МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1983

УДК 539.3:534.1

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК

ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР А. Л.

Обсуждается влияние, которое могут оказать на асимптотику верхней и нижней критических нагрузок упругой тонкой оболочки псевдоизгибания ее срединной поверхности, т. е. деформации, обобщающие изгибания и в определенном смысле близкие к ним.

Проводится сопоставление с результатами, полученными в рамках геометрической теории устойчивости оболочек А. В. Погорелова [1], основанной на учете влияния изгибаний.

Публикуемая работа представляет собой развитие п. 10 [2].

1. Рассмотрим оболочку, на краю (краях) которой выполняются однородные самосопряженные условия (обеспечивающие обращение в нуль работы краевых сил), и примем, что она загружена поверхностной нагрузкой с компонентами (X^m, x). Напряженно-деформированное состояние, вызванное этой нагрузкой, будем характеризовать тензорами тангенциальных усилий, моментов, перерезывающих усилий, тангенциальных и нормальных перемещений, тангенциальной и изгибной деформаций, которые соответственно обозначим T^{mn}, M^{mn}, N^m, v_m, w, ε_{mn}, μ_{mn}. Асимптотику входящих сюда геометрических величин зададим соотношениями

$$(v_m, w)=\theta^{-\gamma}\frac{R^2X}{B}(v_m, w)_1, \quad \varepsilon_{mn}=\theta^{-\gamma+\varkappa'/2}\frac{RX}{B}(\varepsilon_{mn})_1$$
$$\mu_{mn}=\theta^{-\gamma-2p'}\frac{X}{B}(\mu_{mn})_1, \quad \theta=\frac{h}{R}, \quad B=\frac{2Eh}{1-\nu^2} \tag{1.1}$$

Здесь и ниже символ $(A)_1$ означает безразмерную функцию, пропорциональную A и имеющую характерные значения, соизмеримые единице. Под X подразумевается характерное значение наибольшей из компонент внешней нагрузки; R — характерный радиус кривизны срединной поверхности (смысл величин γ, p', $\varkappa'$ выяснится ниже).

Если форма оболочки и условия закрепления краев таковы, что ее напряженное состояние всюду безмоментно, и если изменяемость поверхностной нагрузки не велика, то для такой задачи в формулах (1.1) можно положить $\gamma=p'=\varkappa'=0$. В более сложных случаях асимптотика перемещений и деформаций может измениться. Это учитывается дополнительными множителями в виде степеней малого параметра θ. Множитель $\theta^{-\gamma}$ учитывает возможность существенного увеличения деформативности оболочки; множителем $\theta^{-2p'}$ учитывается изменяемость обсуждаемого напряженно-деформированного состояния (он введен в формулу для μ_{mn}, так как в выражения для этого тензора входит вторая производная от перемещения w); множитель $\theta^{-\varkappa'/2}$ учитывает, что деформация срединной поверхности может оказаться псевдоизгибанием, т. е. деформацией, для которой все компоненты тензора ε_{mn} приближенно обращаются в нуль (понятия псевдоизгибания или близкие к ним, помимо [1], были использованы и в [3–5]).

Примем для предстоящих оценочных рассуждений, что уравнения состояния можно брать в простейшем виде

$$T^{mn}=BE^{\alpha\beta mn}\varepsilon_{\alpha\beta},\qquad M^{mn}=\frac{1}{3}BR^2\theta^2E^{\alpha\beta mn}\mu_{\alpha\beta},\qquad E^{\alpha\beta mn}=a^{\alpha m}a^{\beta n}+\nu c^{\alpha m}c^{\beta n} \tag{1.2}$$

и составим выражения

$$J_\varepsilon=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{mn}\,dF,\qquad J_\mu=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}\mu_{\alpha\beta}\mu_{mn}\,dF$$

$$J_q=\frac{1}{F}\iint (v_mX^m+wx)\,dF \tag{1.3}$$

которые соответственно пропорциональны энергии тангенциальной деформации, энергии изгибной деформации и работе поверхностных сил; F — площадь срединной поверхности.

Подставив (1.1) в (1.3), можно записать

$$J_\varepsilon=\theta^{-2\gamma+\varkappa}\frac{R^2X^2}{B^2}A_\varepsilon,\qquad J_\mu=\theta^{-2\gamma-4p}\frac{X^2}{B^2}A_\mu,\qquad A_\varepsilon=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}(\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon_{mn})_1\,dF,$$

$$A_\mu=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}(\mu_{\alpha\beta}\mu_{mn})_1\,dF \tag{1.4}$$

A_ε, A_μ заведомо положительны, так как положительны соответствующие подынтегральные выражения. Дополнительно примем A_ε и A_μ соизмеримыми единице. Это, в частности, означает, что случай, когда деформация оболочки локализована около какой-либо точки или линии, требует дополнительных рассуждений.

Замечание. Возможность приближенного или точного обращения в тождественный нуль подынтегрального выражения в формуле (1.3) для J_ε учитывается в (1.4) множителем $\theta^\varkappa$, в котором $\varkappa$ считается неотрицательным числом. Можно было бы ввести такой же множитель и при J_μ, но это не оказало бы влияния на последующие выводы.

В простейшем случае, когда в (1.1) величины p', $\varkappa'$ можно считать постоянными, числа p, $\varkappa$ в (1.4) совпадают по смыслу с p', $\varkappa'$. Но, вообще говоря, p, $\varkappa$ надо рассматривать как некоторые средние значения величин p', $\varkappa'$. Назовем p и $\varkappa$ средними показателями изменяемости и псевдоизгибания, соответственно, а под псевдоизгибанием будем подразумевать деформацию, для которой $\varkappa>0$.

Смысл понятия средних показателей поясним при помощи характерного для теории оболочек примера. Пусть формоизменение оболочки составляется из основной деформации с показателем изменяемости π и из локализованной вблизи некоторой линии χ деформации типа простого краевого эффекта с показателем $1/2$. Если основная деформация по интенсивности, по меньшей мере, соизмерима с локализованной, то можно принять, что средний показатель изменяемости p совпадает с показателем π, так как в формулах (1.3) вклад локализованной деформации при $h\to 0$ будет исчезающе малым (аналогичные выводы получаются и для показателя псевдоизгибаний $\varkappa$). Но если локализованная деформация существенно превосходит основную, то интерпретация средних показателей становится менее физичной. В формулах (1.3) интегрирование, в сущности, будет вестись лишь в узкой полоске, примыкающей к линии χ, а J_ε существенно зависит от значения F, т. е. от размеров площади срединной поверхности, которая, в сущности, не охвачена деформацией. Такие случаи будут рассматриваться ниже (п. 3).

2. Перейдем к обсуждению линейной задачи устойчивости безмоментного состояния. Во всех случаях, когда не оговорено противоположное, считается, что докритическое безмоментное состояние существует и определяется тензором PRT_0^{mn}, в котором второй множитель соизмерим единице, а постоянный фактор пропорциональности P задается равенством

$$P=\frac{B}{R}\theta^{-p}p'=\frac{2E}{1-\nu^2}\theta^{-p+1}P'\qquad (P'\sim 1) \tag{2.1}$$

Цель обсуждения будет заключаться в исследовании асимптотики верхней критической силы, т. е. в определении числа ρ (показателя устойчивости), и в установлении асимптотических свойств закритического напряженного состояния, под которым подразумевается совокупность тензоров T^{mn}, M^{mn}, N^m, v_m, w, ε_{mn}, μ_{mn}.

В линеаризированной задаче устойчивости безмоментного напряженного состояния принимается, что на оболочку действует воображаемая поверхностная нагрузка с компонентами

$$X^m=0, \quad x=PRT_0^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

а параметр P должен быть подобран так, чтобы неоднородная краевая задача определения закритического напряженного состояния имела нетривиальное решение. В рамках этой концепции перечисленные тензоры должны удовлетворять теореме Клапейрона, в которой X^m, x определяются формулами (2.2).

Поэтому, используя обозначения (1.3) и отбросив общий множитель BF, можно выразить эту теорему следующим безразмерным равенством:

$$J_\varepsilon+{}^1/_3\theta^2R^2J_\mu=B^{-1}J_q \tag{2.3}$$

независящим от смысла, который придается величине F в формулах (1.3).

Величина J_q в (1.3) в силу (2.2) выражается так:

$$J_q=\frac{PR}{F}\iint T_0^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}w\,dF \tag{2.4}$$

Подставив сюда (1.1) и (2.1), получим

$$J_q=\theta^{-2\gamma-2p-\rho}\frac{R^2X^2}{B}P'A_q, \qquad A_q=\frac{1}{F}\iint (T_0^{\alpha\beta}\mu_{\alpha\beta}w)_1\,dF \tag{2.5}$$

где P' соизмеримо единице, p получается из величины p' так же, как при построении (1.4); A_q пока будем считать тоже соизмеримым единице, но отметим, что это предположение не всегда справедливо. Во-первых, главная часть подынтегрального выражения (2.4) может обратиться в нуль на всей срединной поверхности. Во-вторых, оно может существенно отличаться от нуля только в окрестности некоторой линии. Ниже такие случаи будут обсуждаться в применении к конкретным задачам.

Замечание. Средние значения p в формулах (1.4) и (2.5) получаются различными путями и могут не совсем совпадать, но это различие не принимается во внимание.

Равенство Клапейрона (2.3) после подстановок (1.4), (2.4) и отбрасывания общих множителей принимает вид

$$\theta^\varkappa A_\varepsilon+{}^1/_3\theta^{2-4p}A_\mu=\theta^{-\rho-2p}P'A_q \tag{2.6}$$

По предположению, A_ε, A_μ положительны и соизмеримы единице, а A_q соизмеримо единице по модулю, поэтому полученное равенство будет асимптотически непротиворечиво (не приведет в исходном приближении к одному из равенств вида $A_\varepsilon=0$, $A_\mu=0$, $A_\varepsilon+{}^1/_3A_\mu=0$ или $A_q=0$) только в том случае, если

$$\rho=-\min(\varkappa;\ 2-4p)-2p \tag{2.7}$$

Однородная линейная краевая задача устойчивости оболочек заключается в отыскании собственных значений параметра P и соответствующих тензоров, T^{mn}, M^{mn}, N^m, v_m, w, ε_{mn}, μ_{mn}, образующих нетривиальное решение. Если показатели p, $\varkappa$ зафиксированы, т. е. заранее заданы асимптотические свойства искомого решения, то формула (2.7) определит непротиворечивое значение ρ, такое, при котором может существовать нетривиальное решение с данными p, $\varkappa$. Обратное утверждение может оказаться неверным. Не для всякой тройки чисел (ρ, p, $\varkappa$), удовлетворяющей

(2.7), существуют нетривиальные решения краевой задачи устойчивости оболочек. Искомые тензоры должны удовлетворять краевым условиям и, как будет видно далее, может случиться, что данной паре чисел $(p, \varkappa)$ отвечает слишком узкий (или пустой) класс этих тензоров. Поэтому непротиворечивые значения ρ могут оказаться нереализуемыми, а под показателем устойчивости ρ, определяющего по формуле (2.1) асимптотику верхнего критического значения параметра P, надо понимать минимальное из всех реализуемых непротиворечивых значений ρ. При этом числа $(p, \varkappa)$, соответствующие реализуемому минимуму, определят асимптотические свойства формы потери устойчивости. В дальнейшем $\varkappa$, p будут называться показателями предполагаемой формы потери устойчивости.

3. Формулой (2.7) параметр ρ выражается через $(p, \varkappa)$ как кусочно-линейная функция, гладкость которой нарушается лишь при $\varkappa=2-4p$. Будет приниматься, что область изменения $(\varkappa, p)$ ограничена неравенствами $\varkappa\geqslant 0$, $0\leqslant p<1$. Первое из этих соотношений было оговорено выше. Неравенство $p<1$ должно соблюдаться при любом рассмотрении в рамках двухмерной теории оболочек, а требование $p\geqslant 0$ связано с тем, что понятие отрицательного показателя изменяемости в общем случае не имеет смысла. Минимизация параметра ρ не вызывает затруднений и ниже формулы для $\rho_{\min}$ будут приводится без пояснений.

Пусть предполагаемая форма потери устойчивости не есть псевдоизгибание. Тогда, положив $\varkappa=0$ в (2.7) и минимизируя ρ по параметру p, получим

$$\rho_{\min}=\rho(\varkappa=0,\ p={}^1/_2)=-1 \tag{3.1}$$

Можно принять, что это значение ρ реализуемо для оболочки любого очертания при любых граничных условиях, так как равенству $\varkappa=0$ соответствует весьма широкий класс деформаций: любые деформации, за исключением псевдоизгибаний. Отсюда следует, что (3.1) определяет общую верхнюю грань значений ρ, соответствующих верхней критической нагрузке. Поэтому в дальнейшем будут учитываться только такие непротиворечивые значения ρ, которые удовлетворяют неравенству $\rho\leqslant-1$.

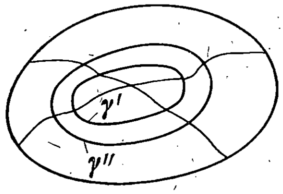
Показано [4], что достаточно жестко закрепленная оболочка положительной кривизны обладает физической жесткостью, т. е. в ней невозможны псевдоизгибания срединной поверхности, согласованные с условиями закрепления краев. Для таких оболочек равенство $\varkappa=0$ становится обязательным, так как тензоры закритического состояния, конечно, нужно подчинить граничным условиям. Это значит, что для достаточно жестко закрепленных оболочек положительной кривизны асимптотика верхней критической нагрузки определяется формулами (3.1) и (2.1), т. е. имеет вид

$$P=2E\theta^2P'/(1-\nu^2) \tag{3.2}$$

Это вполне согласуется с известными расчетными формулами (см., например, [1, 7]).

Асимптотические свойства форм потери устойчивости достаточно жестко закрепленных оболочек положительной кривизны характеризуются показателями $\varkappa=0$, $p={}^1/_2$, указанными в (3.1), т. е. соответствующая деформация не является псевдоизгибанием, а ее средний показатель изменяемости должен равняться ${}^1/_2$.

В монографии [1] в качестве предполагаемой формы потери устойчивости достаточно жестко закрепленной оболочки положительной кривизны предложена «деформация продавливания». Она заключается в жестком смещении некоторой части G' срединной поверхности оболочки с образованием желобка $\gamma'\gamma''$, окаймляющего G' и отделяющего недеформированную часть оболочки (фиг. 1). В этом случае вне кольца $\gamma'\gamma''$ оба тензора деформации ε_{mn}, μ_{mn} обращаются в тождественный нуль. Следовательно, в формулах (1.3) для J_ε, J_μ, а также в формуле (2.4) для J_q интегрирование достаточно вести только в кольце $\gamma'\gamma''$, а под F можно подразумевать площадь кольца $\gamma'\gamma''$ (напомним, что формула Клапейрона (2.3) не зависит от смысла величины F). Это значит, что при рассмотрении «деформации продавливания» в рамках предлагаемого метода достаточно учитывать только упругие явления, происходящие внутри желобка $\gamma'\gamma''$. При такой трактовке формулы (2.3) рассуждения, изложенные в начале п. 3, сохранят силу. Это значит, что если форму потери устойчивости искать в классе «деформаций продавливания», то внутри $\gamma'\gamma''$ будут справедливы равенства $\varkappa=0$, $p=1/2$, т. е. переходная деформация, не являясь псевдоизгибанием, должна изменяться в $\gamma'\gamma''$, как простой краевой эффект. Все это согласуется с результатами монографии [1], однако надо заметить, что выявившийся здесь класс деформаций ($\varkappa=0$, $p=1/2$) значительно шире класса «деформаций продавливания», рассмотренных А. В. Погореловым.



Фиг. 1

Примем теперь, что предполагаемая форма потери устойчивости есть псевдоизгибание с фиксированными показателями ($\varkappa$, p). Тогда непротиворечивое значение ρ определяется из формулы (2.7), и нетрудно видеть, что оно будет удовлетворять неравенству $\rho\leqslant 1$ только тогда, когда

$$\begin{gathered}\varkappa+2p\geqslant 1, \text{ если } \varkappa\leqslant 2-4p\\ p\leqslant 1/2, \text{ если } \varkappa\geqslant 2-4p\end{gathered}\tag{3.3}$$

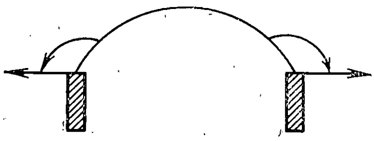
Отсюда следует, в частности, что если оболочка положительной кривизны закреплена так, что не все псевдоизгибания ее срединной поверхности исключены, то это может изменить асимптотику верхней критической нагрузки только тогда, когда показатель возможных псевдоизгибаний окажется достаточно большим.

При высоком показателе возможных псевдоизгибаний значения показателя устойчивости ρ могут оказаться меньше, чем в (3.1), а абсолютный (по всем допустимым значениям p, $\varkappa$) минимум ρ определится формулой

$$\rho_{\min}=\rho(\varkappa=2,\ p=0)=-2 \tag{3.4}$$

которая будет обсуждаться в п. 4.

4. *Пример.* Для пояснения физического смысла результатов, относящихся к недостаточно жестко закрепленным оболочкам положительной кривизны, рассмотрим оболочку, покоющуюся на вертикальной опоре (показано в разрезе на фиг. 2; стрелками обозначены линейное и угловое направления, в которых жесткости опор считаются нулевыми; в остальных направлениях, в том числе по касательной к краю оболочки, жесткость опоры считается бесконечной).


Фиг. 2

Положим, что рассматриваемая оболочка имеет два закрепления, подразумевая под каждым из них требование отсутствия в каждой точке края перемещений в некотором определенном направлении. Одно из этих закреплений является тангенциальным (требование отсутствия перемещений по касательной к краю, т. е. в направлении, лежащем в касательной плоскости), а другое закрепление является нетангенциальным (направление нулевого перемещения не лежит в касательной плоскости). Показано, что если оболочка положительной кривизны имеет один край, на котором осуществлено только одно тангенциальное закрепление, и если в нем угол β между направлением нулевого смещения и касательной к краю не меняется от точки к точке, то существуют три линейно-независимые истинные изгибания, согласованные с этим закреплением. Для оболочек, очерченных по поверхности второго порядка положительной кривизны, это доказано в [8] методами теории аналитических функций комплексного переменного. На произвольные оболочки положительной кривизны утверждение переносится при помощи обобщенных аналитических функций [9].

Если в рассматриваемой оболочке отбросить нетангенциальное закрепление, то останется единственное нетангенциальное закрепление, в котором угол β всюду равен нулю. Следовательно, существует ровно три линейно-независимые линейные истинные изгибания, согласованные с тангенциальным закреплением оболочки и только с ним. Такие изгибания в [4] названы тангенциально возможными и показано, что если они существуют, то каковы бы ни были нетангенциальные закрепления, будут существовать абсолютно возможные псевдоизгибания (согласованные со всеми – тангенциальными и нетангенциальными – закреплениями). Их построение (подробно обсуждено в работе [4]) достигается добавлением к тангенциально возможным истинным изгибаниям Q локализованной вблизи края деформации q, позволяющей устранить невязку в условиях, выражающих нетангенциальные закрепления.

Когда нетангенциальные закрепления не сводятся только к требованию отсутствия угла поворота (как в рассматриваемом примере), показатель псевдоизгибания деформации $Q+q$ равен χ — показателю изменяемости локализованной деформации q, это следует из формул (6.4), (6.9) [4]. Вместе с тем, если предполагаемую форму потери устойчивости искать в классе абсолютно возможных псевдоизгибаний $Q+q$, то показатель устойчивости станет наименьшим при $\chi={}^1/_2$. Это вытекает из рассуждений, описанных далее (п. 7). Таким образом, в обсуждаемой задаче надо положить $\varkappa=\chi={}^1/_2$. Следовательно, при $p<{}^1/_4$ (p — показатель изменяемости тангенциально возможного истинного изгибания Q) неравенство (3.3) не будет выполняться, т. е. ни одно из абсолютно возможных псевдоизгибаний Q_j+q_j не будет приближенно совпадать с формой потери устойчивости оболочки.

Задача о напряженно-деформированном состоянии оболочки, изображенной на фиг. 2, обсуждалась в [10, гл. 20, § 13, 14]. Показано, что в данном случае это состояние вдали от края безмоментно (конечно, при не слишком большом показателе изменяемости нагрузки), а из результатов работы [2] следует, что в нем деформация срединной поверхности в исходном приближении совпадает с тем из трех тангенциально возможных истинных изгибаний, на перемещениях которого поверхностная нагрузка совершает наибольшую работу (обозначим его Q_1+q_1). Таким образом, можно считать, что безмоментное докритическое напряженное состояние Q_1+q_1, существование которого постулировано выше в п. 2, в рассматриваемой задаче действительно реализуется (для оболочки вращения в нем исчезает главная часть вследствие того, что тангенциально возможные истинные изгибания в этом случае вырождаются в тривиальные, но это не имеет значения) и полученные здесь результаты имеют силу. Из них следует, что потеря устойчивости рассмотренной оболочки будет носить такой же характер, как и в случае достаточно жестко закрепленной оболочки положительной кривизны: асимптотика верхней критической нагрузки определяется формулой $\rho=-1$, а форма потери устойчивости имеет показатели $\varkappa=0$, $p={}^1/_2$.

Напомним, что помимо абсолютно возможного истинного изгибания Q_1+q_1, приближенно определяющего докритическую деформацию рассматриваемой оболочки, существуют еще псевдоизгибания Q_i+q_i ($i=2, 3$), согласованные со всеми закреплениями оболочки. Однако, если показатели изменяемости p_i истинных изгибаний Q_i не превышают ${}^1/_4$, то потеря устойчивости не будет состоять в переходе от Q_1+q_1 к одному из псевдоизгибаний Q_i+q_i.

Обратимся к формуле (3.4). Ей отвечает весьма малое ρ и в соответствии с (2.1) сверхнизкое критическое значение нагрузки. Такое значение ρ достигается при $\varkappa=2$, $p=0$, т. е. только в том случае, когда существует согласованное со всеми граничными условиями псевдоизгибание, весьма близкое к истинному ($\varkappa=2$) и имеющее малую изменяемость ($p=0$). Это возможно лишь тогда, когда отсутствуют закрепления краев или когда они очень слабы. Вместе с тем в [11] показано (при положительной кривизне срединной поверхности), что в таких оболочках, вообще говоря, не может реализоваться безмоментное докритическое напряженное состояние, т. е. нарушается основное предположение публикуемой работы, а значит, формула (3.4) имеет силу лишь для задач, в которых внешняя нагрузка удовлетворяет выведенным в [11] весьма жестким условиям существования докритического безмоментного состояния. Формула (3.4) показывает, что такое безмоментное состояние значительно менее устойчиво, чем в достаточно жестко закрепленных оболочках. На основании других соображений этот вывод получился и в [10, гл. 20, § 16].

5. Рассмотрим оболочки неположительной кривизны K. Важная особенность их заключается в том, что для таких оболочек существуют псевдоизгибания, согласованные с любыми условиями закрепления их краев. Общие свойства этих псевдоизгибаний обсуждены в [4] и установлено, что их показатели ($\varkappa$, p) связаны между собой соотношением

$$\varkappa=\nu p, \quad \nu=4 \text{ при } K=0; \quad \nu=2 \text{ при } K<0 \tag{5.1}$$

В частности, для оболочки нулевой кривизны перемещения u_1, u_2, w обсуждаемого псевдоизгибания в явном виде записываются следующим образом:

$$u_1=-\theta^{3p}\{c\}; \quad u_2=\theta^{2p}\left\{A_2\int\frac{\theta^p}{A_2}\frac{\partial c}{\partial\alpha_2}d\alpha_1\right\}$$
$$w=\theta^p\left\{R_2\frac{\theta^p}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_2\int\frac{\theta^p}{A_2}\frac{\partial c}{\partial\alpha_2}d\alpha_1\right)\right\} \tag{5.2}$$

Здесь считается, что срединная поверхность отнесена к линиям кривизны (α_1, α_2); $A_1=1$, A_2 — параметры Ламе; R_2 — не обращающийся в бесконечность главный радиус кривизны; под c подразумевается произвольная функция с показателями изменяемости по (α_1, α_2), равными $(0, p)$ соответственно. Принимается, кроме того, что характерные значения c соизмеримы единице и, исходя из этого, в формулах (5.2) взяты в фигурные скобки величины, которые также считаются соизмеримыми единице.

Подсчитаем по известным формулам компоненты тангенциальной деформации ε_1, ω, ε_2, угол поворота φ относительно α_1-линии и компоненты изгибной деформации $\varkappa_1$, τ, $\varkappa_2$:

$$\begin{gathered}\varepsilon_1=-\theta^{3p}\left\{\frac{\partial c}{\partial \alpha_1}\right\}; \quad \omega=0, \quad \varepsilon_2=-\theta^{3p}\left\{\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}c\right\}\\ \varkappa_1=\theta^{p}(\varkappa_1)_1;\ \tau=\theta^0(\tau)_1,\ \varkappa_2=\theta^{-p}(\varkappa_2)_1,\ \varphi=\theta^0(\varphi)_1\end{gathered} \tag{5.3}$$

Сравнив (5.3) с (1.1), увидим, что с точностью до несущественных в данном случае общих множителей обе группы формул определят одинаковую асимптотику главных компонент тензоров ε_{mn}, μ_{mn}, если в (1.1) положить $p'=-\gamma=p$ и $\varkappa'=4p$. Это значит, что при $p>0$ (5.2) действительно определяют псевдоизгибание, показатели которого подчиняются соотношениям (5.1). Очевидно также, что произвольную функцию c в формулах (5.2) можно подобрать так, чтобы выполнить любые условия закрепления краев оболочки. Внесем (5.1) в (2.7) и, рассматривая ρ как функцию одного переменного, найдем, что ее минимум достигается при

$$\varkappa=2\nu/(4+\nu),\ p=2/(4+\nu) \tag{5.4}$$

и имеет значение

$$\rho_{\min}=-1-\nu/(4+\nu) \tag{5.5}$$

заведомо меньше (3.1). Следовательно, построенные в [4] псевдоизгибания поверхностей неположительной кривизны, вообще говоря, обуславливают асимптотически пониженную устойчивость оболочек неположительной кривизны и в первом приближении определяют их форму потери устойчивости (исключения выявятся ниже).

Из (5.4) вытекает, что обсуждаемые псевдоизгибания имеют большую изменяемость с показателем $p=1/4$ при $K=0$; $p=1/3$ при $K<0$. Однако этими показателями определяется поведение псевдоизгибания только по α_2, т. е. в направлении, ортогональном к некоторому семейству асимптотических линий срединной поверхности (например, для псевдоизгибания (5.2) в направлении α_2-линии). Вместе с тем характерным для этих псевдоизгибаний является существование квазистационарных направлений, в которых изменяемость относительно мала. В оболочках нулевой кривизны, имеющих единственное семейство асимптотических линий, квазистационарным и будет направление этих линий, т. е. волнообразование после потери устойчивости осуществляется в основном ортогонально к единственному семейству асимптотических линий. Оболочки отрицательной кривизны имеют два семейства асимптотических линий, и, как вытекает из [4], каждому из них таким же образом соответствуют свои псевдоизгибания, а форма потери устойчивости в исходном приближении совпадет с некоторой их линейной комбинацией.

Остановимся на цилиндрических оболочках произвольного очертания. Будем считать их замкнутыми в поперечном направлении и рассмотрим три вида задач.

1. Поперечное сжатие, когда $T_2^0\neq0$.
2. Кручение, когда $T_2^0=0$, $S_1^0=S_2^0\neq0$.
3. Осевое сжатие, когда $T_2^0=S_1^0=S_2^0=0$, $T_1^0\neq0$.

Принимается такая же система координат, как и в формулах (5.2), а под T_2^0, S^0, T_1^0 понимаются тангенциальные усилия докритического безмоментного состояния.

Составим при помощи (5.2), (5.3) инвариант, стоящий под интегралом выражения (2.4) для J_g:

для задачи 1

$$T_0^{mn}\mu_{mn}w=(T_1^0\varkappa_1+2S^0\tau+T_2^0\varkappa_2)w=\theta^0[(T_2^0\varkappa_2 w)_1+\ldots]$$

для задачи 2

$$T_0^{mn}\mu_{mn}=\theta^p[(2S^0\tau)+\ldots]$$

для задачи 3

$$T_0^{mn}\mu_{mn}=\theta^{2p}(T_1^0\varkappa_1)_1$$

точками обозначены слагаемые, содержащие положительные степени θ.

Таким образом, для задач 2, 3 имеет место особый случай, упомянутый в п. 2, исчезают главные части подынтегрального выражения в (2.4). Просмотрев еще раз рассуждения, ведущие к формуле (2.7), легко сообразить, что в данном случае это означает, что к правой части равенства (2.7) надо прибавить p в задаче 2 и $2p$ — в задаче 3. Таким образом, учитывая (5.1), (5.5), получим: $\rho=-{}^3/_2$ для задачи поперечного сжатия; $\rho=-{}^5/_4$ для задачи кручения; $\rho=-1$ для задачи продольного сжатия.

Все эти результаты согласуются с известными расчетными формулами и общетеоретическими утверждениями [7, 12] для цилиндрических оболочек средней длины, когда длина оболочки L соизмерима характерному радиусу кривизны (длинные оболочки требуют учета влияния дополнительного параметра L/R и дополнительного обсуждения).

Заметим, что полученные здесь значения ρ оказались меньше чем (3.1) только в задачах 1, 2. Лишь в этих случаях можно с уверенностью утверждать, что форма потери устойчивости приближенно совпадает с обсуждаемыми здесь псевдоизгибаниями. В задаче продольного сжатия полученное значение ρ совпадает с (3.1) и обсуждаемое псевдоизгибание с асимптотической точки зрения уже не будет единственно ожидаемой формой потери устойчивости. Возможна и деформация ($\varkappa=0$, $p={}^1/_2$), выявившаяся в п. 3. Этот вывод также подтверждается решением конкретных задач. Для круговой шарнирно опертой цилиндрической оболочки, как известно [7], одному и тому же верхнему критическому значению сжимающей силы соответствует бесчисленное множество форм потери устойчивости. В том числе и обе, описанные выше.

Для оболочек отрицательной кривизны согласно (5.1) и (5.5) получаем $\rho=-{}^5/_3$.

Так же как для цилиндрической оболочки, можно и при $K<0$ указать задачи, для которых полученное значение ρ увеличится на ${}^1/_3$ или на ${}^2/_3$ (на p или $2p$), но в теории оболочек отрицательной кривизны они носят искусственный характер и не представляют практического интереса.

6. Обратимся к обсуждению асимптотики нижней критической силы и для конкретности рассуждений примем, что ее можно строить исходя из теории больших прогибов [7], т. е. сохраним все соотношения линейной теории оболочек, заменив в них ε_{mn} на $\varepsilon_{mn}+\varepsilon_{mn}^*$, где

$$\varepsilon_{mn}^*={}^1/_2(\nabla_m w)(\nabla_n w) \tag{6.1}$$

При этом тензоры, определяющие закритическую деформацию, перейдут в $T^{mn}+T_*^{mn}$, M^{mn}, N^m, v^m, w, $\varepsilon_{mn}+\varepsilon_{mn}^*$, μ_{mn}. Здесь звездочкой отмечены нелинейные слагаемые; под v^m, w, ε_{mn}, μ_{mn} подразумеваются линейные величины, удовлетворяющие геометрическим соотношениям линейной теории оболочек; тензоры T^{mn}, M^{mn} определяются из уравнений состояния (1.3); N^m — из моментных уравнений равновесия, а для ε_{mn}^* и T_*^{mn} имеет силу равенство (6.1) и формула $T_*^{mn}=BE^{\alpha\beta mn}\varepsilon_{mn}^*$.

Легко убедиться, что если подчинить тензоры без звездочек соотношениям линейной теории, заменив в первых трех уравнениях равновесия тензоры поверхностной нагрузки (X^m, x) на ($X^m+X_*{}^m$, $x+x_*$), где

$$X_*{}^m = \frac{1}{2} BE^{m\alpha pq}\nabla_\alpha[(\nabla_p w)(\nabla_q w)], \qquad x_* = -\frac{1}{2} Bb_{\alpha\beta}E^{\alpha\beta pq}(\nabla_p w)(\nabla_q w) \tag{6.2}$$

то все уравнения теории больших прогибов, кроме шестого уравнения равновесия, будут выполняться.

Таким образом, нелинейную задачу о закритическом равновесии оболочки в рамках теории больших прогибов можно отождествить с линейной задачей о напряженно-деформированном состоянии, вызванном условной нагрузкой, заданной формулами (2.2) и дополнительной нагрузкой, связанной с нелинейными слагаемыми и задаваемой формулами (6.2).

Замечание. В общем случае надо учитывать не только поверхностные, но и краевые дополнительные силы. Если есть краевое условие, выражающее отсутствие тангенциальных реакций, то соответствующему однородному равенству должен подчиняться тензор $T^{mn}+T_*{}^{mn}$, что для тензора T^{mn} приведет к неоднородному краевому соотношению. Однако ниже будут рассматриваться только такие формы закритического равновесия, при которых нелинейные эффекты у краев оболочки исчезают и дополнительная краевая нагрузка учитываться не будет.

Итак, при исследовании асимптотики нижней критической нагрузки можно снова исходить из формулы Клапейрона (2.6). В ней левая часть имеет прежний смысл, а в правой части величину J_q надо заменить на

$$\begin{gathered} J_q+J_q{}^* = \left[\frac{R^2X^2}{B}\theta^{-2\gamma}\right]\theta^{-2p-\rho}\left(P'A_q + \frac{B}{R^2X^2}\theta^{2\gamma+2p+\rho}J_q{}^*\right) \\ J_q{}^* = \frac{1}{F}\iint (v_m X_*{}^m + wx_*)\,dF \end{gathered} \tag{6.3}$$

(множитель, взятый здесь в квадратные скобки, был в равенстве (2.6) отброшен). Исключим из рассмотрения равновесное состояние, реализующееся при $P=0$, т. е. в отсутствие внешней нагрузки (если оно существует). Тогда в равенстве (6.3) второй член в круглых скобках должен быть по модулю существенно меньше или, в крайнем случае, соизмерим с первым членом, так как иначе в исходном приближении можно было бы пренебречь в уравнении (2.6) единственым слагаемым, зависящим от P. Можно также принять, что в выражении (6.3) величина, взятая в круглые скобки, не близка к нулю, так как иначе не могло бы выполнится равенство (2.6), в котором, напомним, A_ε и A_μ — положительные числа.

Отсюда вытекает, что для асимптотических оценок в выражении (6.3) можно не учитывать $J_q{}^*$, т. е. при определении асимптотики нижней критической нагрузки исходить из формулы Клапейрона (2.6), считая, что в ней обе части равенства имеют такой же смысл, как и в линейной теории. Это значит, что при одинаковой предполагаемой форме закритического состояния остаются также одинаковыми асимптотики верхней и нижней критической нагрузок. Асимптотическое понижение нижней критической нагрузки по сравнению с верхней происходит только тогда, когда при больших перемещениях существуют принципиально новые формы закритического равновесия. Ниже показано, что для оболочек положительной кривизны их действительно можно построить.

7. Рассмотрим для некоторой поверхности S всюду положительной кривизны конечную «деформацию прощелкивания», заключающуюся в том, что на деформированной поверхности S' возникает замкнутое ребро q, на котором (и только на нем) нарушается гладкость S'. Вне q поверхность S не деформируется, а внутри q имеет место некоторая деформация G с нулевым показателем изменяемости. Частным случаем «деформации прощелкивания» является описанное А. В. Погореловым зеркальное выпучивание [2].

Введем также сглаженную деформацию выпучивания G^*, определив ее внутри ребра q равенством

$$G^*=G+\theta^\sigma g \tag{7.1}$$

где g — деформация, локализованная в малой внутренней окрестности q, а смысл числа σ выяснится ниже. Вне q поверхности S и S' совпадают, т. е. там $G=g=0$.

Зададим g так же, как и в [4], равенствами

$$v^m=0, \quad w=R\zeta \tag{7.2}$$

где ζ — произвольная функция, характерные значения которой на q соизмеримы единице, а при удалении от q экспоненциально затухают. Деформацию G определим так, чтобы на ребре q она не приводила к разрывам в тангенциальных смещениях, а разрыв в w — нормальном прогибе — и разрыв в φ — угле поворота относительно касательной к q — имели вид

$$\Delta w=\theta^\sigma(\Delta w)_1, \quad \Delta\varphi=\theta^0(\Delta\varphi)_1 \tag{7.3}$$

Первый из этих разрывов, как показывает (7.1), можно устранить подобрав соответственно значения ζ в (7.2). Выполним это и назначим число σ так, чтобы согласно второму равенству (7.3) разрыв $\Delta\varphi$ был соизмерим единице. Для этого примем, что q совмещено с линией $\alpha_1=\mathrm{const}$, выбранной криволинейной системы координат (α_1, α_2), и обозначим через χ показатель изменяемости деформации g по α_1. Тогда на q будет выполняться равенство

$$\theta^\sigma\varphi^{(g)}=\theta^{\sigma-\chi}\left[\left(\theta^\chi\frac{R}{A_1}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha_1}\right)_1\ldots\right] \tag{7.4}$$

Здесь и далее в верхних индексах в скобках указывается деформация, для которой строится данная величина. Кроме того, считается, что угол φ можно оценивать по линейной формуле. Символ $(\quad)_1$, как и раньше, означает соизмеримость единице, так как функция ζ при дифференцировании по α_1, грубо говоря, увеличивается в $\theta^{-\chi}$ раз. Таким образом, в силу второго равенства (7.3) надо положить $\sigma=\chi$.

Будем оценивать энергию деформации G^* и введем вместо (1.3) новые обозначения вида

$$J_\varepsilon(a, b)=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}\overset{(a)}{\varepsilon_{\alpha\beta}}\,\overset{(b)}{\varepsilon_{mn}}\,dF \tag{7.5}$$

в которых смысл символов a, b выяснится ниже.

Для G^*, учитывая структуру формул (1.3) (7.1), получаем при $\sigma=\chi$:

$$J_\varepsilon=J_\varepsilon(G+\theta^\chi g, \ G+\theta^\chi g)=J_\varepsilon(G, G)+2\theta^\chi J_\varepsilon(G, g)+\theta^{2\chi}J_\varepsilon(g, g) \tag{7.6}$$

и аналогично для J_μ.

Примем, что $\overset{(G)}{\varepsilon_{st}}=\theta^\pi(\overset{(G)}{\varepsilon_{st}})_1$, $\quad R\overset{(G)}{\mu_{st}}=\theta^0(\overset{(G)}{\mu_{st}})_1$, т. е. будем считать, что деформация G представляет собой псевдоизгибание с показателем 2π и имеет нулевой показатель изменяемости. Кроме того, согласно (7.2)

$$\varepsilon_{st}^{(g)}=\theta^0(b_{mn}R\zeta)_1, \qquad R\mu_{st}^{(g)}=[\theta^{-2\chi}(\theta^{2\chi}R^2\nabla_t\nabla_s\zeta)_1+\ldots]$$

поэтому справедливы равенства

$$J_\varepsilon(G, G)=\theta^{2\pi}J_\varepsilon(G, G)_1, \quad J_\varepsilon(G, g)=\theta^{\pi+\chi}J_\varepsilon(G, g)_1, \quad J_\varepsilon(g, g)=\theta^\chi J_\varepsilon(g, g)_1$$
$$J_\mu(G, G)=R^{-2}J_\mu(G, G)_1, \quad J_\mu(G, g)=R^{-2}\theta^{-\chi}J_\mu(G, g)_1, \quad J_\mu(g, g)=R^{-2}\theta^{-3\chi}J_\mu(g, g)_1 \tag{7.7}$$

в которых, например

$$J_\varepsilon(G,G)_1=\frac{1}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}(\varepsilon_{\alpha\beta}^{(G)})_1(\varepsilon_{mn}^{(G)})_1\,dF$$

$$J_\mu(g,g)_1=\frac{\theta^{-\chi}}{F}\iint E^{\alpha\beta mn}[(\theta^{2\chi}R\nabla_\alpha\nabla_\beta\zeta)_1+\ldots][(\theta^{2\chi}R\nabla_m\nabla_n\zeta)_1+\ldots]dF$$

а остальные функционалы такого вида легко восстанавливаются исходя из смысла формул вида (7.5). Предполагается, что все эти функционалы соизмеримы единице. В тех случаях, когда подынтегральное выражение содержит один или два множителя, связанных с деформацией g, перед интегралом вводится множитель $\theta^{-\chi}$, так как деформация g экспоненциально затухает при удалении от q, и принимается, что при интегрировании соответствующих функций происходит уменьшение, грубо говоря, в $\theta^{-\chi}$ раз.

Потребуем, чтобы выполнились неравенства

$$\pi>2\chi>0 \tag{7.8}$$

Тогда в формулах вида (7.6) асимптотически главными будут третьи слагаемые правой части. Это значит, что (7.8) являются условиями, при которых главная часть энергии деформации связана с упругими явлениями, происходящими вблизи ребра q.

Левую часть равенства Клапейрона (2.3) теперь можно приближенно выразить так:

$$J=J_\varepsilon+{}^1/_3h^2J_\mu=\theta^{3\chi}J_\varepsilon(g,g)_1+{}^1/_3\theta^{2-\chi}J_\mu(g,g)_1 \tag{7.9}$$

Из (2.3), (2.4) следует, что J пропорционально P — искомой интенсивности внешней нагрузки, поэтому P будет асимптотически наименьшей, когда такими же свойствами обладает J. Но в выражении (7.9) с ростом χ первое слагаемое уменьшается, а второе растет. Следовательно, асимптотический минимум будет достигаться при равенстве показателей степеней θ в обоих слагаемых, т. е. при $\chi={}^1/_2$ (когда сглаживающая деформация g подобна простому краевому эффекту). При этом

$$\min J=J|_{\chi=1/2}=\theta^{3/2}(J)_1 \tag{7.10}$$

Легко проверить, что полученный минимум J нельзя усилить за счет нарушения условий (7.8), т. е. принятие этих неравенств законно.

Для величины J_q в равенстве (2.3) справедлива формула (2.4). В ней интегрирование достаточно распространить на область, ограниченную ребром q, где можно принять, что μ_{mn} соизмеримо величине $2b_{mn}$. Отсюда получаем $J_q=Pf$, где f — конечная величина, соизмеримая выражению

$$2F^{-1}\iint T_0^{mn}b_{mn}w\,dF.$$

Из (2.3),(7.10) и из последнего равенства (1.2) теперь вытекает соотношение $P\sim2ER\theta^{5/2}(J)_1/f$, которое показывает, что для достаточно жестко закрепленных оболочек положительной кривизны конечная сглаженная «деформация прощелкивания» образует закритическую форму равновесия, соответствующую такой нагрузке, значения которой асимптотически меньше верхнего критического значения (3.2) (вопрос об устойчивости закритического равновесия здесь не обсуждается).

Сглаженная «деформация прощелкивания» формально представляет собой обобщение заркального выпучивания, предложенного в работе [1], так как не предполагается, что в (7.1) ребро q плоское, а G образуется зеркальным отображением участка поверхности S. Однако из неравенств (7.8) следует, что G является псевдоизгибанием с большим показателем $(2\pi>2)$, т. е. весьма мало отличается от истинного изгибания. Кроме того, доказано [1, с. 11], что для поверхностей положительной кривизны деформация прощелкивания, в которой внутри ребра q имеет место истинное изгибание, возможна лишь тогда, когда q есть плоская кривая, и в этом случае она сводится к зеркальному отображению. Значит, деформация (7.1), в сущности, совпадает с зеркальным выпучиванием.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Погорелов А. В.* Геометрическая теория устойчивости. М.: Наука, 1966. 296 с.
2. *Гольденвейзер А. Л.* Математическая жесткость поверхностей и физическая жесткость оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1979, № 6, с. 65—77.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Геометрический критерий безмоментности напряженного состояния упругой тонкой оболочки.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 114—127.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Изгибания поверхностей и сверхнизкие частоты колебаний тонких оболочек.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 106—117.
5. *Булыгин А. В.* Об одном классе оболочек знакопеременной гауссовой кривизны.— Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 5, с. 97—105.
6. *Новожилов В. В.* Общая теория устойчивости тонких оболочек.— Докл. АН СССР, 1941, т. 32, № 5, с. 316—319.
7. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. М.: Физматгиз, 1963. 879 с.
8. *Гольденвейзер А. Л.* О применении решений задачи Римана — Гильберта к расчету безмоментных оболочек.— ПММ, 1951, т. 15, вып. 2, с. 149—166.
9. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
10. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
11. *Векуа И. Н.* Об условиях, обеспечивающих безмоментное напряженное состояние равновесия выпуклой оболочки.— Сообщ. АН ГрузССР, 1958, т. 20, № 5, с. 525—532.
12. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотические свойства собственных значений в задачах теории упругих тонких оболочек.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 4, с. 729—741.

Москва

Поступила в редакцию 18.III.1982