МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 · 1983

УДК 534.1

К УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

СЕМЕНОВ В. А., СМИРНОВ А. И.

Изучается структура и конфигурация областей устойчивости линейных стохастических систем в случае, когда параметрическое возбуждение является периодически нестационарным случайным процессом. Параметрическое воздействие задается мультипликативным или аддитивным представлениями детерминированной периодической функции времени и некоторой случайной стационарной функции с дробно-рациональной спектральной плотностью. Для построения границ областей устойчивости используется метод моментных функций [1, 2] совместно с численным методом исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [3].

1. Пусть возмущенное движение системы описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2}+2\varepsilon\frac{du}{dt}+\omega_0^2[1+\Phi(t)]u=0 \tag{1.1}$$

Здесь ω_0, ε — действительные положительные постоянные, $\Phi(t)$ — некоторая периодически нестационарная случайная функция относительно которой будем предполагать, что она может быть представлена одним из соотношений

$$\Phi(t)=\mu\varphi_1(t)\varphi_2(\omega t) \tag{1.2}$$

$$\Phi(t)=\mu_1\varphi_1(t)+\mu_2\varphi_2(\omega t) \tag{1.3}$$

где μ, μ_1, μ_2, ω — параметры возбуждения, $\varphi_2(\omega t)$ — детерминированная периодическая функция времени, $\varphi_1(t)$ — либо стационарный гауссовский белый шум, либо стационарный гауссовский процесс, удовлетворяющий соответственно уравнениям

$$\frac{d\varphi_1(t)}{dt}+\alpha\varphi_1(t)=\xi(t) \tag{1.4}$$

$$\frac{d^2\varphi_1(t)}{dt^2}+2\alpha\frac{d\varphi_1(t)}{dt}+\theta^2\varphi_1(t)=\xi(t) \tag{1.5}$$

Здесь и в дальнейшем $\xi(t)$ — стационарный гауссовский белый шум с математическим ожиданием, равным нулю.

Следуя [1, 2], введем вектор переменных $\mathbf{x}(t)=\{y_1(t),\ldots,y_n(t);z_1(t),\ldots,z_{n_1}(t)\}'$, где $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{z}(t)$ — вектора фазовых переменных для уравнения (1.1) и уравнения формирующего фильтра соответственно. Поведение системы в расширенном фазовом пространстве является марковским процессом. Вводя безразмерные параметры $t'=\omega_0 t$, $s'=s/\omega_0$, $\gamma=\varepsilon/\omega_0$, $\rho=\alpha/\omega_0$, $\nu=\omega/\omega_0$, $\vartheta=\Theta/\omega_0$, полагая $s'=1$ и опуская штрих при t', запишем соответствующие стохастические дифференциальные уравнения Ито

($w(t)$ — одномерный винеровский процесс):

$$dx_1=x_2dt, \quad dx_2=-(ax_1+2\gamma x_2)\,dt-bx_1dw \tag{1.6}$$

$$dx_1=x_2dt, \quad dx_2=-(ax_1+2\gamma x_2+bx_1x_3)\,dt \tag{1.7}$$

$$dx_3=-\rho x_3dt+dw$$

$$\begin{aligned} dx_1&=x_2dt, & dx_2&=-(ax_1+2\gamma x_2+bx_1x_3)\,dt \\ dx_3&=x_4dt, & dx_4&=-(2\rho x_1+\vartheta^2x_3)\,dt+dw \end{aligned} \tag{1.8}$$

Уравнения (1.6) соответствуют возмущению $\varphi_1(t)=\xi(t)$, а (1.7) и (1.8) — случаям (1.4) и (1.5). Коэффициенты a и b в уравнениях (1.6)—(1.8) определяются выражениями $a=1$, $b=\mu\varphi_2(\nu t)$ или $a=1+\mu_2\varphi_2(\nu t)$, $b=\mu_1$ в зависимости от того, какое из соотношений (1.2) или (1.3) использовано для представления параметрического воздействия $\Phi(t)$.

Будем исследовать устойчивость нулевого решения $u(t)\equiv 0$ по отношению к моментным функциям порядка r [1, 2]:

$$m_{\underbrace{jkl\ldots}_{r}}(t)=\langle x_j(t)\,x_k(t)\,x_l(t)\ldots\rangle \qquad (j,\,k,\,l,\ldots=1,\,2,\ldots,\,n+n_1) \tag{1.9}$$

Образуем из моментных функций (1.9) вектор

$$\mathbf{m}_0{}^r(t)=\{\mathbf{m}_1{}'(t),\ \mathbf{m}_2{}'(t),\ldots,\mathbf{m}_r{}'(t)\}' \tag{1.10}$$

компонентами которого являются моментные функции процесса $\mathbf{x}(t)$ от первого до r-го порядка включительно, соответствующее векторное пространство обозначим $M_1{}^r$, а норму в векторном пространстве — $\|\mathbf{m}_0{}^r\|$. Решение $u(t)\equiv 0$ назовем устойчивым по совокупности моментных функций порядка r (или до порядка r включительно), если для каждого $\beta>0$ можно найти такое $\delta(\beta)>0$, что из условия $\|\mathbf{m}_0{}^r(t_0)\|<\delta$ следует

$$\sup_{t_0\leqslant t<\infty}\|\mathbf{m}_0{}^r(t)\|<\beta \tag{1.11}$$

Для получения уравнений относительно моментных функций используем уравнения Колмогорова для переходных плотностей вероятности $p(\mathbf{x},\,t)$ диффузионных марковских процессов $\mathbf{x}(t)$, которые в случае систем (1.6)—(1.8) имеют соответственно вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}=2\gamma p-x_2\frac{\partial p}{\partial t}+(ax_1+2\gamma x_2)\frac{\partial p}{\partial x_2}+\frac{x_1{}^2}{2}b\frac{\partial^2 p}{\partial x_2{}^2} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=(2\gamma+\rho)p-x_2\frac{\partial p}{\partial x_1}+(ax_1+2\gamma x_2+bx_1x_3)\frac{\partial p}{\partial x_2}+\rho x_3\frac{\partial p}{\partial x_3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_3{}^2} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial t}&=2(\gamma+\rho)p-x_2\frac{\partial p}{\partial x_1}+(ax_1+2\gamma x_2+bx_1x_3)\frac{\partial p}{\partial x_2}-\\ &-x_4\frac{\partial p}{\partial x_3}+(\vartheta^2x_3+2\rho x_4)\frac{\partial p}{\partial x_4}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_4{}^2}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Структура уравнения (1.12) такова, что относительно моментных функций определенного порядка r получается независимая система уравнений, которая позволяет исследовать устойчивость нулевого решения уравнения (1.1), используя определение устойчивости по отношению к моментным функциям различного порядка. Уравнения относительно моментных функций $m_{jkl\ldots}(t)$ порядка r представим в матричной форме

$$d\mathbf{m}_r/dt=A(t)\mathbf{m}_r \qquad (r=1,\,2,\ldots) \tag{1.15}$$

где $A(t)$ — квадратная матрица размерности $r+1$ с периодическими элементами. Отличные от нуля элементы матрицы имеют вид

$$a_{j,j}=-2(j-1)\gamma, \quad a_{j,j-1}=-a(j-1) \tag{1.16}$$

$$a_{j,j+1}=r+1-j, \quad a_{j,j-2}={}^1/_2(j-1)(j-2)b^2$$

Из уравнений (1.13) и (1.14) вследствие стохастической нелинейности (1.7) и (1.8) относительно моментных функций получаем бесконечную систему связанных уравнений, правые части которых содержат моментные функции более высокого порядка. После редукции бесконечной системы уравнений к системе конечного числа уравнений на основе гипотезы квазигауссовости приходим к нелинейной системе дифференциальных уравнений. Если демпфирование в исходной системе отлично от нуля, то для полученной системы выполняются все условия теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Вследствие этого после линеаризации приходим к системе дифференциальных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами вида (1.15). Матрица $A(t)$ для экспоненциально-коррелированного процесса $\varphi_1(t)$ (1.4) и процесса со скрытой периодичностью в приближении вторых моментных функций имеет седьмой и девятый порядок соответственно.

Дальнейший анализ устойчивости нулевого решения уравнения (1.1) по отношению к моментным функциям сводится к определению области устойчивости тривиального решения системы вида (1.15) с периодическими коэффициентами.

Для определения границ области устойчивости использовался численный метод исследования устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [3], основанный на теории Флоке – Ляпунова. Выделение областей устойчивости производилось на плоскости (μ, ν) при фиксированных значениях остальных параметров. Координаты границы считались найденными, если выполнялось условие $|\mu_+-\mu_-|<10^{-3}$, где точки (μ_+, ν) и (μ_-, ν) лежат по разные стороны от границы.

2. Рассмотрим устойчивость нулевого решения стохастического уравнения (1.1), когда $\varphi_1(t)=\xi(t)$, $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$.

Для мультипликативного представления процесса $\Phi(t)$ (1.2) границы области неустойчивости не зависят от частоты возбуждения ν. Условием устойчивости для системы моментных функций первого порядка (условие устойчивости в среднем) является положительность коэффициента демпфирования ($\gamma>0$). Нулевое решение системы устойчиво относительно моментных функций второго порядка (устойчивость в среднем квадратическом), если $\mu^2<8\gamma$. Аналогичный результат получен в [4] методом малого параметра. Учитывая, что дисперсия процесса $\Phi(t)$ равна $\sigma_\Phi{}^2=\mu^2(1+\cos 2\nu t)/2$, приходим к выводу, что периодически нестационарное воздействие $\Phi(t)=\mu\xi(t)\cos\nu t$ эквивалентно по устойчивости воздействию в виде стационарного гауссовского белого шума с интенсивностью, в два раза меньшей [5].

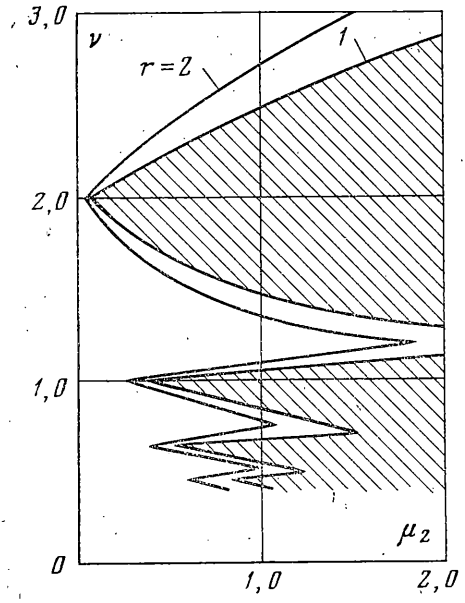
Система (1.15) некоторой заменой переменных $\mathbf{m}_r=L(t)\varkappa$ ($L(t)$ — матрица Ляпунова) приводима к системе уравнений с постоянными коэффициентами

$$d\varkappa/dt=A_0\varkappa \tag{2.1}$$

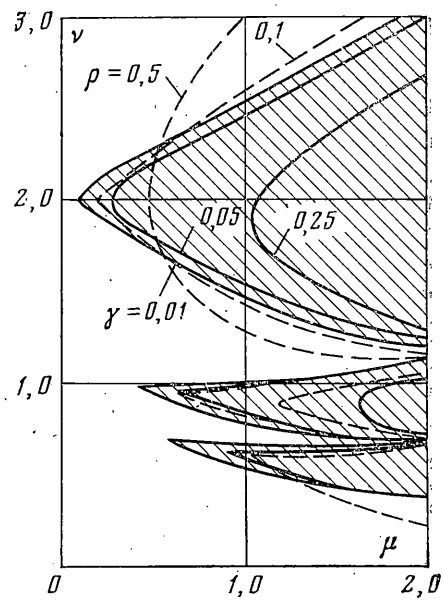
Матрица A_0 размерности $r+1$ соответствует системе уравнений относительно моментных функций порядка r для уравнения (1.1), возбуждаемого стационарным гауссовским белым шумом с интенсивностью $s/2$. Отличные от нуля элементы матрицы определяются выражениями

$$\overset{0}{a}_{j,j}=-2(j-1)\gamma, \quad \overset{0}{a}_{j,j-1}=-(j-1)$$

$$\overset{0}{a}_{j,j+1}=r+1-j, \quad \overset{0}{a}_{j,j-2}={}^1/_4(j-1)(j-2)\mu^2$$



Фиг. 1



Фиг. 2

При аддитивном представлении процесса $\Phi(t)$ (1.3), где $\varphi_1(t)=\xi(t)$, $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$, на конфигурацию областей устойчивости нулевого решения системы существенное влияние оказывает второе слагаемое в (1.3). Области устойчивости уравнения (1.1) по моментным функциям первого порядка соответствуют областям устойчивости уравнения Матье

$$\frac{d^2m_1}{dt^2}+2\gamma\frac{dm_1}{dt}+(1+\mu_2\cos\nu t)\,m_1=0 \tag{2.2}$$

и не зависят от интенсивности белого шума.

На фиг. 1 показаны границы областей устойчивости, соответствующие стохастической устойчивости по моментным функциям порядка $r=1$, 2, для случая $\gamma=0{,}01$, $\mu_1=0{,}15$. Области неустойчивости для $r=1$ заштрихованы.

Как и в случае мультипликативного представления процесса $\Phi(t)$, с увеличением порядка моментных функций условия устойчивости получаются жестче. Если $\mu_1^2>4\gamma$, то система (1.1) неустойчива в среднем квадратическом при любых значениях ν и μ_2. Относительно моментных функций третьего порядка система неустойчива, если выполняется хотя бы одно из условий

$$\mu_1^2>4\gamma^2(4+37\gamma^2+40\gamma^4),\quad \mu_1^2>(1+8\gamma^2)/(4\gamma) \tag{2.3}$$

3. Для экспоненциально-коррелированного процесса $\varphi_1(t)$ с корреляционной функцией

$$K_{\varphi_1}(\tau)=\sigma_{\varphi_1}^2e^{-\rho|\tau|} \tag{3.1}$$

где $\sigma_{\varphi_1}^2=s/2\rho$, система уравнений (1.15) относительно моментных функций до второго порядка включительно разделяется на две независимые системы (a и b — коэффициенты, зависящие от вида процесса $\Phi(t)$):

$$dm_{11}/dt=2m_{12},\ dm_{12}/dt=-am_{11}-2\gamma m_{12}+m_{22}$$
$$dm_{22}/dt=-2am_{12}-4\gamma m_{22} \tag{3.2}$$

$$dm_1/dt=m_2,\ dm_2/dt=-am_1-2\gamma m_2-bm_{13}$$
$$dm_{13}/dt=-\rho m_{13}+m_{23},\ dm_{23}/dt=-b\sigma_{\varphi_1}^2m_1-am_{13}-(2\gamma+\rho)\,m_{23} \tag{3.3}$$

При мультипликативном представлении $\Phi(t)$ условием устойчивости системы (3.2) с постоянными коэффициентами является положительность коэффициента демпфирования.

Анализ системы (3.3) в случае $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$ дает границы областей устойчивости (фиг. 2), которые имеют вид клиньев, примыкающих при $\gamma\to 0$ к точкам на оси частот

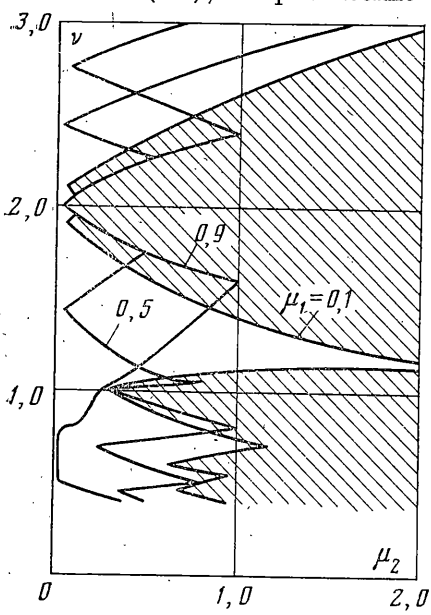
$$\gamma=2/p \quad (p=1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

Фигура иллюстрирует влияние демпфирования γ и коэффициента широкополосности ρ процесса $\varphi_1(t)$ на области неустойчивости системы. Сплошными линиями нанесены границы областей неустойчивости, полученные для различных значений коэффициента γ при $\rho=0{,}02$. Штриховыми – для различных значений ρ при $\gamma=0{,}01$. Области неустойчивости для случая $\gamma=0{,}01$, $\rho=0{,}02$ заштрихованы. При вычислениях было принято $\sigma_{\varphi_1}^2=1$.

Для процесса $\Phi(t)$ вида (1.3) и $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$ критические значения частот возбуждения системы (3.2) при $\gamma\to 0$, $\mu_2\to 0$ определяются соотношением (3.4), а критические частоты возбуждения системы (3.3) при $\gamma\to 0$, $\mu_2\to 0$ и $\rho\ll 1$ равны

$$\nu=2\sqrt{1\pm\mu_1}/p \quad (p=1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

Из частотного соотношения (3.5) следует, что если коэффициент возбуждения $\mu_1>1$, то нулевое решение системы (3.3) при $\mu_2=0$ неустойчиво, а для $\mu_2>0$ возможно явление параметрической стабилизации.



Фиг. 3

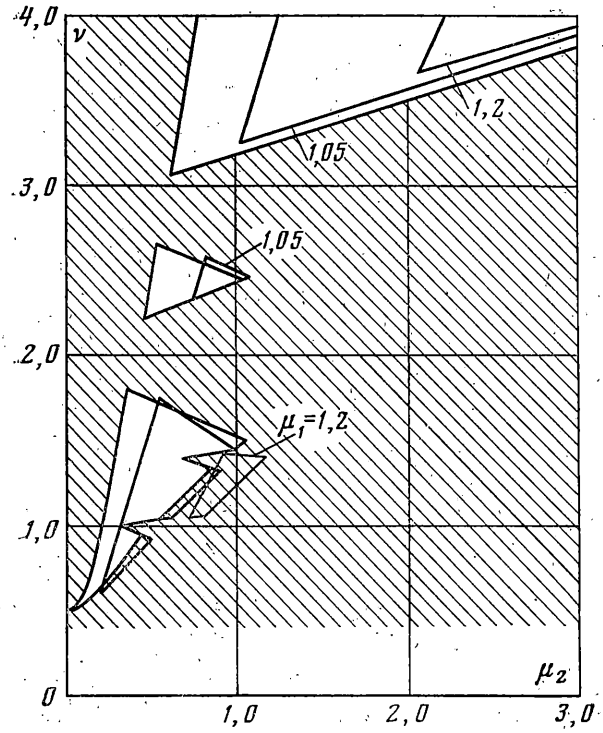
На фиг. 3 показаны области неустойчивости системы (1.1) по совокупности моментных функций первого и второго порядков для различных значений μ_1 при $\gamma=0{,}01$, $\rho=0{,}02$. Как видно из фигуры, все параметрические резонансы соответствуют соотношениям (3.4) и (3.5). С увеличением коэффициента широкополосности ρ процесса $\varphi_1(t)$ избирательная способность резонансов вблизи частот (3.5) существенно снижается, это следует из структуры системы (3.3), а резонансы, определяемые соотношением (3.4), не трансформируются, так как ρ не входит в систему (3.2). На фигуре заштрихованы области неустойчивости, соответствующие случаю $\mu_1=0{,}1$.

Области стабилизации системы на плоскости (μ_2, ν) показаны на фиг. 4 и 5. С увеличением параметра возбуждения μ_1 область стабилизации уменьшается. На фиг. 4 область неустойчивости при $\gamma=0{,}01$, $\rho=0{,}02$, соответствующая значению $\mu_1=1{,}02$, заштрихована. Изменение структуры и конфигурации области стабилизации в зависимости от коэффициента широкополосности ρ при $\gamma=0{,}01$, $\mu_1=1{,}05$ показано на фиг. 5. Для случая $\rho=0{,}02$ области стабилизации оставлены незаштрихованными. Как следует из полученных результатов, с увеличением ρ область параметрической стабилизации системы расширяется. Левая граница области стабилизации смещается к оси частот и при $\rho=0{,}4$ сливается с ней. Вычисления проводились для значения $\sigma_{\varphi_1}^2=1$.

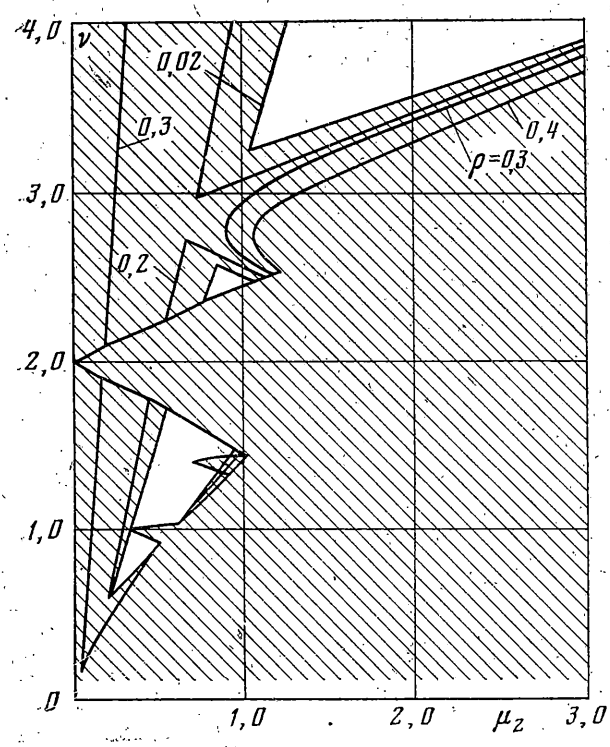
4. Пусть теперь процесс $\varphi_1(t)$ задан формирующим фильтром (1.5). Корреляционная функция процесса $\varphi_1(t)$ имеет вид

$$K_{\varphi_1}(\tau)=\sigma_{\varphi_1}^2 e^{-\rho|\tau|}\left(\cos\vartheta_\rho\tau+\frac{\rho}{\vartheta_\rho}\sin\vartheta_p|\tau|\right) \tag{4.1}$$

$$(\sigma_{\varphi_1}^2=s/4\rho\vartheta^2,\ \vartheta^2=\vartheta_p^2+\rho^2)$$


4,0
ν
1,2
1,05
3,0
1,05
2,0
μ_1=1,2
1,0
μ_2
0
1,0
2,0
3,0

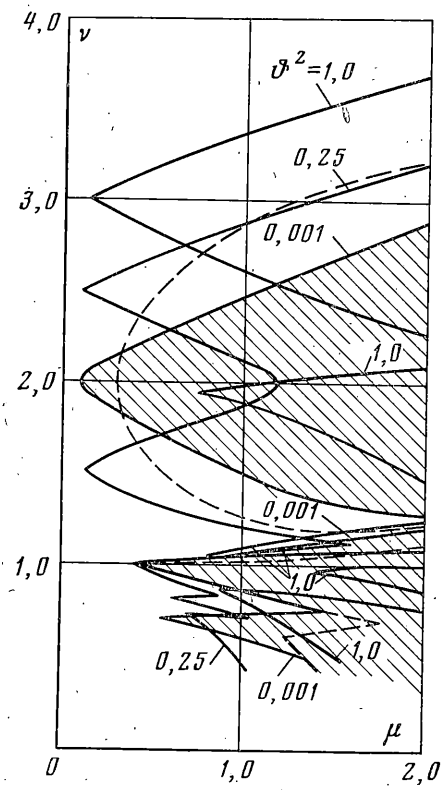
Фиг. 4


4,0
ν
0,02
0,3
0,4
ρ=0,3
3,0
0,2
2,0
1,0
0
1,0
2,0
μ_2
3,0

Фиг. 5

Система уравнений (1.8) относительно моментных функций в этом случае, как и для экспоненциально-коррелированного процесса, разделяется на две независимые системы, одна из которых совпадает с (3.2), а вторая имеет вид

$$dm_1/dt=m_2,\ dm_2/dt=-am_1-2\gamma m_2-bm_{13} \tag{4.2}$$
$$dm_{13}/dt=m_{14}+m_{23},\ dm_{14}/dt=$$
$$=-\vartheta^2 m_{13}-2\rho m_{14}+m_{24}$$
$$dm_{23}/dt=-b\sigma_{\varphi_1}{}^2 m_1-am_{13}-2\gamma m_{23}+m_{24}.$$
$$dm_{24}/dt=-am_{14}-\vartheta^2 m_{23}-2(\gamma+\rho)m_{24}.$$

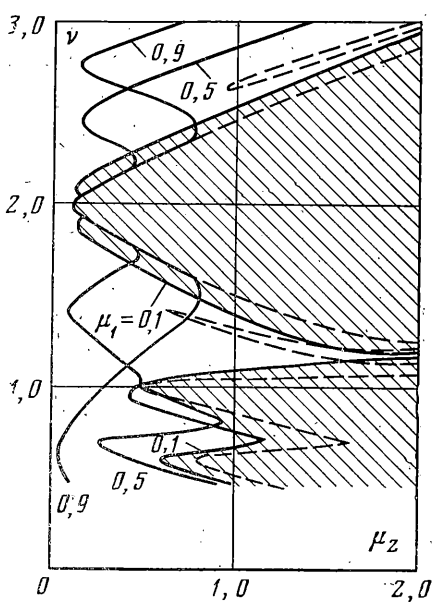


Фиг. 6

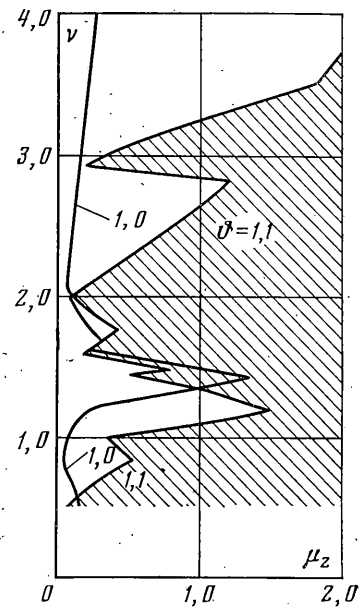
Анализ системы (4.2) для параметрического воздействия $\Phi(t)$ в виде процесса со скрытой периодичностью, модулированного периодической функцией $\cos \nu t$, позволяет выделить группы возможных критических частот, удовлетворяющих при $\gamma\to 0$, $\rho\ll 1$ соотношениям

$$\nu=2/p,\ \nu=|2\pm\vartheta|/p, \tag{4.3}$$
$$\nu=2|1\pm\vartheta|/p \quad (p=1,\ 2,\ \ldots)$$

Как видно из результатов численного анализа (фиг. 6), все области параметрических резонансов располагаются вблизи частот (4.3). Например, с увеличением несущей частоты ϑ область главного параметрического резонанса раздваивается, а критические значения частот определяются по формуле $\nu=2\pm\vartheta$. Вычисления проводились при $\gamma=0{,}01$, $\rho=0{,}02$ и различных значениях ϑ. Увеличение коэффициента широкополосности ρ приводит в основном к сглаживанию и существенному расширению области глав-



Фиг. 7



Фиг. 8

ного параметрического резонанса при смещении границ в область больших значений μ. Штриховая линия на фигуре соответствует значениям $\rho=0{,}5$, $\vartheta=0{,}5$. Влияние ρ на побочные области параметрического резонанса проявляется в меньшей степени. На фигуре заштрихованы области неустойчивости для $\vartheta^2=0{,}001$.

Результаты численного исследования устойчивости нулевого решения системы (1.1) по совокупности моментных функций первого и второго порядков для аддитивного представления $\Phi(t)$ (1.3) в случае $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$ приведены на фиг. 7, 8.

Анализ систем (3.2) и (4.3) показывает, что области неустойчивости на плоскости параметров (μ_2, ν) имеют достаточно сложную конфигурацию. В частности, при $\gamma\to 0$, $\rho\ll 1$, $\vartheta^2\ll 1$ и $\mu_1<1$ возможно появление параметрических резонансов, соответствующих соотношениям (3.5) (фиг. 7).

Вычисления проводились для случая $\gamma=0{,}02$, $\rho=0{,}02$, $\vartheta^2=0{,}001$ и различных значений интенсивности μ_1 стохастической составляющей процесса $\Phi(t)$. При малых значениях μ_1 можно ожидать также появления ряда клиньев вблизи частот, удовлетворяющих соотношениям (4.3). Штриховой линией на фиг. 7 нанесены границы областей неустойчивости для значений $\mu_1=0{,}1$, $\vartheta^2=0{,}25$. Заштрихованы области неустойчивости для $\mu_1=0{,}1$, $\vartheta^2=0{,}001$.

Как известно [6], границы областей неустойчивости в стохастической системе (1.1) для воздействия $\Phi(t)=\mu_1\varphi_1(t)$ ($\mu_2=0$), где $\varphi_1(t)$ — стационарный случайный процесс, удовлетворяющий уравнению формирующего фильтра (1.5), существенным образом зависят от соотношения несущей частоты ϑ процесса $\varphi_1(t)$ и собственной частоты системы. Введение периодического возмущения в систему, возбуждаемую стационарным случайным процессом (1.5), приводит к явлениям стабилизации или дестабилизации исходной системы — в зависимости от значений несущей частоты процесса $\varphi_1(t)$. Так, при $\mu_1>1$ и малых значениях γ, ρ, ϑ^2 область стабилизации будет иметь структуру, аналогичную структуре области стабилизации при возбуждении системы экспоненциально-коррелированным процессом (фиг. 4).

На фиг. 8 показаны области устойчивости системы (1.1) с параметрическим воздействием (1.3) для случая $\gamma=0{,}02$, $\rho=0{,}02$, $\mu_1=1{,}05$ и $\vartheta=1{,}0$ и $1{,}1$, когда система (1.1), возбуждаемая стационарным случайным процессом со скрытой периодичностью $\Phi(t)=\mu_1\varphi_1(t)$, устойчива. Наличие периодического возбуждения $\varphi_2(\nu t)=\cos\nu t$ приводит к дестабилизации системы. Области неустойчивости для значения $\vartheta=1{,}1$ на фигуре заштрихованы. При проведении всех вычислений принималось $\sigma_{\varphi_1}{}^2=1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 335 с.
2. *Bolotin V. V.* Reliability theory and stochastic stability.— In: Study on Stability. Waterloo: University of Waterloo Press, 1971, p. 385–422.
3. *Болотин В. В.* Численный анализ устойчивости линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.— В кн.: Избранные проблемы прикладной механики. М.: ВИНИТИ, с. 155–166.
4. *Wedig W.* Stabilitätsbegingungen für ein Schwingungssystem mit Zufälliger Parameterregung.— Acta techn. Acad. Sci. Hung., 1974, B. 76, No. 1–2, p. 1–19.
5. *Москвин В. Г., Смирнов А. И.* К устойчивости линейных стохастических систем.— Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 4, с. 62–65.
6. *Болотин В. В., Москвин В. Г.* О параметрических резонансах в стохастических системах.— Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 4, с. 88–92.

Москва

Поступила в редакцию
17.IV.1980