЬЧИЦКИЙ О. Ю.

Предлагается метод приближенного вычисления моментных характеристик фазовых координат системы линейных дифференциальных уравнений с возмущением коэффициентов коррелированными случайными процессами малой интенсивности. Метод позволяет, в частности, оценить область асимптотической устойчивости и указать величину погрешности ее вычисления. На примере уравнения второго порядка дается сопоставление с результатами, полученными другими методами.

1. В механических системах колебательного типа с параметрическим случайным возмущением наблюдаются эффекты, аналогичные параметрическому резонансу в детерминированных системах. Наиболее простым объектом такого типа является линейный осциллятор, частота и коэффициент демпфирования которого возмущаются случайными процессами

$$x_\tau^{\cdot\cdot}+(2n\varepsilon^2+\varepsilon\xi_{1\tau})x_\tau^{\cdot}+(\omega_0^2+\varepsilon\xi_{2\tau})x_\tau=0 \tag{1.1}$$

Здесь ω_0, $2n\varepsilon^2$ — параметры колебательной системы (собственная частота и коэффициент демпфирования), $\varepsilon>0$ — малый параметр, $\xi_{1\tau}$ и $\xi_{2\tau}$ — центрированные случайные процессы с заданными моментными характеристиками.

В [1—3] различными методами для уравнения (1.1) получены в аналитической форме условия устойчивости процесса x_τ в среднеквадратическом, имеющие следующий вид:

$$4n>S_{\xi_1}(0)+S_{\xi_1}(2\omega_0)+\omega_0^{-2}S_{\xi_2}(2\omega_0) \tag{1.2}$$

где $S_\xi(\omega)$ — спектральная плотность случайного процесса ξ_t. Это условие соответствует области главного параметрического резонанса в системе (1.1). В детерминированных системах кроме главного резонанса наблюдаются также дробные на частотах периодического возмущения

$$\omega=2\omega_0(1/s) \quad (s=2,\ 3,\dots) \tag{1.3}$$

Для стохастических систем в [4, 5] получен аналог первого дробного резонанса ($\omega=\omega_0$) путем учета величины второго порядка малости по ε при определении границ области устойчивости.

Однако методы исследования этих работ содержат элемент эвристики. Например, в [4] используется гипотеза квазигауссовости, что позволяет получить замкнутую систему дифференциальных уравнений для моментных характеристик, а в [1—3, 6] предполагается независимость и равномерная распределенность фазы колебаний при достаточно больших моментах времени. При таком подходе остается открытым вопрос о точности по ε полученных результатов и связанный с ним вопрос о допустимом классе процессов возмущения. Кроме того, в полученные условия устойчивости входят только значения спектральных плотностей процессов возмущения на частоте $2\omega_0$. Данный результат представляется физически не вполне корректным, так как случайный процесс на фиксированной частоте несет нулевую мощность и не может вызвать потерю устойчивости системы. Это указывает на то, что условия устойчивости должны быть справедливы только при определенной гладкости спектра возмущения.

В публикуемой работе для модельной задачи (1.1) методом интегро-дифференциальных неравенств получены условия возникновения главного и первого дробного параметрических резонансов и изучено влияние на устойчивость системы структуры спектра возмущения на частотах, близких к $2\omega_0$. Применяемый метод дает возможность для специального класса процессов возмущения строго обосновать полученные результаты и дать точную интерпретацию условий устойчивости.

2. Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}_\tau=\left(A_0+\varepsilon^2A_1+\varepsilon\sum_{i=1}^{q}\xi_\tau^{(i)}B_i\right)\mathbf{x}_\tau,\qquad \mathbf{x}_0=\mathbf{x}(0) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}_\tau$ — N-мерный вектор фазовых координат системы, A_0, A_1, B_i — постоянные вещественные $N\times N$ матрицы, причем собственные числа матриц A_0 и A_1 имеют неположительные вещественные части, $\varepsilon>0$ — малый параметр, $\xi_\tau=[\xi_\tau^{(1)},\xi_\tau^{(2)},\dots,\xi_\tau^{(q)}]^T$ — центрированный случайный процесс с заданными моментными характеристиками, удовлетворяющий определенному условию усиленной эргодичности — так называемому условию равномерно сильного перемешивания [7], характеризующему степень ослабления статистической зависимости «будущего» случайного процесса от его «прошлого».

Наиболее важным свойством процессов, удовлетворяющих условию равномерно сильного перемешивания, является следующее [7].

Пусть x_t — случайный процесс, функционально зависящий от ξ_τ $(0\leqslant\leqslant\tau\leqslant t)$, ξ_t — ограниченный ($|\xi_t|<c$) случайный процесс, удовлетворяющий условию РСП, тогда при $t_1\leqslant t_2\leqslant\dots\leqslant t_n$ справедливо неравенство $(\gamma==1/(n-1))$:

$$|\langle Kx_{t_1}[\xi_{t_2}[\xi_{t_3}\dots]^\circ\dots]^\circ\rangle|\leqslant 2nc^{n-1}\alpha^\gamma(t_n-t_{n-1})\dots\alpha^\gamma(t_2-t_1)\langle|x_{t_1}|\rangle \tag{2.2}$$

где убывающая функция $\alpha(t)>0$ называется коэффициентом равномерно сильного перемешивания [1]. В дальнейшем предполагается, что $\alpha(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty \alpha^\gamma(t)\,dt<\infty$$

В качестве примеров таких процессов можно привести статистически связанные на конечном промежутке времени случайные процессы, а также процессы, порожденные гауссовским процессом путем преобразования с помощью безынерционной нелинейности с насыщением. Необходимые условия РСП для стационарных процессов имеют достаточно простой вид [8]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\ln S(\omega)|}{1+\omega^2}\,d\omega<\infty \tag{2.3}$$

[1] Символом $[\dots]^\circ$ обозначена операция центрирования случайной величины, заключенной в скобки: $[\zeta]^\circ=\zeta-\langle\zeta\rangle$.

и задают ограничения снизу на скорость убывания к нулю спектральной плотности $S(\omega)$. В частности, спектральная плотность не может равняться нулю ни для одной из частот.

Использование случайных процессов, для которых справедливо неравенство (2.2), позволяет получить для моментных характеристик процесса $\mathbf{x}_t$ замкнутые линейные интегродифференциальные уравнения с произвольной по ε точностью и указать погрешность оценивания. Погрешность также линейно зависит от вектора моментных характеристик и является величиной по ε на порядок выше, чем оцениваемая величина. Наличие такого рода интегродифференциальных неравенств позволяет сформулировать [9] [2] условия устойчивости решений системы (2.1) в моментном смысле [10].

Метод получения интегродифференциальных неравенств относительно моментов произвольного порядка однотипен и для простоты приводится только для моментов первого порядка. Переходя в уравнении (2.1) к медленному времени $t=\varepsilon^2\tau$ и осредняя по случайности, получаем

$$\dot{\mathbf{m}}^{(1)}(t)=\varepsilon^{-2}A\mathbf{m}^{(1)}(t)+\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{q}B_i\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_t\rangle,\qquad A=A_0+\varepsilon^2A_1 \tag{2.4}$$

Уравнение (2.1) для медленного времени может быть записано в эквивалентной форме

$$\mathbf{x}_t=e^{\varepsilon^{-2}At}\mathbf{x}_0+\varepsilon^{-1}e^{\varepsilon^{-2}At}\int_0^t e^{-\varepsilon^{-2}A\tau}\sum_{j=1}^{q}B_j\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_\tau\,d\tau$$

После подстановки данного выражения для x_t в $\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_t\rangle$, разбиения $\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}x_\tau\rangle$ на $\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}\rangle\,\mathbf{m}(\tau)$ и $\langle[\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}]^\circ x_\tau\rangle$ и замены x_τ на приведенное выше выражение второе слагаемое в правой части (2.4) преобразуется к виду

$$\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{q}B_i\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_t\rangle=\varepsilon^{-2}\sum_{i,j=1}^{q}\int_0^t B_i\exp[\varepsilon^{-2}A(t-\tau)]\times$$
$$+B_j\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}\rangle\mathbf{m}^{(1)}(\tau)\,d\tau+\varepsilon^{-3}\sum_{i,j,k=1}^{q}\int_0^t B_i\exp[\varepsilon^{-2}A(t-\tau)]\times$$
$$\times\int_0^\tau B_j\exp[\varepsilon^{-2}A(\tau-\theta)]B_k\langle[\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{\tau\varepsilon^{-2}}]^\circ\xi^{(k)}_{\theta\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_\theta\rangle d\theta\,d\tau \tag{2.5}$$

Тройная сумма в правой части равенства с учетом (2.2) и свойств матрицы A оценивается по модулю величиной

$$g(t)=\varepsilon^{-3}\int_0^t\alpha^{1/2}\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\right)\int_0^\tau\alpha^{1/2}\left(\frac{\tau-\theta}{\varepsilon^2}\right)G\langle|\mathbf{x}_\theta|\rangle d\theta\,d\tau \tag{2.6}$$

где матрица G имеет положительные элементы и вычисляется по максимальному значению c элементов процесса ξ_t и матрицам B_i. В силу дельтообразности при $\varepsilon\to0$ функции $\varepsilon^{-2}\alpha^{1/2}(t\varepsilon^{-2})$ $g(t)$ является величиной порядка ε, в то время как «полезная» часть является величиной порядка единицы.

---

[2] См. также *Захаров М. Г., Кульчицкий О. Ю.* Линейные системы со случайными параметрами. Деп. в ВИНИТИ 12.11.81; № 5194–81.

Аналогичным образом функция $\varepsilon^{-1}\Sigma B_i\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_t\rangle$ $(i=1, 2,\ldots, q)$ может быть оценена с произвольной точностью по ε:

$$\varepsilon^{-1}\sum_{i=1}^{q}B_i\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\mathbf{x}_t\rangle=\mathbf{L}_0(t,\varepsilon)+\varepsilon\mathbf{L}_1(t,\varepsilon)+\ldots+\varepsilon^{n+1}\mathbf{L}_{n+1}(t,\varepsilon) \tag{2.7}$$

$$\mathbf{L}_0(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-2}\sum_{i,j=1}^{q}\int_0^t B_i\exp[\varepsilon^{-2}A(t-t_1)]B_j\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{t_1\varepsilon^{-2}}\rangle\mathbf{m}^{(1)}(t_1)\,dt_1$$

$$\mathbf{L}_1(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-4}\sum_{i,j,k=1}^{q}\int_0^t B_i\exp[\varepsilon^{-2}A(t-t_1)]\int_0^{t_1}B_j\exp[\varepsilon^{-2}A(t_1-t_2)]\times$$

$$\times B_k\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{t_1\varepsilon^{-2}}\xi^{(k)}_{t_2\varepsilon^{-2}}\rangle\mathbf{m}^{(1)}(t_2)\,dt_2\,dt_1$$

$$\mathbf{L}_2(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-6}\sum_{i,j,k,s=1}^{q}\int_0^t B_i\exp[\varepsilon^{-2}A(t-t_1)]\times$$

$$\times\int_0^{t_1}B_j\exp[\varepsilon^{-2}A(t_1-t_2)]\int_0^{t_2}B_k\exp[\varepsilon^{-2}A(t_2-t_3)]B_s[\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{t_1\varepsilon^{-2}}\xi^{(k)}_{t_2\varepsilon^{-2}}\xi^{(s)}_{t_3\varepsilon^{-2}}\rangle-$$

$$-\langle\xi^{(i)}_{t\varepsilon^{-2}}\xi^{(j)}_{t_1\varepsilon^{-2}}\rangle\langle\xi^{(k)}_{t_2\varepsilon^{-2}}\xi^{(s)}_{t_3\varepsilon^{-2}}\rangle]\mathbf{m}^{(1)}(t_3)\,dt_3\,dt_2\,dt_1$$

$$|\mathbf{L}_{n+1}(t,\varepsilon)|\leqslant g_{n+1}(t)=\varepsilon^{-2(n+2)}\int_0^t\alpha^{1/(n+2)}\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon^2}\right)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{n+1}}\alpha^{1/(n+2)}\left(\frac{t_{n+1}-t_{n+2}}{\varepsilon^2}\right)G\langle|\mathbf{x}_{t_{n+2}}|\rangle\,dt_{n+2}\ldots dt_1$$

С учетом соотношений (2.7) уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$\mathbf{m}^{\cdot(1)}(t)-\varepsilon^{-2}A\mathbf{m}^{(1)}(t)-\mathbf{L}_0(t,\varepsilon)-\ldots-\varepsilon^{n}\mathbf{L}_n(t,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\mathbf{L}_{n+1}(t,\varepsilon) \tag{2.8}$$

Уравнения аналогичные (2.8) могут быть получены и для моментов произвольного порядка p

$$m^{\cdot(p)}-\varepsilon^{-2}A^{(p)}\mathbf{m}^{(p)}(t)-\mathbf{L}_0^{(p)}(t,\varepsilon)-\ldots-\varepsilon^{(n)}\mathbf{L}_n^{(p)}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{n+1}\mathbf{L}_{n+1}^{(p)}(t,\varepsilon) \tag{2.9}$$

Для четных значений p функции $\mathbf{L}_{n+1}^{(p)}$ оцениваются по модулю величинами

$$g_{n+1}^{(p)}(t)\leqslant d_{n+1}^{(p)}(t)=\varepsilon^{-2(n+2)}\int_0^t\alpha^{1/(n+2)}\left(\frac{t-t_1}{\varepsilon^2}\right)\ldots$$

$$\ldots\int_0^{t_{n+1}}\alpha^{1/(n+2)}\left(\frac{t_{n+1}-t_{n+2}}{\varepsilon^2}\right)D^{(p)}\mathbf{m}^{(p)}(t_{n+2})\,dt_{n+2}\ldots dt_1 \tag{2.10}$$

Для нечетных p справедливы оценки аналогичные (2.10) с привлечением моментов порядка $p-1$ и $p+1$.

Соотношения (2.9) и (2.10) дают систему замкнутых линейных интегродифференциальных неравенств относительно вектора моментных характеристик $\mathbf{m}^{(p)}(t)$. Легко показать, что если коэффициент равномерно сильного перемешивания $\alpha(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^\infty\alpha^{1/(n+2)}(t)\,dt<\infty$$

и система интегродифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{y}}(t)-\varepsilon^{-2}A^{(p)}\mathbf{y}(t)=\sum_{k=0}^{n}\varepsilon^{k}\mathbf{L}_{k}^{(p)}(t,\varepsilon) \tag{2.11}$$

имеет запас устойчивости, являющийся величиной порядка ε^n (т. е. $\|\mathbf{y}(t)\|$ оценивается функцией $c\exp[\varepsilon^n\lambda t]$ сверху при $\lambda<0$, если система (2.11) асимптотически устойчива), то норма вектора $\mathbf{m}^{(p)}(t)$, удовлетворяющего интегродифференциальным неравенствам (2.9), (2.10), тогда и только тогда стремится к нулю, когда тривиальное решение уравнения (2.11) асимптотически устойчиво. Иными словами, условия асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (2.11) являются необходимыми и достаточными условиями асимптотической моментной устойчивости решения системы (2.1) с точностью до величин порядка ε^{n+1}.

3. Для уравнения второго порядка (1.1) проводится сравнение условий устойчивости, приведенных в [3, 5], с аналогичными условиями, полученными из анализа интегродифференциальных уравнений для моментов второго порядка, а также выясняется влияние на устойчивость системы структуры спектра возмущения на частотах, близких к $2\omega_0$.

Для получения нулевого по степени ε приближения условий устойчивости в среднеквадратическом необходимо в правой части уравнения (2.11) при $p=2$ учесть только члены порядка единицы. Если процесс x_t удовлетворяет уравнению (1.1), нетрудно получить, что эта система имеет следующий вид:

$$\dot{\mathbf{m}}^{(2)}(t)-\varepsilon^{-2}A^{(2)}\mathbf{m}^{(2)}(t)=B\mathbf{m}^{(2)}(t) \tag{3.1}$$

$$\mathbf{m}^{(2)}(t)=\left[\langle x_t^2\rangle,\left\langle\left(\frac{d}{dt}x_t\right)^2\right\rangle,\left\langle x_t\frac{d}{dt}x_t\right\rangle\right]^T$$

$$A^{(2)}=A_0^{(2)}+\varepsilon^2A_1^{(2)}=\begin{Vmatrix}0&0&2\\0&0&-2\omega_0^2\\-\omega_0^2&1&0\end{Vmatrix}+\varepsilon^2\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&-4n&0\\0&0&-2n\end{Vmatrix}$$

$$B=\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^\infty B_ie^{A_0^{(2)}\tau}B_je^{-A_0^{(2)}\tau}R_{ij}(\tau)\,d\tau,\qquad R_{ij}(\tau)=\langle\xi_{it}\xi_{jt+\tau}\rangle$$

$$B_1=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{Vmatrix}\qquad B_2=\begin{Vmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\-1&0&0\end{Vmatrix}$$

Выражение для B получено в результате предельного перехода при $\varepsilon\to0$ в $L_0^{(2)}(t,\varepsilon)$:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\mathbf{L}_0^{(2)}(t,\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{i,j=1}^{2}\varepsilon^{-2}\int_0^t B_i\exp\left[(A_0^{(2)}+\varepsilon^2A_1^{(2)})\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\right]\times$$

$$\times B_jR_{ij}\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\right)\mathbf{m}^{(2)}(\tau)\,d\tau=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^{t\varepsilon^{-2}}B_ie^{A_0\tau}B_jR_{ij}(\tau)\times\right.$$

$$\left.\times\left(E-A_0\tau+\frac{1}{2}A_0^2\tau^2+\dots\right)\mathbf{m}^{(2)}(t)\,d\tau+o(\varepsilon^2)\right]=$$

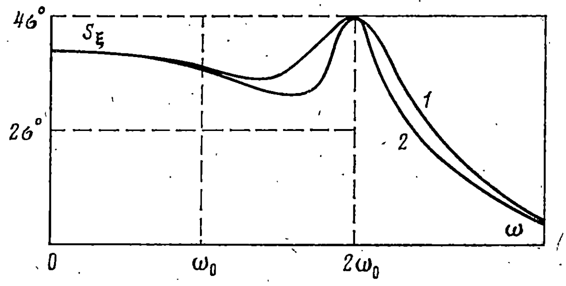
$$=\lim_{\varepsilon\to0}\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^{t\varepsilon^{-2}}B_ie^{A_0\tau}B_je^{-A_0\tau}R_{ij}(\tau)\,d\tau\,\mathbf{m}^{(2)}(t)=B\mathbf{m}^{(2)}(t) \tag{3.2}$$

Условия устойчивости при $\varepsilon \to 0$ решений уравнения (3.1) могут быть получены при помощи критерия Рауса — Гурвица в аналитическом виде $4n > S_{\xi_1}(0) + S_{\xi_1}(2\omega_0) + \omega_0^{-2} S_{\xi_2}(2\omega_0)$ и совпадают с результатом [3]. Как отмечалось выше, применяемая методика позволяет дать точную трактовку данному условию как необходимому и достаточному условию устойчивости системы, описывающей предельное при $\varepsilon \to 0$ поведение вторых моментов.

Зависимость условий устойчивости (1.2) только от значений спектральных плотностей на фиксированных частотах является следствием принятой острорезонансной модели объекта, структура которого зависит от малого параметра ε. Поэтому для изучения влияния на устойчивость системы спектра возмущения на частотах, близких к $2\omega_0$, необходимо задаться случайным процессом, корреляционные свойства которого также зависели бы от ε. В качестве такого процесса взят узкополосный случайный процесс со спектральной плотностью, удовлетворяющей условию (2.3)

$$S_{\xi_{1,2}}(\omega) = S_{\xi}(\omega) = 2\frac{\sigma^2[(4\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 8k^2\varepsilon^{2\alpha}\omega^2]}{(a^2+\omega^2)[(4\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\varepsilon^{2\alpha}\omega^2]} \tag{3.3}$$

где a, k, σ, α — положительные константы.



Из приведенных на фигуре зависимостей $S_\xi(\omega)$ при различных ε видно, что спектральная плотность имеет «выброс» постоянной амплитуды $\sigma^0 = \sigma^2/(a^2 + 4\omega_0^2)$ на частоте $2\omega_0$, мощность которого в окрестности частоты $2\omega_0$ убывает при увеличении α (кривая *1* соответствует ε_1, а кривая *2* — $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$). Соответствующая корреляционная функция с точностью до существенных слагаемых представима в виде

$$R_\xi(\tau) = \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-a|\tau|} + \frac{2\varepsilon^{\alpha} k a}{a^2 + 4\omega_0^2} e^{-\varepsilon k|\tau|} \cos\sqrt{4\omega_0^2 - \varepsilon^{2\alpha}k^2}\,\tau\right) \tag{3.4}$$

Параметрическая зависимость корреляционной функции от ε приводит к изменению выражения для матрицы B в уравнении (3.1) и требует непосредственного вычисления предела

$$B = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i,j=1}^{2} \int_0^{t\varepsilon^{-2}} B_i e^{A_0\tau} B_j e^{-A_0\tau} R_{ij}(\varepsilon, \tau)\, d\tau$$

При этом нет необходимости определять все элементы матрицы, достаточно вычислить лишь

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t\varepsilon^{-2}} R(\varepsilon, \tau) \cos 2\omega_0\tau\, d\tau \tag{3.5}$$

так как именно это выражение входит в условия устойчивости. При отсутствии параметрической зависимости $R_\xi(\tau)$ от ε

$$J = \int_0^{\infty} R_\xi(\tau) \cos 2\omega_0\tau\, d\tau = \frac{1}{2} S_\xi(2\omega_0)$$

а при задании $R_\xi(\varepsilon, \tau)$ выражением (3.4) вычисление предела приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} J&=2\sigma^2/(a^2+4\omega_0^2)={}^1/_2 S_\xi(2\omega_0) \qquad (0<\alpha<2)\\ J&=\sigma^2/(a^2+4\omega_0^2)(2-e^{-ht}) \qquad (\alpha=2)\\ J&=\sigma^2/(a^2+4\omega_0^2) \qquad (\alpha>2)\end{aligned} \tag{3.6}$$

Соотношения (3.6) позволяют сделать вывод, что на устойчивость системы влияют значения спектральных плотностей на частотах из окрестности $2\omega_0$, ширина которой является величиной порядка ε^2. Таким образом, критерий устойчивости (1.2) применим в практически интересном допредельном случае только тогда, когда спектр возмущения обладает достаточной гладкостью в околорезонансной зоне, ширина которой определяется величиной коэффициента трения в системе.

В [5] для частного случая уравнения (1.1) ($\xi_{1\tau}\equiv 0$, $\xi_{2\tau}$ — стационарный центрированный нормальный процесс) получены условия устойчивости в среднеквадратическом с точностью до величины порядка ε^2 включительно, это позволило обнаружить аналоги дробных резонансов, имеющих место в детерминированных системах. Подобные условия получаются и из анализа уравнения (2.11) при $p=2$, если в нем учтены величины до порядка ε^2 включительно. При этом уравнение (2.11) имеет вид

$$\mathbf{m}^{\cdot(2)}(t)-\varepsilon^{-2}A^{(2)}\mathbf{m}^{(2)}(t)=B\mathbf{m}^{(2)}(t)+\varepsilon^{(2)}(C+D)\mathbf{m}^{(2)}(t) \tag{3.7}$$

$$B=\int_0^\infty B_2 e^{A_0^{(2)}\tau}B_2 e^{-A_0^{(2)}\tau}R(\tau)\,d\tau, \qquad R(\tau)=R_{22}(\tau)$$

$$C\mathbf{m}^{(2)}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2}[\mathbf{L}_0^{(2)}(t,\varepsilon)-B\mathbf{m}^{(2)}(t)] \tag{3.8}$$

$$D\mathbf{m}^{(2)}(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{L}_2^{(2)}(t,\varepsilon) \tag{3.9}$$

Пределы (3.8) и (3.9) вычисляются аналогично (3.2). С учетом соотношения $\langle\xi_t\xi_{t_1}\xi_{t_2}\xi_{t_3}\rangle=R(t-t_1)R(t_2-t_3)+R(t-t_2)R(t_1-t_3)+R(t-t_3)R(t_1-t_2)$ справедливого для достаточно широкого класса ограниченных случайных процессов, порожденных гауссовскими, значения матриц C и D определяются следующими выражениями:

$$C=\int_0^\infty B_2 e^{A_0^{(2)}\tau}[A_1B_2e^{-A_0^{(2)}\tau}+B_2e^{-A_0^{(2)}\tau}(A_1+B)]\,\tau R(\tau)\,d\tau \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} D=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty B_2e^{A_0^{(2)}t_1}B_2e^{A_0^{(2)}t_2}B_2e^{A_0^{(2)}t_3}B_2[R(t_1+t_2)R(t_2+t_3)+\\ +R(t_2)R(t_1+t_2+t_3)]\exp[-A_0^{(2)}(t_3+t_2+t_1)]\,dt_3\,dt_2\,dt_1\end{aligned} \tag{3.11}$$

Условия устойчивости решений уравнения (3.7) включающие величины порядка ε^2, согласно критерию Рауса — Гурвица, имеют вид

$$4n>\omega_0^{-2}[B_{21}+\omega_0^2B_{22}+\varepsilon^2(c_{21}+\omega_0^2c_{22}+D_{21}+\omega_0^2D_{22})+\varepsilon^2B_{21}(B_{32}+\omega_0^{-2}B_{31})] \tag{3.12}$$

Появление первой группы слагаемых с множителем ε^2 обусловлено наличием членов порядка ε^2 в уравнении (3.7), вторая группа слагаемых пропорциональных ε^2 является результатом учета членов порядка ε^2 в критерии устойчивости по Раусу — Гурвицу решений уравнения (3.7). После подстановки вычисленных значений B_{21}, B_{22}, B_{31}, B_{32}, C_{21}, C_{22}, D_{21},

D_{22} и приведения подобных членов неравенство (3.12) преобразуется к виду

$$4n > \omega_0^{-2} S(2\omega_0) + {}^1/_2 \varepsilon^2 \omega_0^{-5} [S(0) + S(2\omega_0)] T(2\omega_0) - \\ -\varepsilon^2 \omega_0^{-4} \frac{d}{d\omega} T(\omega) \Big|_{\omega=2\omega_0} S(2\omega_0) + \varepsilon^2 Q(2\omega_0) \qquad (3.13)$$

$$T(\omega) = \int_0^\infty R(t) \sin \omega t dt, \quad \frac{d}{d\omega} T(\omega) \Big|_{\omega=2\omega_0} = \int_0^\infty R(t) t \cos 2\omega_0 t dt$$

$$Q(2\omega_0) = 2\omega_0^{-4} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty [\cos 2\omega_0 t_1 \cos 2\omega_0 t_3 - \cos 2\omega_0 (t_1 + t_2 + t_3)] \times \\ \times [R(t_1 + t_2) R(t_2 + t_3) + R(t_2) R(t_1 + t_2 + t_3)] dt_1 dt_2 dt_3$$

Условия (3.13) отличаются от условий, полученных в [5], наличием дополнительного слагаемого

$${}^1/_2 \varepsilon^2 \omega_0^{-5} T(2\omega_0) [S(0) + S(2\omega_0)]$$

Рассмотрим, как изменяются условия устойчивости (3.13), если корреляционная функция процесса возмущения зависит от ε и задана выражением (3.4). При этом, так же как в рассмотренном выше случае условий устойчивости (1.2), необходимо непосредственное вычисление пределов интегралов, верхний предел и подынтегральная функция которых зависит от параметра ε.

Вычисление предела (3.5) проводилось выше. Значение

$$T(2\omega_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{t/\varepsilon^2} R(\varepsilon, \tau) \sin 2\omega_0 \tau d\tau$$

не зависит от параметра α и для заданной корреляционной функции равно $2\sigma^2\omega_0^2/[a(4\omega_0^2 + a^2)]$. Значение $Q(2\omega_0)$ вычисляется по $T(2\omega_0)$, $S(2\omega_0)$ и $S(0)$. Для предела $\partial/\omega T(\omega)$ получено следующее выражение:

$$J_1 = \frac{\sigma^2 (a^2 - 4\omega_0^2)}{a(a^2 + 4\omega_0^2)^2} + \varepsilon^{-\alpha} \frac{\sigma^2}{k(a^2 + 4\omega_0^2)} \quad (0 < \alpha < 2)$$

$$J_1 = \sigma^2 (a^2 - 4\omega_0^2) / [a(a^2 + 4\omega_0^2)^2] \quad (\alpha \geqslant 2) \qquad (3.14)$$

Из (3.14) видно, что J_1 при $0 < \alpha < 2$ содержит неограниченно растущую составляющую (напомним, что J_1 появляется при разложении $L_0(t, \varepsilon)$ в ряд по ε и учете величин порядка ε^2). Подставив данное выражение в (3.13) и ограничиваясь основными членами по ε, будем иметь

$$4n > \omega_0^{-2} \frac{4\sigma^2}{a^2 + 4\omega_0^2} \left(1 - \varepsilon^{2-\alpha} \frac{\sigma^2}{k\omega_0^2 (a^2 + 4\omega_0^2)}\right) \quad (0 < \alpha < 2) \qquad (3.15)$$

Данное соотношение подтверждает сделанный ранее вывод о том, что условия устойчивости системы зависят от степени взаимной согласованности (параметром которой в рассматриваемом случае является величина α), остроты резонансной структуры колебательной системы и гладкости спектра возмущения. Кроме того, оно позволяет конкретизировать данный вывод: судить об устойчивости системы (1.1) по уравнению (3.1) (результаты [1—5] по существу эквивалентны рассмотрению уравнений типа (3.1)) можно только в случае, если спектральная плотность процесса возмущения постоянна в полосе пропускания механической системы, т. е. возмущение является типа белого шума по отношению к фильтрующим свойствам системы. Если это не так, то исследовать на устойчивость необходимо непосредственно допредельное интегродифференциальное уравнение

$$\mathbf{m}^{\cdot(2)}(t)-\varepsilon^{-2}A^{(2)}\mathbf{m}^{(2)}(t)=$$

$$=\varepsilon^{-2}\sum_{i,j=1}^{2}B_i\int_0^t \exp[\varepsilon^{-2}A^{(2)}(t-\tau)]B_jR_{ij}\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon^2}\right)\mathbf{m}^{(2)}(\tau)\,d\tau$$

в котором интегрально учитывается влияние структуры спектра возмущения в полосе пропускания системы, что полностью отвечает физическим представлениям.

Авторы благодарны А. А. Первозванскому, по инициативе и при постоянном внимании которого проводилась эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флюктуации в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
2. *Челпанов И. Б.* Колебания системы второго порядка при случайных изменениях параметра.– ПММ, 1962, т. 26, вып. 4, с. 762–766.
3. *Коловский М. З., Троицкая З. В.* Об устойчивости линейных систем со случайными параметрами.– ПММ, 1972, т. 36, вып. 2, с. 218–224.
4. *Болотин В. В., Москвин В. Г.* О параметрических резонансах в стохастических системах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4, с. 88–94.
5. *Миркина А. С.* Определение второй области неустойчивости для уравнений со случайными коэффициентами.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 95–101.
6. *Диментберг М. Ф.* Статистическая оценка устойчивости резонансного режима колебательной системы, взаимодействующей с источником возбуждения ограниченной мощности.– Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1, с. 5–13.
7. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с.
8. *Ибрагимов И. А., Розанов Ю. А.* Гауссовские случайные процессы. М.: Наука, 1970. 384 с.
9. *Захаров М. Г., Кульчицкий О. Ю.* Метод оценки моментных характеристик фазовых координат дискретных линейных систем с параметрами, возмущаемыми коррелированными случайными шумами.– В кн.: Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы управления, 1978, № 40, с. 90–99.
10. *Хасьминский Р. З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. 367 с.

Ленинград

Поступила в редакцию
21.VI.1980