

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ОРТОТРОПНЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

УЛЬЯШИНА А. Н.

Использование уравнений классической теории оболочек, построенной с привлечением гипотезы Кирхгофа — Лява, устанавливающей отсутствие нормальных к срединной поверхности линейных деформаций и деформаций поперечного сдвига, для расчета оболочек из чередующихся жестких и мягких слоев или из композиционных материалов является менее обоснованным, чем для традиционных материалов, и может привести к существенным погрешностям. Это обстоятельство вызывает необходимость построения уточненных теорий с привлечением гипотез менее жестких, чем гипотеза жесткой нормали, позволяющих учесть деформации поперечного сдвига и сжимаемость слоев [1—3]. Кроме того, для многослойных оболочек построение уточненных теорий целесообразнее вести с привлечением гипотез, вводимых для всего пакета слоев и позволяющих получить систему разрешающих уравнений ограниченного порядка. Теории такого рода построены в основном для однородных оболочек, и из трансверсальных деформаций учитывают, как правило, деформации сдвига.

В публикуемой работе предлагается вариант теории неоднородных ортотропных оболочек, учитывающей все трансверсальные составляющие деформаций. Отличительная особенность представленного варианта теории связана с построенной кинематической моделью [4], определяющей распределение перемещений по толщине через неизвестные перемещения и напряжения на некоторой начальной поверхности и позволяющей получить разрешающую систему в смешанной форме. Решение этой системы тождественно удовлетворяет всем исходным трехмерным уравнениям за исключением игнорируемых в классической теории соотношений упругости для трансверсальных напряжений, которые удовлетворяются только на начальной поверхности.

1. Считая многослойную ортотропную оболочку достаточно тонкой, отождествим коэффициенты Ляме с коэффициентами первой квадратичной формы срединной поверхности $\gamma=0$. С учетом такого упрощения выпишем основные соотношения теории упругости в криволинейных координатах $\alpha\beta\gamma$ [5]. Уравнения равновесия элемента оболочки имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{\alpha}) - \sigma_{\beta} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta}(A^2\tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial \gamma} AB = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{\beta}) - \sigma_{\alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha}(B^2\tau_{\beta\alpha}) + \frac{\partial \tau_{\beta\gamma}}{\partial \gamma} AB = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$AB \frac{\partial \sigma_{\gamma}}{\partial \gamma} - \sigma_{\alpha} AB k_1 - \sigma_{\beta} AB k_2 + \frac{\partial}{\partial \alpha}(B\tau_{\alpha\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\tau_{\beta\gamma}) = 0$$

Деформации оболочки определяются равенствами

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} u_{\beta} + k_1 u_{\gamma} \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{B} \frac{\partial u_{\beta}}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_{\alpha} + k_2 u_{\gamma} \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial\beta} \left(\frac{u_\alpha}{A} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{u_\beta}{B} \right), \quad \varepsilon_\gamma = \frac{\partial u_\gamma}{\partial\gamma} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\alpha\gamma} = \frac{1}{A} \frac{\partial u_\gamma}{\partial\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial\gamma}, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{1}{B} \frac{\partial u_\gamma}{\partial\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial\gamma}$$

Эффект Пуассона, связанный с поперечной деформацией, не учитывается, что вполне допустимо при малой относительной толщине и сильной анизотропии материала, тогда соотношения упругости будут иметь вид

$$\sigma_\alpha = E_\alpha^\circ (\varepsilon_\alpha + \mu_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta), \quad \sigma_\beta = E_\beta^\circ (\varepsilon_\beta + \mu_{\beta\alpha} \varepsilon_\alpha), \quad \tau_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} \quad (1.3)$$

$$E_{\alpha\beta}^\circ = E_{\alpha, \beta} / (1 - \mu_{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha}), \quad E_\alpha \mu_{\alpha\beta} = E_\beta \mu_{\beta\alpha} \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_\gamma = \sigma_\gamma / E_\gamma, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma} = \tau_{\alpha\gamma} / G_{\alpha\gamma}, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = \tau_{\beta\gamma} / G_{\beta\gamma} \quad (1.4)$$

где упругие постоянные являются произвольными (для многослойной оболочки — разрывными) функциями переменной γ .

Для построения уточненной теории неоднородных многослойных оболочек, учитывающей поперечные сдвиговые и нормальные деформации, рассмотрим соотношения упругости (1.4). Интегрируя зависимость (1.2) для ε_γ по γ с учетом (1.4), получим

$$u_\gamma = w_0(\alpha, \beta) + \int_0^\gamma \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} d\gamma \quad (1.5)$$

где w_0 — прогиб исходной поверхности (при $\gamma=0$).

Подставляя в равенства (1.2) деформации $\varepsilon_{\alpha\gamma}$, $\varepsilon_{\beta\gamma}$, согласно (1.4), и перемещения u_γ , согласно (1.5), интегрируя полученные выражения по γ , найдем

$$u_\alpha = u_0(\alpha, \beta) + \int_0^\gamma \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} d\gamma - \frac{1}{A} \int_0^\gamma \frac{\partial w_0}{\partial\alpha} d\gamma - \frac{1}{A} \int_0^\gamma d\gamma \int_0^\gamma \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial\alpha} \frac{d\gamma}{E_\gamma} \quad (1.6)$$

$$u_\beta = v_0(\alpha, \beta) + \int_0^\gamma \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} d\gamma - \frac{1}{B} \int_0^\gamma \frac{\partial w_0}{\partial\beta} d\gamma - \frac{1}{B} \int_0^\gamma \frac{\partial \sigma_\gamma}{\partial\beta} \frac{d\gamma}{E_\gamma}$$

где u_0, v_0 — смещения координатной поверхности в направлении α, β .

Для построения кинематической модели примем в равенствах (1.5), (1.6) напряжения $\sigma_\gamma, \tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ равными их значениям на начальной поверхности ($\gamma=0$), т. е. $\sigma_\gamma = \sigma_0(\alpha, \beta)$, $\tau_{\beta\gamma} = \tau_0(\alpha, \beta)$, $\tau_{\beta\gamma} = S_0(\alpha, \beta)$, где величина с нулевым индексом соответствует $\gamma=0$.

В этом случае соотношения (1.5), (1.6) примут вид

$$u_\gamma = w_0 + \sigma_0 \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{E_\gamma}$$

$$u_\alpha = u_0 + \tau_0 \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{G_{\alpha\gamma}} - \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial\alpha} \gamma - \frac{1}{A} \frac{\partial \sigma_0}{\partial\alpha} \int_0^\gamma d\gamma \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{E_\gamma} \quad (1.7)$$

$$u_\beta = v_0 + S_0 \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{G_{\beta\gamma}} - \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial\beta} \gamma - \frac{1}{B} \frac{\partial S_0}{\partial B} \int_0^\gamma d\gamma \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{E_\gamma}$$

Подставляя соотношения (1.7) в (1.2) и принимая $G_{\alpha\gamma} \rightarrow \infty$, $G_{\beta\gamma} \rightarrow \infty$, $E_\gamma \rightarrow \infty$, можно получить выражения, в точности совпадающие с соответствующими уравнениями, приведенными в [6–9], где построены теории однородных оболочек, учитывающие деформации поперечного сдвига.

После подстановки (1.7) в соответствующие геометрические соотношения (1.2) и в равенства (1.3), будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha = E_\alpha \circ \left\{ \frac{1}{A} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_0 + \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{B} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_0 + \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} \right) + \right. \\ \left. + (k_1 + \mu_{\alpha\beta} k_2) w_0 + \frac{1}{A} \left(\frac{\mu_{\alpha\beta}}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau_0 + \frac{\partial \tau_0}{\partial \alpha} \right) \lambda^{1\alpha} + \frac{1}{B} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} S_0 + \mu_{\alpha\beta} \frac{\partial S_0}{\partial \beta} \right) \right\} \times \\ \times \left\{ \lambda^{1\beta} + \lambda^{1\gamma} (k_1 + \mu_{\alpha\beta} k_2) \sigma_0 - \kappa^1 [L_1(w_0) + \mu_{\alpha\beta} L_2(w_0)] - \lambda^{2\gamma} [L_1(\sigma_0) + \mu_{\alpha\beta} L_2(\sigma_0)] \right\} \quad (1.8) \\ \sigma_\beta = E_\beta \circ \left\{ \frac{1}{B} \left(\frac{\mu_{\beta\alpha}}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u_0 + \mu_{\beta\alpha} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ \left. + (k_2 + \mu_{\beta\alpha} k_1) w_0 + \frac{1}{B_0} \left(\frac{\mu_{\beta\alpha}}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} S_0 + \frac{\partial S_0}{\partial \beta} \right) \lambda^{1\beta} + \frac{1}{A} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \mu_{\beta\alpha} \frac{\partial \tau_0}{\partial \alpha} \right) \lambda^{1\alpha} + \lambda^{1\gamma} (k_2 + \mu_{\beta\alpha} k_1) \sigma_0 - \kappa^1 [L^2(w_0) + \mu_{\beta\alpha} L_1(w_0)] - \right. \\ \left. - \lambda^{2\gamma} [L_2(\sigma_0) + \mu_{\beta\alpha} L_1(\sigma_0)] \right\} \end{aligned}$$

$$L_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial \beta} \frac{\partial}{\partial \beta}, \quad L_2 = \frac{1}{B^2} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$L_3 = \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{B^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right)$$

$$\lambda^{1\alpha} = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{G_{\alpha\gamma}}, \quad \lambda^{1\beta} = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{G_{\beta\gamma}}, \quad \lambda^{1\gamma} = \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{E_\gamma}, \quad \lambda^{2\gamma} = \int_0^\gamma d\gamma \int_0^\gamma \frac{d\gamma}{E_\gamma}, \quad \kappa^1 = \gamma$$

Подставляя равенства (1.8) в первое и второе уравнения равновесия (1.1) и интегрируя полученные соотношения по γ , найдем напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$:

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\gamma} = \tau_0 + \frac{1}{AB} \left[L_4^1(u_0) + L_6^1(v_0) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_1^1 w_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_2^1 w_0 + L_8^2(\tau_0) + \right. \\ \left. + L_{10}^2(S_0) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_3^2 \sigma_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_4^2 \sigma_0 + L_{12}^2(w_0) + L_{14}^3(\sigma_0) \right] \quad (1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\beta\gamma} = S_0 + \frac{1}{AB} \left[L_5^1(v_0) + L_7^1(u_0) - \frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_2^1 w_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_1^1 w_0 + L_9^2(S_0) + L_{11}^2(\tau_0) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_4^2 \sigma_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_3^2 \sigma_0 + L_{13}^2(w_0) + L_{15}^2(\sigma_0) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4^1 = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\eta_{1\mu}^1 \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \eta_1^1 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\eta_2^1 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \eta_{2\mu}^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \\ - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\eta_3^1 \frac{A^2}{B} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$L_6^4 = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\eta_1^4 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \eta_{1\mu}^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\eta_{2\mu}^4 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \eta_2^4 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) -$$

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\eta_3^4 A \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right] \quad (1.10)$$

$$L_8^2 = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_{1\mu}^{2\alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \lambda_1^{2\alpha} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\lambda_2^{2\alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \lambda_{2\mu}^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) -$$

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\lambda_3^{2\alpha} \frac{A^2}{B} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right]$$

$$L_{10}^2 = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_1^{2\beta} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda_{1\mu}^{2\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\lambda_{2\mu}^{2\beta} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda_2^{2\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) -$$

$$-\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\lambda_3^{2\beta} A \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right]$$

$$L_{12}^2 = \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(\kappa_1^2 L_1 + \kappa_{1\mu}^2 L_2)] - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\kappa_2^2 L_2 + \kappa_{2\mu}^2 L_1) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa_3^2 A^2 L_3)$$

$$L_{14}^3 = \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(\lambda_1^{3\gamma} L_1 + \lambda_{1\mu}^{3\gamma} L_2)] - \frac{\partial B}{\partial \beta} (\lambda_1^{3\gamma} L_1 + \lambda_{1\mu}^{3\gamma} L_2) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \alpha} (\lambda_3^{3\gamma} A^2 L_3)$$

$$\eta_1^4 = \int_0^\gamma E_\alpha^\circ d\gamma, \quad \eta_2^4 = \int_0^\gamma E_\beta^\circ d\gamma, \quad \eta_3^4 = \int_0^\gamma G_{\alpha\beta} d\gamma, \quad \kappa_1^2 = \int_0^\gamma E_\alpha^\circ \gamma d\gamma,$$

(1.11)

$$\kappa_2^2 = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \gamma d\gamma, \quad \kappa_3^2 = \int_0^\gamma G_{\alpha\beta} \gamma d\gamma, \quad \lambda_1^{2\alpha} = \int_0^\gamma E_\alpha^\circ \lambda^{1\alpha} d\gamma, \quad \lambda_2^{2\alpha} = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \lambda^{1\beta} d\gamma,$$

$$\lambda_3^{2\alpha} = \int_0^\gamma G_{\alpha\beta} \lambda^{1\alpha} d\gamma, \quad \lambda_1^{2\beta} = \int_0^\gamma E_\alpha^\circ \lambda^{1\beta} d\gamma, \quad \lambda_2^{2\beta} = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \lambda^{1\beta} d\gamma, \quad \lambda_3^{2\beta} = \int_0^\gamma G_{\alpha\beta} \lambda^{1\beta} d\gamma$$

$$\lambda_1^{2\gamma} = \int_0^\gamma E_\alpha^\circ \lambda^{1\gamma} d\gamma, \quad \lambda_2^{2\gamma} = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \lambda^{1\gamma} d\gamma, \quad \lambda_3^{2\gamma} = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \lambda^{2\gamma} d\gamma,$$

$$\lambda_2^{3\gamma} = \int_0^\gamma E_\beta^\circ \lambda^{2\gamma} d\gamma, \quad \lambda_3^{3\gamma} = \int_0^\gamma G_{\alpha\beta} \lambda^{2\gamma} d\gamma$$

Выражение для оператора с нечетным номером L_{2n+1} ($L_5, L_7, L_9, \dots, L_{15}$) получается из предыдущего четного оператора L_{2n} заменой в нем α на β , β на α , A на B , B на A и заменой нижних индексов: единицы на двойку, а двойки на единицу. В соотношениях (1.11) не представлены коэффициенты с индексом μ , которые можно получить, используя $\mu_{\alpha\beta} E_\alpha^\circ$, $\mu_{\beta\alpha} E_\beta^\circ$ вместо E_α° , E_β° .

Произвольные функции интегрирования определяются из условий: $\tau_{\alpha\gamma} = \tau_0(\alpha, \beta)$, $\tau_{\beta\gamma} = S_0(\alpha, \beta)$ при $\gamma=0$.

Подставляя σ_α , σ_β , $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$, согласно равенствам (1.8) и (1.9), в третье уравнение равновесия (1.1) и интегрируя его по γ , получим

$$\sigma_\gamma = \sigma_0 + \frac{1}{A} [k_1 L_{16}^4(u_0) + k_2 L_{19}^4(u_0)] + \frac{1}{B} [k_1 L_{18}^4(v_0) + k_2 L_{17}^4(v_0)] +$$

$$+ (k_1 a_1^4 + k_2 a_2^4) w_0 - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B\tau_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS_0) \right] \kappa^1 + \frac{1}{A} [k_1 L_{16}^2(\tau_0) +$$

$$\begin{aligned}
& +k_2L_{19}{}^2(\tau_0)] + \frac{1}{B} [k_1L_{18}{}^2(S_0) + k_2L_{17}{}^2(S_0)] - L_{20}{}^2(w_0) + (k_1a_3{}^2 + k_4a_4{}^2)\sigma_0 - \\
& \quad - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_1{}^2w_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_2{}^2w_0 \right] \right\} - \quad (1.12) \\
& - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_2{}^2w_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_2{}^2w_0 \right] \right\} - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_4{}^2(u_0) \right] + \right. \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_7{}^2(u_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_6{}^2(v_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_5{}^2(v_0) \right] + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_8{}^3(\tau_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{11}{}^3(\tau_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{10}{}^3(S_0) \right] + \\
& \quad + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_9{}^3(S_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{12}{}^3(w_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{13}{}^3(w_0) \right] + \\
& \quad + AB L_{20}{}^3(\sigma_0) \left. \right\} - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_3{}^3\sigma_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_4{}^2\sigma_0 \right] \right\} - \\
& \quad - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{1}{B} \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_4{}^3\sigma_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_3{}^3\sigma_0 \right] \right\} - \\
& \quad - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{11}{}^4(\sigma_0) \right] + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{15}{}^4(\sigma_0) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_1{}^2 = k_1\eta_1{}^2 + k_2\eta_{1\mu}, \quad a_2{}^2 = k_1\eta_{2\mu}{}^2 + k_2\eta_2{}^2 \\
& a_3{}^3 = k_1\lambda_4{}^{3\gamma} + k_2\lambda_{4\mu}{}^{3\gamma}, \quad a_4{}^3 = k_1\lambda_5{}^{3\gamma} + k_2\lambda_{5\mu}{}^{3\gamma} \\
L_4{}^2 = & -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\eta_{1\mu}{}^2 \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \eta_1{}^2 \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\eta_2{}^2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \eta_{2\mu}{}^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \\
& - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\eta_3{}^2 \frac{A^2}{B} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \\
L_6{}^2 = & -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\eta_1{}^2 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \eta_{1\mu}{}^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\eta_{2\mu}{}^2 \frac{1}{A} \frac{2A}{\partial \beta} + \eta_2{}^2 \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \\
& - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\eta_3{}^2 A \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right] \\
L_8{}^3 = & -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_{1\mu}{}^{3\alpha} \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \lambda_1{}^{3\alpha} \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\lambda_2{}^{3\alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \lambda_{2\mu}{}^{3\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \\
& - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\lambda_3{}^{3\alpha} \frac{A^2}{B} \left(\frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) \right] \\
L_{10}{}^3 = & -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\lambda_1{}^{3\beta} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda_{1\mu}{}^{3\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \left(\lambda_{2\mu}{}^{3\beta} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \lambda_2{}^{3\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \\
& - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\lambda_3{}^{3\beta} A \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) \right] \\
L_{12}{}^3 = & \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(\kappa_1{}^3L_1 + \kappa_{1\mu}{}^3L_2)] - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\kappa_2{}^3L_2 + \kappa_{2\mu}{}^3L_1) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (\kappa_3{}^2A^2L_3) \\
L_{14}{}^4 = & \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(\lambda_1{}^{4\gamma}L_1 + \lambda_{1\mu}{}^{4\gamma}L_2)] - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\lambda_2{}^{4\gamma}L_2 + \lambda_{2\mu}{}^{4\gamma}L_1) + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \beta} (\lambda_3{}^{4\gamma}A^2L_3) \\
L_{16}{}^4 = & \eta_{1\mu}{}^4 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \eta_1{}^4 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{18}{}^4 = \eta_1{}^4 \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \eta_{1\mu}{}^4 \frac{\partial}{\partial \beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{16}^2 &= \lambda_{1\mu}^{2\alpha} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \lambda_1^{2\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha}, & L_{18}^2 &= \eta_1^{2\beta} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \eta_{1\mu}^{2\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \\
L_{20}^2 &= k_1 (\kappa_1^2 L_1 + \kappa_{1\mu} L_2) + k_2 (\kappa_2^2 L_2 + \kappa_{1\mu}^2 L_1) \\
L_{20}^3 &= k_1 (\lambda_1^{3\gamma} L_1 + \lambda_{1\mu}^{3\gamma} L_2) + k_2 (\lambda_2^{3\gamma} L_2 + \lambda_{2\mu}^{3\gamma} L_1) \\
\eta_1^2 &= \int_0^\gamma \eta_1^1 d\gamma, & \eta_2^2 &= \int_0^\gamma \eta_2^1 d\gamma, & \eta_3^2 &= \int_0^\gamma \eta_3^1 d\gamma, & \lambda_1^{3\alpha} &= \int_0^\gamma \lambda_1^{2\gamma} d\gamma, \\
\lambda_2^{3\alpha} &= \int_0^\gamma \lambda_2^{2\alpha} d\gamma, & \lambda_3^{3\alpha} &= \int_0^\gamma \lambda_3^{2\alpha} d\gamma & & & & (1.13) \\
\lambda_1^{3\beta} &= \int_0^\gamma \lambda_1^{2\beta} d\gamma, & \lambda_2^{3\beta} &= \int_0^\gamma \lambda_2^{2\beta} d\gamma, & \lambda_3^{3\beta} &= \int_0^\gamma \lambda_3^{2\beta} d\gamma, & \lambda_4^{3\gamma} &= \int_0^\gamma \lambda_1^{2\gamma} d\gamma, \\
\lambda_5^{3\gamma} &= \int_0^\gamma \lambda_2^{2\gamma} d\gamma \\
\kappa_1^3 &= \int_0^\gamma \kappa_1^2 d\gamma, & \kappa_2^3 &= \int_0^\gamma \kappa_2^1 d\gamma, & \kappa_3^3 &= \int_0^\gamma \kappa_3^2 d\gamma, & \lambda_1^{4\gamma} &= \int_0^\gamma \lambda_1^{3\gamma} d\gamma, \\
\lambda_2^{4\gamma} &= \int_0^\gamma \lambda_2^{3\gamma} d\gamma, & \lambda_3^{4\gamma} &= \int_0^\gamma \lambda_3^{3\gamma} d\gamma
\end{aligned}$$

Так же, как и в соотношениях (1.10), операторы с нечетными номерами L_{2n+1} (L_5, L_7, \dots, L_{19}) получаются из четных L_{2n} путем замены α на β , β на α , A на B , B на A ; в нижних индексах единица меняется на двойку, а двойка — на единицу. Коэффициенты с индексом μ получаются из соотношений (1.13) заменой $E_\alpha^\circ, E_\beta^\circ$ соответственно на $\mu_{\alpha\beta} E_\alpha^\circ, \mu_{\beta\alpha} E_\beta^\circ$.

Произвольная функция интегрирования находится из условия: $\sigma_\gamma = \sigma_0(\alpha, \beta)$ при $\gamma=0$. Напряжения $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma, \tau_{\alpha\beta}, \tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ и перемещения $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ выражаются через неизвестные функции двух переменных: $u_0, v_0, w_0, \tau_0, S_0, \sigma_0$. Отметим, что уравнения равновесия (1.1) и соотношения, определяющие деформации $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha\beta}$ (1.2) с учетом (1.3) удовлетворяются точно. Равенства для трансверсальных составляющих деформаций $\varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\alpha\gamma}, \varepsilon_{\beta\gamma}$ (1.2) с учетом соотношений (1.4), игнорируемые в классической теории оболочек, удовлетворяются только на исходной поверхности ($\gamma=0$). Более точного выполнения равенств (1.2) для $\varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\alpha\gamma}, \varepsilon_{\beta\gamma}$ можно достичь построением итерационного процесса, в котором перемещения u_α, u_β и u_γ в каждом последующем приближении определяются равенствами (1.10) с использованием выражений для $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ и σ_γ из равенств (1.9), (1.12) на предшествующем этапе. Предложенный вариант уточненной теории неоднородных многослойных оболочек может считаться первым приближением итерационного процесса.

2. Разрешающая система уравнений может быть получена из равенств, определяющих напряжения $\tau_{\alpha\gamma}, \tau_{\beta\gamma}$ и σ_γ в результате удовлетворения статических граничных условий, которые в общем случае нагружения имеют вид: $\tau_{\alpha\gamma} = q_{1,2}(\alpha, \beta)$, $\tau_{\beta\gamma} = S_{1,2}(\alpha, \beta)$, $\sigma_\gamma = -p_{1,2}(\alpha, \beta)$ при $\gamma = \pm h$. Эта система записывается в смешанной форме, включает в качестве неизвестных три перемещения u_0, v_0, w_0 исходной поверхности ($\gamma=0$), три напряжения σ_0, τ_0, S_0 и имеет шестнадцатый порядок.

Уравнения, соответствующие $\gamma = \pm h$, записываются в форме

$$\tau_0 + \frac{1}{AB} \left\{ \pm \left[L_4^1(u_0) + L_6^1(v_0) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (B a_1^1 w_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_2^1 w_0 \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +L_8^2(\tau_0) + L_{10}^2(S_0) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_3^2 \sigma_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_4^2 \sigma_0 + L_{12}^2(w_0) \pm L_{14}^3(\sigma_0) \Big\} = q_{1,2} \\
& S_0 + \frac{1}{AB} \Big\{ \pm \left[L_7^1(u_0) + L_5^1(v_0) - \frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_2^1 w_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_1^1 w_0 \right] + L_{11}^2(\tau_0) + \\
& + L_9^2(S_0) - \frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_4^2 \sigma_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_3^2 \sigma_0 + L_{13}^2(w_0) + L_{15}^3(\sigma_0) \Big\} = s_{1,2} \\
& \sigma_0 \pm \left\{ \frac{1}{A} [k_1 L_{16}^4(u_0) + k_2 L_{19}^4(u_0)] + \frac{1}{B} [k_1 L_{18}^4(v_0) + k_2 L_{17}^4(v_0)] + \right. \\
& + (k_1 a_1^4 + k_2 a_2^4) w_0 - \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} (B\tau_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS_0) \right] \kappa_1 \Big\} + \frac{1}{A} [k_1 L_{16}^2(\tau_0) + \\
& + k_2 L_{19}^2(\tau_0)] + \frac{1}{B} [k_1 L_{18}^2(S_0) + k_2 L_{17}^2(S_0)] - L_{20}^2(w_0) + (k_1 a_3^2 + k_2 a_4^2) \sigma_0 - \\
& - \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_1^2 w_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_2^2 w_0 \right] \right\} = \\
& - \frac{1}{AB} \frac{1}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_2^2 w_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_1^2 w_0 \right] \right\} - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_4^2(u_0) \right] + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_7^2(u_0) \right] - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_6^2(v_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_5^2(v_0) \right] \right] \pm \\
& \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_8^3(\tau_0) \right] \pm \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{11}^3(\tau_0) \right] \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{10}^3(S_0) \right] \pm \\
& \pm \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_9^3(S_0) \right] \pm \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{12}^3(w_0) \right] \pm \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{13}^3(w_0) \right] \pm \\
& \pm ABL_{20}^3(\sigma_0) \Big\} \mp \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{1}{A} \left[-\frac{\partial}{\partial \alpha} (Ba_3^3 \sigma_0) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} a_4^3 \sigma_0 \right] \right\} \mp \\
& \mp \frac{1}{AB} \frac{\partial}{\partial \beta} \left\{ \frac{1}{B} \left[-\frac{\partial}{\partial \beta} (Aa_4^3 \sigma_0) + \frac{\partial A}{\partial \beta} a_3^3 \sigma_0 \right] \right\} - \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{1}{A} L_{14}^4(\sigma_0) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{1}{B} L_{15}^4(\sigma_0) \right] \right\} = -p_{1,2}
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Коэффициенты, входящие в операторы систем (1.9), (1.2), определяют обобщенные жесткости и податливость оболочки и позволяют использовать разрешающую систему уравнений для оболочек с произвольным числом слоев, произвольным законом распределения упругих характеристик материала по слоям.

При $E_\gamma \rightarrow \infty$ (соответствует распространенному представлению о несжимаемости материала в поперечном направлении) будут равны нулю коэффициенты λ с индексом γ , а вместе с ними и содержащие их операторы $L_{14}^2 = L_{15}^3 = L_{14}^4 = L_{15}^4 = L_{20}^4 = 0$, что приводит к упрощению разрешающей системы уравнений (2.1).

При $G_{\alpha\gamma} \rightarrow \infty$, $G_{\beta\gamma} \rightarrow \infty$ (одновременно $E_\gamma \rightarrow \infty$) система (2.1) соответствует технической теории слоистых оболочек, построенной на гипотезе Кирхгофа — Лява. В этом случае равны нулю все коэффициенты λ с индексами γ , α , β , а также интегродифференциальные операторы, содержащие эти коэффициенты в виде множителей.

Полагая в уравнениях уточненной теории (2.1) коэффициенты первой квадратичной формы срединной поверхности $A=B=1$, можно получить разрешающую систему дифференциальных уравнений для пологих оболочек.

Решения системы (2.1) должны удовлетворять граничным условиям на краях $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, которые могут быть получены как естественные условия вариационной задачи. Высокий порядок разрешающей системы уравнений позволяет записать на краю $\alpha = \text{const}$ в дополнение к классическим условиям (для усилий, моментов и перерезывающей силы)

$$T_\alpha = \int_{-h}^h \sigma_\alpha B d\gamma, \quad T_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\beta} B d\gamma, \quad M_\alpha = \int_{-h}^h \sigma_\alpha B \gamma d\gamma, \\ H_{\alpha\beta} = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\beta} B \gamma d\gamma, \quad Q_\gamma = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\gamma} B d\gamma \quad (2.2)$$

соответствующие моментам более высокого порядка граничные условия вида

$$M_\alpha^1 = \int_{-h}^h \sigma_\alpha B \gamma^2 d\gamma, \quad H_{\alpha\beta}^1 = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\beta} B \gamma^2 d\gamma, \quad Q_\gamma^1 = \int_{-h}^h \tau_{\alpha\gamma} B \gamma d\gamma \quad (2.3)$$

Для записи статических граничных условий на краю $\beta = \text{const}$ в равенствах (2.2), (2.3) следует заменить α на β , β на α и B на A . При постановке геометрических граничных условий для оболочки должны быть заданы восемь функций

$$u_0, v_0, w_0, \quad \tau_0/G_{\alpha\gamma} - A^{-1}(\partial w_0/\partial\alpha), \quad S_0/G_{\beta\gamma} - B^{-1}(\partial w_0/\partial\beta), \\ \sigma_0, \partial\sigma_0/\partial\alpha, \quad \partial\sigma_0/\partial\beta \quad (2.4)$$

Таким образом, на краю оболочки может быть задано восемь геометрических или восемь статических граничных условий, что соответствует шестнадцатому порядку разрешающей системы уравнений. Возможные варианты смешанных граничных условий могут быть записаны путем комбинации всех этих условий.

Исследуем напряженно-деформированное состояние оболочек из композиционных материалов, состоящих из большого числа одинаковых слоев. При расчете реальных оболочек из композитов их можно считать условно однородными и ортотропными. В этом случае разрешающая система (2.1) существенно упрощается и преобразуется (попарным сложением и вычитанием уравнений) к виду

$$\frac{1}{E_\gamma} L_4(\sigma_0) + \frac{6}{h^2} [L_8(u_0) + L_{10}(v_0) + L_{12}(w_0)] = \frac{3AB}{h^2} (q_2 - q_1) \\ \frac{1}{E_\gamma} L_{15}(\sigma_0) + \frac{6}{h^2} [L_{11}(u_0) + L_9(v_0) + L_{13}(w_0)] = \frac{3AB}{h^2} (S_2 - S_1) \\ \frac{1}{E_\gamma} L_{22}(\sigma_0) + \frac{12}{h^4} AB \left(2 + \frac{a_3 h^2}{E_\gamma} \right) \sigma_0 + \frac{12}{h^2} AB \left[\frac{1}{AG_{\alpha\gamma}} L_{16}(\tau_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{BG_{\beta\gamma}} L_{19}(S_0) - L_{18}(w_0) \right] = \frac{6}{h^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha} [B(q_2 - q_1)] + \frac{\partial}{\partial\beta} [A(s_2 - s_1)] \right\} - \\ - \frac{12}{h^4} AB(p_1 + p_2) \\ \frac{1}{G_{\alpha\gamma}} L_8(\tau_0) + \frac{1}{G_{\beta\gamma}} L_{10}(S_0) + L_{14}(w_0) + \frac{1}{E_\gamma} L_{12}(\sigma_0) + \frac{2AB}{h^2} \tau_0 = \frac{AB}{h^2} (q_1 + q_2) \\ \frac{1}{G_{\beta\gamma}} L_{11}(\tau_0) + \frac{1}{B_{\beta\gamma}} L_9(S_0) + L_{15}(w_0) + \frac{1}{E_\gamma} L_{13}(\sigma_0) + \frac{2AB}{h^2} S_0 = \frac{AB}{h^2} (s_1 + s_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (B\tau_0) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AS_0) - \frac{3}{2} AB \left[\frac{1}{A} L_{18}(u_0) + \frac{1}{B} L_{19}(v_0) + a_3 w_0 \right] + \\ + \frac{AB}{4E_\gamma} h^2 L_{18}(\sigma_0) = \frac{3}{4} AB(p_2 - p_1) - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} [B(q_1 + q_2)] + \frac{\partial}{\partial \beta} [A(s_1 + s_2)] \right\}$$

Рассмотрим приложение уточненной теории применительно к круговым цилиндрическим оболочкам ($k_1=0$, $k_2=1/R$, $A=B=R$). Ограничимся случаем осесимметричного нагружения оболочки равномерным давлением p . В результате будем иметь систему уравнений десятого порядка относительно неизвестных функций u_0 , w_0 , τ_0 , σ_0 :

$$\tau_0 - \frac{E_\alpha^0}{R^2} \left[\left(\frac{\tau_0''}{G_{\alpha\gamma}} - \frac{w_0'''}{R} \right) \frac{h^2}{2} + \mu_{\alpha\beta} \sigma_0' \frac{h^2}{2E_\gamma} \right] = 0 \\ - (u_0'' + \mu_{\alpha\beta} w_0') h - \sigma_0' \frac{h^3}{6RE_\gamma} = 0 \\ \sigma_0 + \frac{E_\beta^0}{R^2} \left[\mu_{\beta\alpha} \left(\frac{\tau_0'}{G_{\alpha\gamma}} - \frac{w_0''}{R} \right) + \frac{\sigma_0}{E_\gamma} \right] \frac{h^2}{2} + \frac{E_\alpha^0}{R^3} \left[(u_0'' + \mu_{\alpha\beta} w_0') \frac{h^2}{2} - \sigma_0^{IV} \frac{h^4}{24RE_\gamma} \right] = -\frac{p}{2} \\ -\tau_0' \frac{h}{R} + \frac{E_\beta^0}{R^2} (\mu_{\beta\alpha} u_0' + w_0) h + \frac{E_\alpha^0}{R^3} \left(\frac{\tau_0'''}{G_{\alpha\gamma}} - \frac{w_0^{IV}}{R} \right) \frac{h^3}{6} = \frac{p}{2} \quad (2.6)$$

где штрихом обозначена производная по безразмерной координате α , отнесенной к R .

3. В качестве примера исследуем трансверсально изотропную полубесконечную цилиндрическую оболочку радиуса R . Край считается заземленным. Разрешающая система (2.8) приводится к виду ($E_\alpha=E_\beta=E$, $G_{\alpha\gamma}=G_{\beta\gamma}=G$, $\mu_{\alpha\beta}=\mu_{\beta\alpha}=0$):

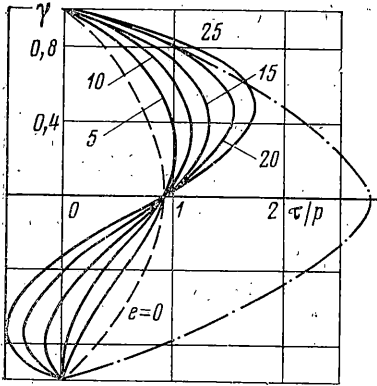
$$\sigma_0^{IV} + 12 \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left[\frac{1}{E} - \frac{2E_\gamma}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right] \sigma_0 = -\frac{12E_\gamma}{E} \left(\frac{R}{h} \right)^4 p \\ \tau_0^{IV} - \frac{3E}{2G} \tau_0'' + \frac{3R^2}{h^2} \tau_0 = 0, \quad w_0 - \frac{2R}{3E} \tau_0' = \frac{R^2 p}{2hE}, \quad u_0'' - \frac{h^2}{6RE_\gamma} \sigma_0''' = 0 \quad (3.1)$$

Запишем решение системы (3.1) в форме

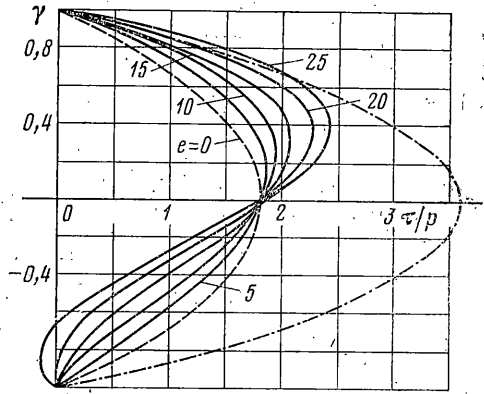
$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^4 C_i F_i(\alpha) - \frac{Pb^4}{a^2 + 2b^4}, \quad \tau_0 = \sum_{i=7}^{10} C_i F_i(\alpha) \quad (3.2) \\ u_0 = \frac{h^2}{6RE_\gamma} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'(\alpha) + C_5 \alpha + C_6, \quad w_0 = \frac{2}{3} \frac{R}{E} \sum_{i=7}^{10} C_i F_i'(\alpha) + \frac{pR^2}{2hE} \\ F_{1,2} = e^{\pm m_2 \alpha} \cos m_2 \alpha, \quad F_{3,4} = e^{\pm m_2 \alpha} \sin m_2 \alpha, \\ F_{7,8} = e^{\pm m_1 \alpha} \cos n_1 \alpha, \quad F_{9,10} = e^{\pm m_1 \alpha} \sin n_1 \alpha \\ m_2^4 = \frac{3R^2}{h^2} \left(1 + 2 \frac{R^2 E_\gamma}{h^2 E} \right), \quad d^2 = \frac{6R^2}{h^2}, \quad b^4 = \frac{6R^4 E_\gamma}{h^4 E} \\ m_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{h} + \frac{3}{8} \frac{E}{G}, \quad n_1^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{R}{h} - \frac{3}{8} \frac{E}{G}$$

Постоянные C_i найдем из граничных условий, которые для заземленного края $\alpha=0$ принимают вид

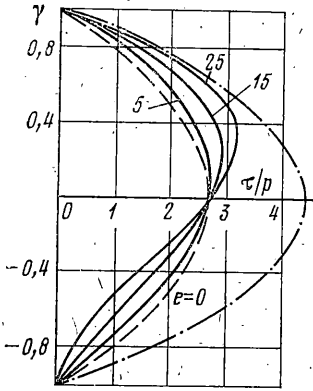
$$u_0 = w_0 = \tau_0/G - w_0/R = \sigma_0 = \sigma_0' = 0 \quad (3.3)$$



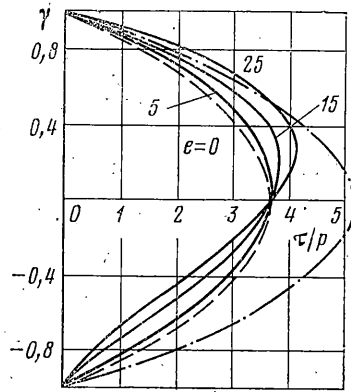
Фиг. 1



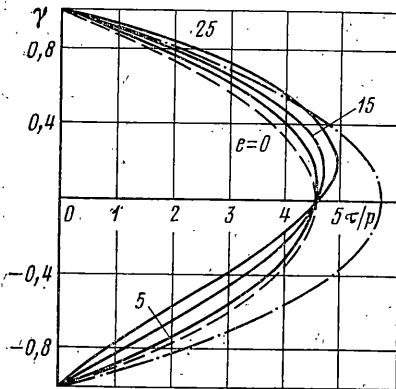
Фиг. 2



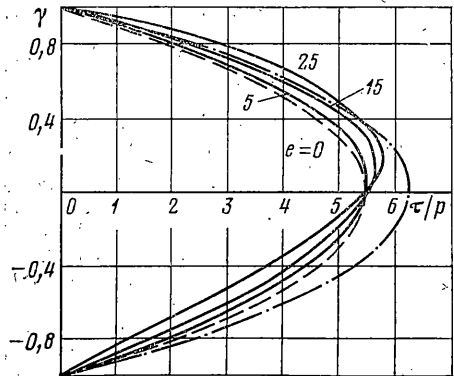
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

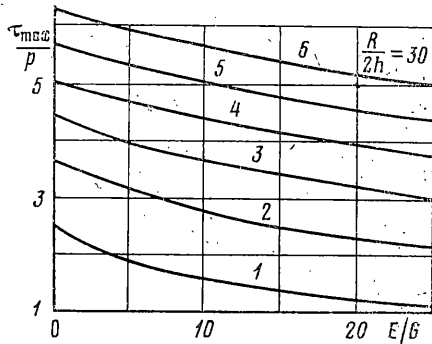
Тогда выражения для перемещений u_α , u_γ и напряжений примут вид

$$\begin{aligned}
 u_\alpha &= \frac{h^2}{6E_\gamma R} \sum_{i=1}^4 C_i F_i' (1-3\gamma^2) - h \left(\frac{2}{3E} \sum_{i=7}^{10} C_i F_i'' - \frac{1}{G} \sum_{i=7}^{10} C_i F_i \right) \gamma \\
 u_\gamma &= \frac{2}{3} \frac{R}{E} \sum_{i=1}^4 C_i F_i + \frac{pR^2}{2hE} + \frac{h}{E_\gamma} \left(\sum_{i=1}^4 C_i F_i - \frac{pb^4}{d^2+2b^4} \right) \gamma \\
 \sigma_\alpha &= \frac{E}{R} \left[\frac{h^2}{6E_\gamma R} \sum_{i=1}^4 C_i F_i'' (1-3\gamma^2) - h \left(\frac{2}{3E} \sum_{i=7}^{10} C_i F_i''' - \frac{1}{G} \sum_{i=7}^{10} C_i F_i \right) \gamma \right. \\
 \tau_{\alpha\gamma} &= \left. \frac{h^3 E}{6R^3 E_\gamma} \sum_{i=1}^4 C_i F_i''' (\gamma^2 - 1) \gamma + \sum_{i=7}^{10} C_i F_i (1 - \gamma^2) \right]
 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для иллюстрации эффекта, вызванного учетом поперечных сдвиговых и нормальных деформаций на напряженное состояние оболочки, проведем параметрический анализ. Исследуем влияние относительной толщины оболочки h/R и механических свойств материала E/E_γ , E/G на распределение касательных напряжений по высоте закрепленного края. Полученные результаты сравним с решениями в классической постановке и с результатами, получающимися по уточненной теории, учитывающей только поперечный сдвиг (случай $E_\gamma \rightarrow \infty$).

Подставляя решение (3.2) и постоянные интегрирования в выражение для $\tau_{\alpha\gamma}$ (3.4), получим

$$\begin{aligned}
 \tau_{\alpha\gamma} &= \frac{3 \cdot h^2 \cdot E}{2 \cdot R^2 \cdot E_\gamma} m_2^3 p C_2 e^{-m_2 \alpha} \times \\
 &\times \cos m_2 \alpha (\gamma^2 - 1) \gamma - (C_8 \cos n_1 \alpha + \\
 &+ C_{10} \sin n_1 \alpha) e^{-m_1 \alpha} \frac{pR}{h} (1 - \gamma^2)
 \end{aligned} \quad (3.5)$$



Фиг. 7

Фиг. 1—6) показывают распределение касательных напряжений $\tau_{\alpha\gamma}$, согласно (3.5), в сечении $\alpha=0$ по толщине оболочки при $R/2h=5, 10, 15, 20, 25, 30$ и $E/G=\text{const}$ (сплошные линии, $e=E/E_\gamma$). Кривые, проведенные штрихпунктирной линией, построены для случая $E_\gamma \rightarrow \infty$ и $G \rightarrow \infty$, т. е. соответствуют напряжениям, полученным в классической постановке, штриховые кривые соответствуют случаю учета поперечного сдвига (при этом $E_\gamma \rightarrow \infty$).

В таблице представлены отношения максимального касательного напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ (3.4) к величине максимального напряжения, найденного по уравнениям, учитывающим только поправку на сдвиг. Из приведенных результатов следует, что для достаточно толстых оболочек неучет нормальной поперечной деформации даже для слабоанизотропных материалов дает ощутимую погрешность (в случае $E/E_\gamma=20-25$ погрешность колеблется от 80% до 20%). С уменьшением толщины оболочки погрешность, связанная с неучетом поперечной сжимаемости материала, снижается значительно и в случае сильно анизотропных материалов составляет 6%—4%.

$R/2h$	$E/E_\gamma=0$	5	10	15	20	25
5	1	1,048	1,244	1,440	1,634	1,830
10	1	1,018	1,055	1,14	1,244	1,34
15	1	1,00	1,037	1,055	1,114	1,185
20	1	1,00	1,015	1,043	1,086	1,116
25	1	1,00	1,008	1,034	1,052	1,09
30	1	1,00	1,00	1,00	1,036	1,055

Анализ влияния поперечного сдвига на величину максимального касательного напряжения представлен на фиг. 7, где приведены кривые, характеризующие закон изменения $\tau_{\alpha\gamma} = \tau_*$ в зависимости от геометрического параметра оболочки $R/2h$ и отношения упругих характеристик материала E/G (кривые 1-6 соответствуют $R/2h = 5, 10, 15, 20, 25, 30$). Характер кривых показывает, что с увеличением степени анизотропии, т. е. с ростом E/G при $R/2h = \text{const}$, величина τ_* падает (при $E/G = 25-30$ напряжение τ_* уменьшается в полтора-два раза). Таким образом, учет деформации поперечного сдвига приводит к уменьшению касательных напряжений, в то время как учет поперечной нормальной деформации — к увеличению напряжений. Однако с уменьшением толщины оболочки влияние поправочных членов от учета сдвига и сжимаемости естественно падает.

Отметим, что точное определение касательных напряжений представляется существенным для оценки прочности слоистых оболочек из композиционных материалов. В связи с малым пределом прочности таких материалов на срез одной из основных форм разрушения является расхождение материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А. Еще одна уточненная теория анизотропных оболочек. — Механика полимеров, 1970, № 5, с. 884—896.
2. Бологин В. В., Москаленко В. Н. Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты. — В кн.: Докл. научно-техн. конф. по итогам н.-и. работ 1966—1967 гг. Моск. энерг. ин-т, 1967, с. 26—45.
3. Васильев В. В., Назаренко В. Г. Вариант теории толстых, многослойных цилиндрических оболочек. — Механика полимеров, 1974, № 6, с. 1071—1078.
4. Ульяшина А. Н. Напряженно-деформированное состояние ортотропных слоистых пластин. — Известия АН СССР. Механика твердого тела, 1979, № 1, с. 145—154.
5. Власов В. З. Общая моментная теория оболочек. Избр. тр. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1962, с. 152—175.
6. Григолюк Э. И., Коган Ф. А. Современное состояние многослойных оболочек. — Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 6, с. 3—17.
7. Галиньш А. Г. Расчет пластин и оболочек по уточненным теориям. — В кн.: Исследования по теории пластин и оболочек, Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1967, вып. 5; 1970, вып. 6—7, с. 66—92.
8. Королев В. И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965. 271 с.
9. Целех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 247 с.

Москва

Поступила в редакцию
24.V.1981