МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1983

УДК 534.1

КОМБИНАЦИОННЫЕ РЕЗОНАНСЫ В СИСТЕМАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ И СЛУЧАЙНЫМ ВНЕШНИМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ

ДИМЕНТБЕРГ М. Ф., ИСИКОВ Н. Е.

Применение метода усреднения к системам с периодически изменяющимися параметрами, находящимися под действием внешних случайных возмущений, позволяет получить систему линейных укороченных уравнений с постоянными коэффициентами относительно медленно меняющихся амплитуд колебательных процессов [1]. В публикуемой работе общий метод такого анализа, описанный в [1], применяется для детального изучения колебательных процессов в устойчивой системе с двумя степенями свободы в условиях суммарного или разностного комбинационного резонанса. Результаты используются, в частности, для идентификации комбинационных параметрических резонансов в таких системах.

1. Рассмотрим колебания системы, описываемой дифференциальными уравнениями

$$x_i^{\cdot\cdot}+2\sum_{j=1}^{2}\alpha_{ij}x_j^{\cdot}+\Omega_i^2x_i+\Omega_i^2\sum_{j=1}^{2}\lambda_{ij}x_j\sin 2\nu t=\xi_i(t)\qquad (i=1,2)\tag{1.1}$$

Предполагается, что величины α_{ij}, λ_{ij} являются малыми и при $\xi_i(t)\equiv0$ ($i=1, 2$) тривиальное решение $x_i=0$ ($i=1, 2$) системы (1.1) устойчиво. Будем считать внешние воздействия $\xi_i(t)$ ($i=1,2$) стационарными центрированными случайными процессами, широкополосными по отношению к системе (1.1).

Как известно [2, 3], при $\nu\approx{}^1/_2(\Omega_1+\Omega_2)$ и $\nu\approx{}^1/_2(\Omega_1-\Omega_2)$ (для определенности полагаем $\Omega_1>\Omega_2$) в системе (1.1) наблюдаются соответственно суммарный и разностный комбинационные резонансы. Для исследования этих резонансных режимов воспользуемся в уравнениях (1.1) заменой переменных

$$\begin{aligned}x_i(t)&=x_{ic}(t)\cos p_it+x_{is}(t)\sin p_it\\ x_i^{\cdot}(t)&=p_i[-x_{ic}(t)\sin p_it+x_{is}(t)\cos p_it]\qquad (i=1,\ 2)\end{aligned}\tag{1.2}$$

считая, что частоты резонансных колебаний удовлетворяют соотношению $p_1+p_2=2\nu$.

После применения метода усреднения для почти-периодических процессов получим следующую систему укороченных уравнений:

$$x_{cs}^{\cdot}=Ax_{cs}+\eta(t)\tag{1.3}$$

$$A=\begin{Vmatrix}-\alpha_{11} & \delta_1 & \gamma_{12} & 0\\ -\delta_1 & -\alpha_{11} & 0 & \mp\gamma_{12}\\ \pm\gamma_{21} & 0 & -\alpha_{22} & \delta_2\\ 0 & -\gamma_{21} & -\delta_2 & -\alpha_{22}\end{Vmatrix},\quad x_{cs}=\begin{Vmatrix}x_{1c}\\ x_{1s}\\ x_{2c}\\ x_{2s}\end{Vmatrix},\quad \eta(t)=\begin{Vmatrix}\eta_{1c}\\ \eta_{1s}\\ \eta_{2c}\\ \eta_{2s}\end{Vmatrix}$$

Здесь $\delta_i=(\Omega_i^2-p_i^2)/2p_i$, $\gamma_{ij}=\Omega_i^2\lambda_{ij}/4p_i$, а η_{ic}, η_{is} — эквивалентные некоррелированные случайные возмущения типа белого шума с интенсивностями

$$D_{\eta_{ic}}=D_{\eta_{is}}=D_i=\pi\Phi_{\xi_i\xi_i}(p_i)/p_i^2 \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем при наличии в формуле двух знаков верхний относится к суммарному комбинационному резонансу, нижний — к разностному.

Система укороченных уравнений (1.3) содержит два частных параметра расстройки

$$\Delta_1=\Omega_1-p_1\approx\delta_1,\quad \Delta_2=\Omega_2-p_2\approx\delta_2 \tag{1.5}$$

которые связаны между собой соотношением

$$\Delta=2\nu-(\Omega_1\pm\Omega_2)=-(\Delta_1\pm\Delta_2) \tag{1.6}$$

Отсюда следует, что при задании частных расстроек Δ_1, Δ_2 существует некоторый произвол и необходимо лишь обеспечить заданную суммарную расстройку Δ.

Проведем исследование стационарного стохастического решения системы (1.3), полагая выполненным неравенство

$$|\gamma_{12}\gamma_{21}|<\alpha_{11}\alpha_{22}\{1+[\delta_1+\delta_2)/(\alpha_{11}+\alpha_{22})]^2\} \tag{1.7}$$

которое согласно критерию Раусса — Гурвица представляет условие устойчивости системы (1.3) с $\eta_{ic}\equiv0$, $\eta_{is}\equiv0$ ($i=1, 2$), а следовательно, условие устойчивости по первому приближению системы (1.1) с $\xi_i(t)\equiv0$.

Для отыскания моментов стохастического решения системы (1.3) используем метод интегрирования уравнений моментов [4], согласно которому дисперсия и корреляционная функция вектора переменных состояния системы $x_{cs}=\{x_{1c}, x_{1s}, x_{2c}, x_{2s}\}^T$ определяются из решения матричных дифференциальных уравнений

$$\dot{D_x}=AD_x+D_xA^T+D_\eta \tag{1.8}$$

$$\frac{d}{dt}K_x(t-\tau)=K_x(t-\tau)A^\tau,\qquad K_x(\tau,\tau)=D_x(\tau) \tag{1.9}$$

Здесь D_x, K_x — дисперсия и корреляционная функция вектора переменных состояния системы, D_η — интенсивность вектора белых шумов, A — матрица коэффициентов системы, T — символ транспонирования матрицы. В данной работе исследуются только стационарные случайные решения системы (1.3), поэтому из условия стационарности имеем

$$AD_x+D_xA^T+D_\eta=0 \tag{1.10}$$

Таким образом, для отыскания дисперсии и корреляционной функции вектора переменных состояния системы вначале необходимо решить систему линейных уравнений (1.10), а затем проинтегрировать уравнение (1.9) при начальном условии $K_x(0)=D_x$.

При нулевой расстройке ($\Delta=0$) можно положить $\Delta_1=\Delta_2=0$ и решить задачу аналитически (система (1.3) распадается на две независимые системы уравнений относительно координат x_{1c}, x_{2c} и x_{1s}, x_{2s}). Общий случай $\Delta\neq0$ будет изучен численно.

Для частного случая $\Delta=0$ имеем

$$D_{ic}=D_{is}=\frac{D_i}{2(\alpha_{ii}+\alpha_{jj})}\left[1+\frac{\alpha_{jj}^2+\gamma_{ij}^2D_j/D_i}{\alpha_{ii}\alpha_{jj}\mp\gamma_{ij}\gamma_{ji}}\right]\qquad (i=1,2;\ j=3-i)$$

$$D_{1s2s}=\mp D_{1c2c}=\frac{\pm D_1\alpha_{22}\gamma_{21}+D_2\alpha_{11}\gamma_{12}}{2(\alpha_{11}+\alpha_{22})(\alpha_{11}\alpha_{22}\mp\gamma_{12}\gamma_{21})} \tag{1.11}$$

Из приведенных выражений (1.11) для дисперсий видно, что разностный комбинационный резонанс наблюдается только при $\gamma_{12}\gamma_{21}<0$, а суммарный — при $\gamma_{12}\gamma_{21}>0$.

Используя полученные значения дисперсий в качестве начальных условий, проинтегрируем систему уравнений (1.9) и определим корреляционные функции координат системы (1.3):

$$K_{ic}(\tau)=D_{ic}\exp(-\alpha\tau)\{\mathrm{ch}\,\beta\tau+\beta^{-1}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{jj}-\alpha_{ii})+(\pm1)^j\gamma_{ij}D_{1c2c}/D_{ic}]\}$$

$$K_{is}(\tau)=D_{is}\exp(-\alpha\tau)\{\mathrm{ch}\,\beta\tau+\beta^{-1}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{jj}-\alpha_{ii})-(\pm1)^i\gamma_{ij}D_{1s2s}/D_{is}]\}$$

$$K_{icjc}(\tau)=D_{1c2c}\exp(-\alpha\tau)\{\mathrm{ch}\,\beta\tau+\beta^{-1}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{ii}-\alpha_{jj})+ \quad (1.12)$$

$$+(\pm1)^i\gamma_{ji}D_{ic}/D_{1c2c}]\}$$

$$K_{isjs}(\tau)=D_{1s2s}\exp(-\alpha\tau)\{\mathrm{ch}\,\beta\tau+\beta^{-1}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{ii}-\alpha_{jj})-$$

$$-(\pm1)^j\gamma_{ji}D_{is}/D_{1s2s}]\}$$

$$\tau\geqslant0,\ \alpha={}^1/_2(\alpha_{11}+\alpha_{22}),\ \beta=[{}^1/_4(\alpha_{11}-\alpha_{22})^2\pm\gamma_{12}\gamma_{21}]^{1/2} \quad (i=1,\ 2;\ j=3-i)$$

Зная корреляционные функции медленных переменных $x_{ic}(t)$, $x_{is}(t)$ ($i=1$, 2), легко определить корреляционные функции быстрых переменных $x_i(t)$ ($i=1$, 2). Для нулевых расстроек $\Delta_1=\Delta_2=0$ имеем

$$K_{x_ix_i}(\tau)=K_{ic}(\tau)\cos p_i\tau,\qquad K_{x_ix_j}(t,t+\tau)=K_{icjc}(\tau)\cos[(p_i\pm p_j)t\pm p_j\tau] \quad (1.13)$$

Отсюда следует, что в первом приближении при малых расстройках обобщенные координаты x_i ($i=1$, 2) являются стационарными, но не стационарно связанными случайными процессами. Можно также показать, что при малых расстройках огибающая и фаза обобщенных координат распределены соответственно по закону Релея и равномерному.

2. Воспользуемся полученными результатами для решения задачи идентификации комбинационного резонанса и оценки запаса устойчивости. Как отмечалось в [1], признаком наличия комбинационного резонанса является отличие от нуля коэффициента корреляции центрированных амплитуд случайных процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Однако, учитывая нелинейную зависимость амплитуд $a_i(t)$ от медленно меняющихся переменных $x_{ic}(t)$, $x_{is}(t)$ ($a_i=(x_{ic}^2+x_{is}^2)^{1/2}$), целесообразно рассмотреть корреляцию центрированных составляющих квадратов амплитуд

$$V_i(t)=x_{ic}^2(t)+x_{is}^2(t)-D_{ic}-D_{is} \quad (i=1,\ 2) \quad (2.1)$$

Для нормальных случайных процессов x_{ic}, x_{is} ($i=1$, 2) корреляционные функции квадратов центрированных амплитуд равны

$$K_{V_iV_j}(\tau)=2[K^2_{icjc}(\tau)+K^2_{icjs}(\tau)+K^2_{isjc}(\tau)+K_{isjs}(\tau)] \quad (i,j=1,2) \quad (2.2)$$

Аналитическое решение задачи при ненулевых расстройках сопряжено с громоздкими преобразованиями. Поэтому далее приводятся зависимости для $\Delta=0$, позволяющие сделать некоторые качественные выводы, а на графиках представлены результаты численных расчетов для общего случая $\Delta\neq0$.

Подставив в (2.2) выражения (1.12) для корреляционных функций, получим

$$K_{V_iV_i}(\tau)=4D_{ic}^2\exp(-2\alpha\tau)\{\mathrm{ch}\,\beta\tau+\beta^{-1}\,\mathrm{sh}\,\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{jj}-\alpha_{ii})+$$

$$+(\pm1)^j\gamma_{ij}D_{1c2c}/D_{ic}]\}^2,\qquad \tau\geqslant0 \quad (i=1,2;\ j=3-i) \quad (2.3)$$

Для нормированной взаимной корреляционной функции квадратов амплитуд соответственно получаем

$$\rho_{V_iV_j}(\tau)=\rho_{V_iV_j}(0)\exp(-2\alpha\tau)\{\operatorname{ch}\beta\tau+$$

$$+\beta^{-1}\operatorname{sh}\beta\tau[{}^1/_2(\alpha_{ii}-\alpha_{jj})+(\pm1)^i\gamma_{ji}D_{ic}/D_{1c2c}]\}^2 \qquad (2.4)$$

где

$$\rho_{V_iV_j}(0)=(D_2\alpha_{11}\gamma_{12}\pm D_1\alpha_{22}\gamma_{21})^2[D_1(\alpha_{11}\alpha_{22}\mp\gamma_{12}\gamma_{21}+\alpha_{22}^2)+$$

$$+\gamma_{12}^2D_2]^{-1}[D_2(\alpha_{11}\alpha_{22}\mp\gamma_{12}\gamma_{21}+\alpha_{11}^2)+\gamma_{21}^2D_1]^{-1} \qquad (2.5)$$

есть коэффициент корреляции квадратов амплитуд.

Из (2.4) видно, что коэффициент корреляции $\rho_{V_iV_j}(0)$ равен нулю только при $\gamma_{12}=\gamma_{21}=0$, т. е. при отсутствии комбинационного резонанса. Из этого выражения следует также, что $\rho_{V_iV_j}(0)=1$, только если

$$\alpha_{11}\alpha_{22}\mp\gamma_{12}\gamma_{21}=0 \qquad (2.6)$$

т. е. на границе области устойчивости системы (1.3) с $\eta_{ic}(t)\equiv0$, $\eta_{is}(t)\equiv0$, ($i=1, 2$). Более того, можно показать, что на границе области устойчивости, т. е. при выполнении условия (2.6), $\rho_{V_iV_j}(\tau)\equiv1$ для всех $\tau\geqslant0$.

На основании этого условие устойчивости системы (1.3) (а следовательно, и условие устойчивости в первом приближении системы (1.1)), выраженное через характеристики ее случайных колебаний, сформулируем следующим образом:

$$\rho_{V_iV_j}(0)<1 \qquad (2.7)$$

При $|\gamma_{12}\gamma_{21}|<\alpha_{11}\alpha_{22}$ нормированные взаимные корреляционные функции $\rho_{V_iV_j}(\tau)$ имеют максимум в той из двух точек

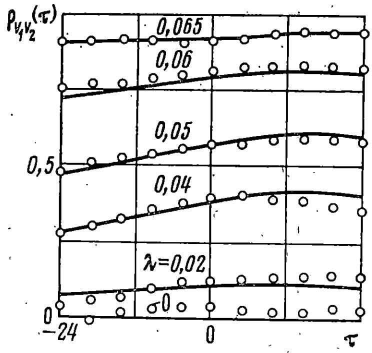
$$\tau_m=\beta^{-1}\operatorname{arth}Q,\qquad Q=\frac{(\pm1)^i2\beta(D_i\gamma_{ji}\mp D_j\gamma_{ij})}{(\pm1)^i\gamma_{ji}D_i(3\alpha_{jj}+\alpha_{ii})+(\pm1)^j\gamma_{ij}D_j(\alpha_{ii}-\alpha_{jj})} \qquad (2.8)$$

для которой $\tau_m\geqslant0$. Так как положение максимума зависит от разности $D_1|\gamma_{21}|-D_2|\gamma_{12}|$, то, например, наличие максимума кривой $\rho_{V_1V_2}(\tau)$ при $\tau>0$ свидетельствует о доминирующем вкладе силы, приложенной к первой массе, в возбуждение колебаний системы в условиях комбинационного резонанса (грубо говоря, первая масса «ведет» вторую).

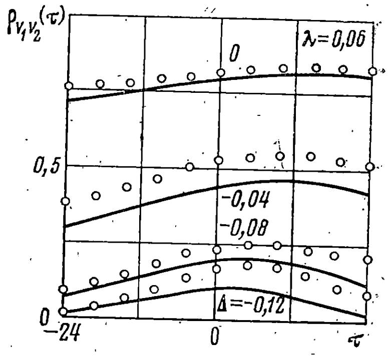
Таким образом, для идентификации комбинационного резонанса необходимо: выделить центрированные составляющие квадратов амплитуд процессов $x_1(t)$ и $x_2(t)$ (или квадратов амплитуд низкочастотной и высокочастотной компонент измеряемой в эксперименте линейной комбинации этих процессов); вычислить корреляционные функции и нормированную взаимную корреляционную функцию; по величине максимума нормированной взаимной корреляционной функции оценить степень их корреляции, а следовательно, и степень устойчивости системы; по положению максимума на кривой взаимной корреляционной функции качественно оценить вклад возбуждения по каждой из координат в наблюдаемые колебания системы.

3. Для проверки предложенного метода идентификации комбинационных резонансов была проведена серия численных экспериментов.

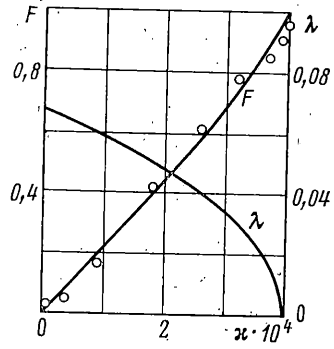
Дифференциальные уравнения (1.1) при $\Omega_1=1$, $\Omega_2=1{,}4$, $\alpha_{11}=\alpha_{22}=0{,}02$, $\alpha_{12}=\alpha_{21}=0$, $\lambda_{11}=\lambda_{22}=0$, $\lambda_{12}=\lambda_{21}=\lambda$ интегрировались численно на ЭВМ ЕС-1040 методом Рунге – Кутта с шагом $\Delta t=0{,}15$ при значениях $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, задававшихся датчиком псевдослучайных чисел, причем псевдослучайные числа брались через одно для исключения корреляции между ними. Дисперсия псевдослучайных чисел была подобрана таким образом, чтобы дисперсии широкополосных возмущений $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ были равны единице ($D_{\xi1}=D_{\xi2}=1$).



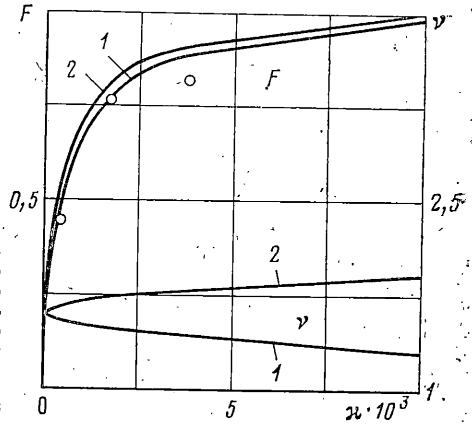
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Для выделения огибающих узкополосных случайных процессов x_1, x_2 использовался метод сопряженных случайных процессов [5]. Оценки корреляционных функций квадратов центрированных огибающих (на фиг. 1 – 4 показаны точками) определялись на основании анализа участков реализаций, содержащих не менее 3000 периодов низкочастотных колебаний.

Анализ результатов численного эксперимента показывает, что при нулевых расстройках (фиг. 1) оценка нормированной взаимной корреляционной функции достаточно хорошо совпадает с приближенной зависимостью, полученной методом усреднения (сплошная кривая). В случае ненулевых расстроек (фиг. 2) совпадение результатов несколько хуже.

На фиг. 3, 4 показана зависимость функции $F=1-\rho_{v_1v_2}(\tau_m)$ от аргумента

$$\varkappa=\alpha_{11}\alpha_{22}\left[1+\left(\frac{\delta_1+\delta_2}{\alpha_{11}+\alpha_{22}}\right)^2\right]-\gamma_{12}\gamma_{21}$$

Функцию F можно рассматривать как показатель запаса устойчивости системы (1.1) при широкополосном случайном возбуждении, а $\varkappa$ есть запас устойчивости системы (1.3), без внешнего случайного возбуждения.

Зависимость $F(\varkappa)$ (фиг. 3) построена по формулам (2.4) при варьировании амплитуд параметрического возбуждения λ и нулевых расстройках $\Delta_1=\Delta_2=0$. Как следует из фигур, в этом случае между запасами устойчивости F и $\varkappa$ существует почти линейная зависимость. При ненулевых расстройках $\Delta_1=\Delta_2={}^1/_2\Delta$ зависимость $F(\varkappa)$ (фиг. 4) построена по результатам численного решения уравнений моментов при $\lambda=0{,}06$, и варьировании частоты параметрического возбуждения.

Результаты численного моделирования указывают на удовлетворительную точность оценки запаса устойчивости системы по максимальному значению нормированной взаимной корреляционной функции. Заметим также, что при заданных параметрах системы и воздействия максимум нормированной взаимной корреляционной функции $\rho_{v_1v_2}(\tau)$ находился на правой ветви, что свидетельствует о бо́льшем вкладе силы, приложенной к первой массе, в возбуждение параметрического резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг М. Ф., Исиков Н. Е.* Колебания систем с периодически изменяющимися параметрами при случайных воздействиях.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977 № 4, с. 79–86.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1956. 600 с.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
4. *Солодов А. В., Петров Ф. С.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. М.: Наука, 1971. 620 с.
5. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.

Москва

Поступила в редакцию 24.VII.1981