МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1983

УДК 533.6.013.42

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СИСТЕМЕ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЕ СЖИМАЕМОЕ ТВЕРДОЕ ТЕЛО — ВЯЗКАЯ СЖИМАЕМАЯ ЖИДКОСТЬ

БАГНО А. М., ГУЗЬ А. Н.

В известных работах по аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями в основном приведены результаты, полученные при использовании двумерных уравнений различных прикладных теорий [1, 2]. Однако эти результаты с допустимой погрешностью могут быть применены только для тонкостенных конструкций или при исследований распространения длинных волн. Для анализа распространения высокочастотных волн в случае толстостенных упругих тел, а также для определения пределов применимости прикладных теорий необходимо решение указанных задач в трехмерной постановке. В общем виде постановки трехмерных задач аэрогидроупругости для предварительно напряженных сжимаемых и несжимаемых тел, взаимодействующих с вязкой сжимаемой жидкостью, приведены в [3, 5]. В [4, 6] в рамках линеаризированной теории упругости конечных деформаций для упругого тела и линеаризированных уравнений Навье — Стокса для вязкой ньютоновской жидкости предложен метод решения связанных задач.

Посредством указанного метода удалось получить представления общих решений не только для уравнений движения предварительно напряженного упругого тела, но и для вязкой сжимаемой жидкости.

В публикуемой работе этот метод применен к исследованию распространения волн в полом сжимаемом цилиндре, содержащем вязкую сжимаемую жидкость и подверженном большим (конечным) начальным деформациям.

1. Постановка задачи. Рассмотрим бесконечно длинный сжимаемый полый круговой цилиндр толщиной $2h$ и радиусом срединной поверхности R, находящийся в однородном начальном деформированном состоянии. Исследование выполним в цилиндрической системе координат (r, θ, z), также введенной в начальном состоянии. Будем считать, что материал твердого тела — нелинейно-упругий с упругим потенциалом произвольной формы, а математической моделью, описывающей движение твердого тела, служат линеаризованные уравнения теории упругости конечных деформаций [7]. Ньютоновская вязкая жидкость описывается системой линеаризированных уравнений Навье — Стокса.

В рамках принятых моделей уравнения динамики для системы предварительно напряженный сжимаемый цилиндр — вязкая сжимаемая жидкость записываются в виде

$$v_r=\partial u_r/\partial t,\quad v_\theta=\partial u_\theta/\partial t,\quad v_z=\partial u_z/\partial t \quad \text{при} \quad r=R-h \tag{1.1}$$

$$Q_r=P_{rr},\quad Q_\theta=P_{r\theta},\quad Q_z=P_{rz} \quad \text{при} \quad r=R-h \tag{1.2}$$

$$Q_r=0,\quad Q_\theta=0,\quad Q_z=0 \quad \text{при} \quad r=R+h \tag{1.3}$$

$$Q_r=T\left[(\lambda_1^2a_{11}+s_{11})\frac{\partial u_r}{\partial r}+\lambda_1^2a_{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\lambda_3^2a_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}\right] \tag{1.4}$$

$$Q_\theta=T\left[(\lambda_1^2\mu_{12}+s_{11})\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\lambda_1^2\mu_{12}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)\right],\quad T=\frac{\lambda_1^2}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \tag{1.5}$$

$$Q_z=T\left[\lambda_3^2\mu_{13}\frac{\partial u_r}{\partial z}+(\lambda_3^2\mu_{13}+s_{11})\frac{\partial u_z}{\partial z}\right],\qquad s_{\beta\beta}=\frac{\delta_{\beta\beta}^0}{\lambda_\beta^2}\tag{1.6}$$

$$P_{rr}=p+\lambda^*\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}\right)+2\mu^*\frac{\partial v_r}{\partial r}\tag{1.7}$$

$$P_{r\theta}=\mu^*\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r}\right),\quad P_{rz}=\mu^*\left(\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)\tag{1.8}$$

Здесь v_r, v_θ, v_z — составляющие вектора скорости жидкости; μ^* и λ^* — коэффициенты вязкости; P_{rr}, $P_{r\theta}$, P_{rz} — составляющие вектора напряжений в жидкости; t — время; ρ — плотность материала цилиндра; Q_r, Q_θ, Q_z — составляющие вектора напряжений на поверхности тела; u_r, u_θ и u_z — компоненты вектора перемещений твердого тела; λ_i — удлинения; a_{ik} и μ_{ik} — коэффициенты уравнений состояния твердого тела; $\sigma_{\beta\beta}^0$ — «истинные» начальные напряжения.

Соотношения (1.1) — это записанные в скалярном виде кинематические условия, отражающие прилипание частиц вязкой жидкости к внутренней поверхности цилиндра. Непрерывность напряжений в цилиндре и жидкости на границе контакта отражена в равенствах (1.2). Уравнения (1.3) получены на основании отсутствия напряжений на внешней боковой поверхности полого цилиндра.

В дальнейшем воспользуемся представлениями общих решений уравнений движения упругих тел, подверженных конечным начальным деформациям и вязкой сжимаемой жидкости, полученными в [4, 5]:

$$v_r=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t\,\partial\theta}-\frac{\partial^3\psi_3}{\partial t\,\partial r\,\partial z},\quad v_\theta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\,\partial\theta}-\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t\,\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^3\psi_3}{\partial t\,\partial\theta\,\partial z}$$

$$v_z=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\,\partial z}-\left[\left(\frac{1}{\nu^*}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]\psi_3\tag{1.9}$$

$$u_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_4}{\partial\theta}+\frac{\partial^2\psi_5}{\partial r\,\partial z},\quad u_\theta=-\frac{\partial\psi_4}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi_5}{\partial\theta\,\partial z}$$

$$u_z=\lambda_3^{-2}\frac{\lambda_1^2a_{11}+s_{11}}{a_{13}+\mu_{13}}\left(\Delta_1+\frac{\lambda_3^2}{\lambda_1^2}\frac{\lambda_1^2\mu_{13}+s_{33}}{\lambda_1^2a_{11}+s_{11}}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho\lambda_1^{-2}}{\lambda_1^2a_{11}+s_{11}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi_5$$

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.\tag{1.10}$$

Для исследования процесса распространения гармонических возмущений решение исходной системы уравнений будем разыскивать в классе бегущих волн

$$\psi_j(r,\ \theta,\ z,\ t)=\Psi_j(r)\exp[i(kz-\omega t)]s_j(n\theta)=$$
$$=\Psi_j(r)\exp(-\gamma z)\exp[\omega i(z/c-t)]s_j(n\theta)\tag{1.11}$$
$$s_j(n\theta)=\sin n\theta\quad\text{при}\quad j=2m,$$
$$s_j(n\theta)=\cos n\theta\quad\text{при}\quad j=2m+1,\qquad j=\overline{1,6}$$

где c — фазовая скорость; γ — коэффициент затухания; k — постоянная распространения, ω — частота.

Подставляя соотношения (1.9)—(1.11) в граничные условия, в результате обычной процедуры получаем систему девяти линейных однородных алгебраических уравнений. Из условия существования нетривиального решения выводим искомое дисперсионное уравнение, описывающее распространение волн в предварительно напряженном полом сжимаемом цилиндре, содержащем вязкую сжимаемую жидкость

$$\det\|\alpha_{ij}(\lambda_k,\ \sigma_{\beta\beta}^0,\ a_{km},\ \mu_{km},\ \rho,\ \nu^*,\ \rho_0,\ a_0,\ k,\ \omega)\|=0 \qquad (i,j=\overline{1,\ 9}) \tag{1.12}$$

Дисперсионное уравнение (1.12) является общим и содержит ряд частных случаев.

При $n=0$ имеем осесимметричный волновой процесс. Если устремить a_0 к «бесконечности», то из (1.12) получим дисперсионное уравнение для случая, когда полый цилиндр содержит вязкую несжимаемую жидкость. При $\nu^*=0$ уравнение (1.12) переходит в дисперсионное соотношение, описывающее процесс распространения волн в системе цилиндр — идеальная сжимаемая жидкость. Положив ρ_0 равным нулю, получим дисперсионное уравнение, характеризующее волновой процесс в цилиндре, не взаимодействующем с жидкостью. Если $h=0$ получаем дисперсионное уравнение для сплошного цилиндра. Можно получить еще ряд частных случаев за счет выбора конкретной формы упругого потенциала.

2. Высокочастотные волны в бесконечном теле с цилиндрической полостью, наполненной вязкой сжимаемой жидкостью. Характеристическое уравнение для указанной системы в случае высокочастотных волн является также частным случаем общего дисперсионного уравнения (1.12) и имеет вид

$$R_1S_2-R_2S_1=0 \tag{2.1}$$

$$R_j=\frac{\rho c^2 a_{13}}{\lambda_1^2\lambda_3}-\frac{a_{13}(\lambda_3\mu_{13}+\sigma_{33}^0)}{a_{13}+\mu_{13}}-\frac{\lambda_1^2 a_{11}\mu_{13}\gamma_j^2}{\lambda_3(a_{13}+\mu_{13})}+\delta\gamma_j+\delta L_j-$$
$$-\frac{E_1\gamma_j}{\gamma_4}-\frac{E_1L_j}{\gamma_4}-\delta\gamma_4\gamma_3L_j-\delta\gamma_3L_j$$

$$S_j=\left[\frac{(\lambda_3\mu_{13}+\sigma_{33}^0)\mu_{13}}{a_{13}+\mu_{13}}-\lambda_3\mu_{13}\right]\gamma_j-\frac{\lambda_1^2 a_{11}\mu_{13}}{\lambda_3(a_{13}+\mu_{13})}\left(\gamma_j^2+\frac{\rho c^2}{\lambda_1^4 a_{11}}\right)\gamma_j-$$
$$-2\delta\gamma_j\gamma_4-2\delta\gamma_4L_j-\nu^*\omega\rho_0[2i-c^2/(\nu^*\omega)]L_j$$

$$\delta=\nu^*\rho_0 i\omega\gamma_4,\quad L_j=(M_j+\gamma_j/\gamma_4)/(\gamma_3-1/\gamma_4)$$

$$M_j=\frac{\lambda_1^2 a_{11}\gamma_j^2}{\lambda_3^2(a_{13}+\mu_{13})}-\frac{\lambda_3\mu_{13}+\sigma_{33}^0}{\lambda_3(a_{13}+\mu_{13})}+\frac{\rho c^2}{\lambda_3^2\lambda_1^2(a_{13}+\mu_{13})}$$

$$\gamma_3^2=1-\frac{ic^2}{\nu^*\omega},\quad \gamma_4^2=1-\frac{3c^2}{3a_0^2-4\nu^* i\omega},\quad \lambda^*=-\frac{2}{3}\mu^*,\quad \nu^*=\frac{\mu^*}{\rho_0},\quad i=\sqrt{-1}$$

$$E_1=\frac{\mu^* i\omega}{3}(\gamma_4^2-1)+\frac{4}{3}\nu^*\lambda^*\frac{c^2}{a_0^2}(1-\gamma_4^2)-\rho_0c^2+\frac{i}{2}\lambda^* c^2\omega$$

Выражения для γ_1 и γ_2 приведены в [8].

Модель предварительно напряженного тела наиболее общая и содержит в себе как частный случай также модель тела, лишенного начальных напряжений. Для получения уравнения, описывающего поведение тел, не подверженных начальным деформациям, необходимо в (2.1) положить $\sigma_{33}^0=0$, $\lambda_i=1$. Можно показать, что при отсутствии как начальных деформаций, так и жидкости уравнение (2.1) совпадает с уравнением для определения скорости поверхностных волн Рэлея [9]:

$$4\sqrt{1-c^2/c_s^2}\sqrt{1-c^2/c_l^2}-(2-c^2/c_s^2)^2=0 \tag{2.2}$$

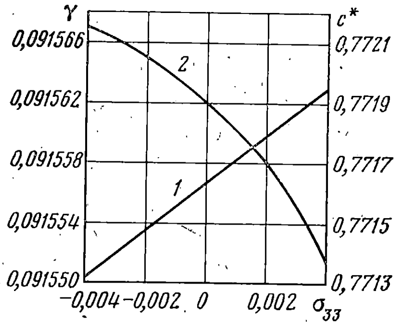
При отсутствии начальных напряжений в случае взаимодействия упругого тела с идеальной сжимаемой жидкостью равенство (2.1) переходит в известное уравнение для определения скорости волн Стоунли [9]:

$$4\sqrt{1-\frac{c^2}{c_s^2}}\sqrt{1-\frac{c^2}{c_l^2}}-\left(2-\frac{c^2}{c_s^2}\right)^2-\frac{\rho_0c^4\sqrt{1-c^2/c_l^2}}{\rho c_s^4\sqrt{1-c^2/a_0^2}}=0 \tag{2.3}$$

Сравнительный анализ уравнений (2.1)—(2.3) показывает, что в отличие от волн Рэлея и Стоунли высокочастотные волны в системе упругое тело — вязкая жидкость обладают дисперсией и являются затухающими.

В дальнейшем уравнение (2.1) решалось численно на ЭВМ ЕС-1040 методом итераций для системы предварительно напряженное органическое стекло [10] — вода [11] с переменными: $\rho=1160$ кг/м^3, $\lambda=3{,}96\cdot10^9$ Па, $\mu=1{,}86\cdot10^9$ Па, $a=-3{,}91\cdot10^9$ Па, $b=-7{,}02\cdot10^9$ Па, $d=-14{,}1\cdot10^9$ Па, $\mu^*=1{,}3\cdot10^{-3}$ кг/м·с, $\rho_0=1\cdot10^3$ кг/м^3, $a_0=1459{,}5$ м/с, $t_0{}^0=10°$ С.

В [10] показано, что для объяснения экспериментально наблюдаемых закономерностей распространения волн в телах, подверженных начальным напряжениям, необходимо привлекать трехинвариантные упругие потенциалы. Поэтому при численном решении уравнения (2.1) для описания упругих свойств органического стекла использовался простейший трехинвариантный упругий потенциал — потенциал Мурнагана [12].



На фигуре представлены зависимости $c^*=f(\sigma_{33})$ (кривая *1*) и $\gamma=g(\sigma_{33})$ (кривая *2*), полученные численно, где $c^*=c/c_s$, c — фазовая скорость высокочастотных волн в предварительно напряженном теле, c_s — скорость волн сдвига в незагруженном бесконечном теле, γ — коэффициент затухания, м$^{-1}$, $\sigma_{33}=\sigma_{33}{}^0/\mu$, $\sigma_{33}{}^0$ — начальные напряжения, возникающие при действии нагрузки вдоль оси oz, μ — модуль упругости при сдвиге.

Из приведенных графиков следует, что для волн, распространяющихся в системе органическое стекло — вода с частотой $\omega=5\cdot10^6$ с$^{-1}$, в рамках моделей, учитывающих начальные деформации и вязкость, с ростом начальных напряжений величина фазовой скорости растет, а коэффициента затухания — падает.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Atabek H. B., Lew H. S.* Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube.— Biophys. J., 1966, v. 6, № 4, p. 481—503.
2. *Рачев А. И.* Распространение пульсовой волны в артериальных сосудах с учетом предварительных напряжений и мышечной активности.— Механика полимеров, 1978, № 2, с. 301—311.
3. *Гузь А. Н.* О задачах гидроупругости для вязкой жидкости и упругих тел с начальными напряжениями.— Докл. АН УССР, 1980, т. 251, № 2, с. 305—308.
4. *Гузь А. Н.* О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 3, с. 3—21.
5. *Гузь А. Н.* Распространение волн в цилиндрической оболочке с вязкой сжимаемой жидкостью.— Прикл. механика, 1980, т. 16, № 10, с. 10—20.
6. *Гузь А. Н.* О представлении решений линеаризированных уравнений Стокса — Навье для движущейся жидкости.— Докл. АН УССР, 1980, т. 255, № 5, с. 1066—1068.
7. *Гузь А. Н.* Устойчивость упругих тел при всестороннем сжатии.— Киев: Наук. думка, 1979. 143 с.
8. *Багно А. М.* О распространении продольных волн в предварительно напряженном сжимаемом цилиндре, содержащем жидкость.— Прикл. механика, 1980. т. 16, № 8, с. 24—29.
9. *Викторов И. А.* Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах: Обзор.— Акуст. ж., 1979, т. 25, № 1, с. 1—17.
10. *Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуща О. И.* Введение в акустоупругость. Киев: Наук. думка, 1977. 152 с.
11. *Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. М.: Наука, 1975. 256 с.
12. *Murnaghan F. D.* Finite deformation of an elastic solid.— New York: Willey; London: Chapman, 1951. 140 p.

Киев

Поступила в редакцию
23.VI.1981