

УДК 624.07:534.1

**ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ
БАЛОК СТУПЕНЧАТО ПОСТОЯННОЙ ВЫСОТЫ
ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОГО НАГРУЖЕНИЯ**

ЛЕПИК Ю. Р.

Задача оптимального проектирования жесткопластических балок ступенчато постоянной высоты в случае импульсного нагружения исследована в [1-4], где решена приближенно методом модальных движений [5]. Полученные результаты достаточно просты и использованная методика может быть распространена на более сложные объекты, как, например, круглые и кольцевые пластины, оболочки вращения. Но следует иметь в виду, что метод модальных движений имеет и недостатки: отсутствуют оценки точности полученных результатов; найденные решения могут оказаться не единственными, что затрудняет выбор оптимальных параметров конструкций. Поэтому важно получить решение некоторых задач в точной постановке и на базе этих результатов сделать окончательные выводы о целесообразности применения метода модальных движений.

В публикуемой работе исследуется балка со свободно опертыми концами. Выведены уравнения движения и разработана методика их решения, позволяющая учесть и эффекты движения пластических шарниров. Найденные результаты сопоставлены с результатами, полученными методом модальных движений.

1. Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим жесткопластическую балку прямоугольного поперечного сечения со свободно опертыми концами; высота балки ступенчато постоянна, размеры указаны на фиг. 1, а.

Уравнения движения в случае импульсного нагружения имеют вид

$$\partial M^* / \partial x = Q^*, \quad \partial Q^* / \partial x = \rho B h^*(x) \partial^2 w^* / \partial t^2 \quad (1.1)$$

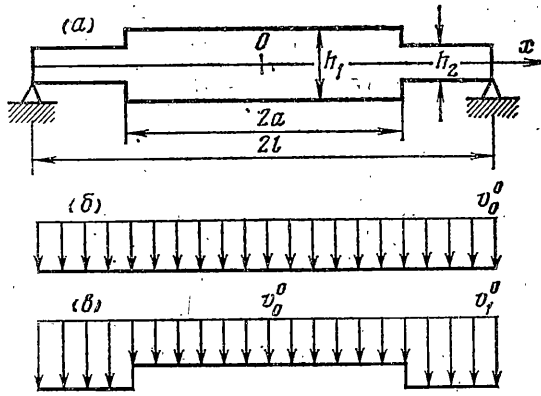
где M^* — изгибающий момент, Q^* — перерезывающая сила, ρ — плотность, B и $h^*(x)$ — ширина и высота балки, w^* — прогиб.

Для интегрирования системы (1.1) надо задавать начальное поле скоростей. Здесь есть две возможности: считать, что скорость по всей длине балки постоянна (фиг. 1, б); такой случай имеет место, если, например, балка со скоростью $v^*(x) = \text{const}$ падает на опоры, но практически более важным является распределение скоростей, указанное на фиг. 1, в. Это распределение получено по следующим соображениям.

При решении задач изгиба жесткопластических конструкций зависимость нагрузка — время часто принимается в виде прямоугольного импульса. В таком случае поперечная нагрузка имеет в промежутке времени $(0, t_*)$ постоянное значение, а при $t = t_*$ полностью снимается (балка получает импульс $J = 2\rho l t_*$). Рассмотрим далее предельный случай, когда $t_* \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$, а импульс J не изменяется. По теореме о сохранении количества движения можем написать

$$J = 2\rho B \int_0^l v^*(x) h^*(x) dx \quad (1.2)$$

Если допустить, что давление p распределено по длине балки равномерно и высота изменяется, как указано на фиг. 1, а, то приходим к распределению начальных скоростей, указанному на фиг. 1, в, причем $v_1^* / v_0^* = h_1 / h_2$.



Фиг. 1

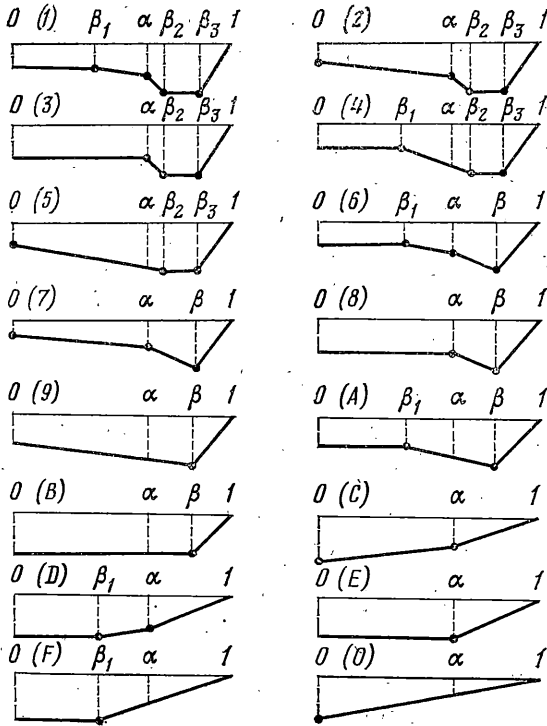
Будем использовать следующие безразмерные величины: $\xi = x/l$, $\alpha = a/l$, $h = h^*/h_2$, $\gamma = h_1/h_2$, $\Delta = \alpha\gamma + 1 - \alpha$, $u = J/\rho V$, $v_0 = v_0^*/u$, $v_1 = v_1^*/u$, $\tau = 3\sigma_0 V^2 t / (4BJ^2)$, $w = 3\rho\sigma_0 V^3 w^* / (4BJ^2 l^3)$, $M = 4M^* / (\sigma_0 B h_2^2)$, $Q = 4lQ^* / (\sigma_0 B h_2^2)$, где σ_0 — предел текучести, V — объем балки.

Уравнения движения (1.1) в этом случае будут иметь вид (штрихи означают производные по координате ξ , а точки — производные по времени)

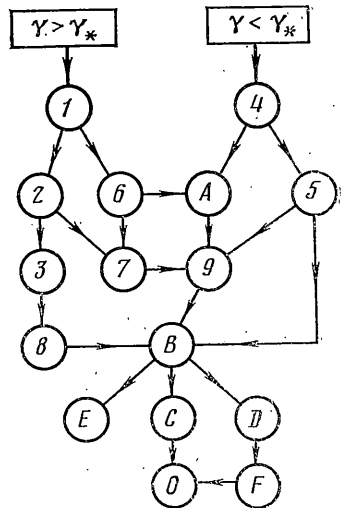
$$M' = Q, \quad Q' = 6\Delta h(\xi)w'' \quad (1.3)$$

причем $h(\xi) = \gamma$ для $\xi \in (0, \alpha)$ и $h(\xi) = 1$ для $\xi \in (\alpha, 1)$.

При решении задачи оптимизации будем разыскивать такие параметры α и γ , для которых безразмерный остаточный прогиб в центре



Фиг. 2



Фиг. 3

балки $w(0, \tau_f)$ или средний прогиб

$$W = \int_0^1 w(\xi, \tau_f) d\xi \quad (1.4)$$

минимальны (τ_f — безразмерное время движения). Сравниваются лишь проекты с постоянным объемом V в случае одинаковых импульсов J .

Так как $V = 2Blh_2\Delta$, то из постоянства объема вытекает, что

$$h_1 = V\gamma / (2Bl\Delta), \quad h_2 = V / (2Bl\Delta) \quad (1.5)$$

Интегрируя соотношение (1.2), переходя к безразмерным величинам и учитывая постоянство импульса J , находим $v_0 = \Delta / \gamma$, $v_1 = \Delta$.

2. Интегрирование уравнений движения. При интегрировании уравнений (1.3) приходится удовлетворить крайевым условиям $M(1) = Q(0) = 0$, $w(1) = \dot{w}(1) = 0$ и условиям непрерывности $M(\alpha-) = M(\alpha+)$, $Q(\alpha-) = Q(\alpha+)$. Так как изгибающий момент не может превосходить свое предельное значение, то должно быть $|M(\xi)| \leq \gamma^2$ при $\xi \in (0, \alpha)$ и $|M(\xi)| \leq 1$ при $\xi \in [\alpha, 1)$. Если в некотором сечении $\xi = s_i$ выполняются равенства $|M(\xi)| = \gamma^2$ при $\xi \in (0, \alpha)$ или $|M(\xi)| = 1$ при $\xi \in [\alpha, 1)$, то в этом сечении появляется пластический шарнир; причем если $s_i \neq \alpha$, то должно быть еще $Q(s_i) = 0$. Прогиб w и скорость прогиба \dot{w} являются непрерывными функциями в сечениях $\xi = \alpha$ и $\xi = s_i$, кроме того, в случае движущегося шарнира непрерывной должна быть еще величина w' в точке $\xi = s_i$.

Уравнения движения (1.3) проинтегрируем методом квазимодалных движений, который был предложен ранее в [6, 7] (подробнее см. [8]).

Можно показать, что в случае данной задачи возможны 16 фаз движения. Эпюры скоростей для этих фаз представлены на фиг. 2. Схема последовательности отдельных фаз указана на фиг. 3. Символом γ_* на этой схеме обозначен корень уравнения $\gamma^{1/2}(\gamma^2 - 1) = 2$ (если $\gamma > \gamma_*$, то движение начинается с первой фазы, а при $\gamma < \gamma_*$ — с четвертой). Тройное разветвление имеется после окончания фазы B : если $Z_1 = 2(1 - \alpha)(\gamma^2 - 1)(3\alpha\gamma + 1 - \alpha) - 3\alpha^2\gamma > 0$, то происходит переход в фазу E ; если $Z_2 = \alpha^2\gamma - (1 - \alpha) \times (\gamma^2 - 1)[3\alpha\gamma + 2(1 - \alpha)] > 0$, то имеем фазу D ; при $Z_1 < 0$, $Z_2 < 0$ переходим в фазу C .

Отметим, что в фазе D шарнир $\xi = \beta$ является неподвижным.

3. Метод модальных движений. Зададим теперь поле скоростей в форме

$$\begin{aligned} \dot{w}(\xi, \tau) &= v_\alpha + \frac{v - v_\alpha}{\alpha}(\alpha - \xi) \quad \text{при } \xi \in [0, \alpha] \\ \dot{w}(\xi, \tau) &= \frac{v_\alpha}{1 - \alpha}(1 - \xi) \quad \text{при } \xi \in [\alpha, 1] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Продифференцируем эти соотношения, учитывая, что коэффициенты v_α и v являются функциями от времени. В результате получим выражение для ускорения \ddot{w} , которое подставим в систему (1.3). Интегрируя эту систему при условиях $Q(0) = M(1) = 0$ и удовлетворяя условия непрерывности для Q и M в точке $\xi = \alpha$, находим

$$M(0) = -\alpha\gamma\Delta [(3 - \alpha)v + (3 - 2\alpha)v_\alpha] - 2\Delta v_\alpha(1 - \alpha)^2 \quad (3.2)$$

$$M(\alpha) = -3\alpha\gamma\Delta(1 - \alpha)(v + v_\alpha) - 2\Delta v_\alpha(1 - \alpha)^2$$

Из системы (1.3) следует также, что величины v_α и v должны быть постоянными; обозначим $E = -v_\alpha$ и $F = -v$. Подставляя эти выражения в (3.2) и выполняя неравенства $M(0) \leq \gamma^2$, $M(\alpha) \leq 1$, будем иметь

$$\begin{aligned} [\alpha\gamma(3 - 2\alpha) + 2(1 - \alpha)^2]E + \alpha\gamma(3 - \alpha)F &\leq \gamma^2 / \Delta \\ [3\alpha\gamma(1 - \alpha) + 2(1 - \alpha)^2]E + 3\alpha\gamma(1 - \alpha)F &\leq 1 / \Delta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Знак равенства в этих формулах имеет место, если в сечении $\xi=0$ или соответственно в $\xi=\alpha$ возникает пластический шарнир. Далее имеем три случая, для которых введем множитель $\lambda=E/F$.

1. Пластический шарнир возникает лишь в центре $\xi=0$. Здесь $v_\alpha=v(1-\alpha)$ и, следовательно, $E=F(1-\alpha)$, $\lambda=1-\alpha$. Первое условие из (3.3) превращается в равенство.

2. Здесь появляется пластический шарнир в сечении $\xi=\alpha$. Теперь имеем $v=v_\alpha$, $E=F$, $\lambda=1$; в равенство превращается второе уравнение из (3.3).

3. Здесь имеем шарниры в сечениях $\xi=0$ и $\xi=\alpha$ и оба соотношения (3.3) выполняются как равенства. Этот случай реализуется, если $E > F(1-\alpha)$ или $\lambda > 1-\alpha$.

Для всех этих модальных движений из системы (3.3) можно вычислить коэффициенты E , F и λ .

Переходим теперь к определению остаточного прогиба. Интегрируя уравнение $v'=-E=\text{const}$, находим $v(\tau)=v(0)-E\tau$, $w(0, \tau)=v(0)\tau-0,5E\tau^2$. Пусть движение прекращается в момент времени $\tau=\tau_f$; условие $v'(\tau_f)=0$ даст

$$w(0, \tau_f) = 1/2 [v(0)]^2 / F \quad (3.4)$$

Таким же образом находим, что

$$w(\alpha, \tau_f) = 1/2 [v_\alpha(0)]^2 / E \quad (3.5)$$

Для вычисления среднего прогиба (1.4) получим формулу

$$W = 1/2 [w(\alpha, \tau_f) + \alpha w(0, \tau_f)] \quad (3.6)$$

В случае модальных движений имеем $v_\alpha(0) = \lambda v(0)$.

Таким образом, соотношения (3.4) — (3.6) содержат еще неизвестную величину $v(0)$. Для определения ее надо связывать поля модальных и действительных скоростей для начала движения. Ниже даются два варианта решения этой задачи.

Метод кинетической энергии. Здесь приравниваются кинетические энергии при $\tau=0$ для действительных и модальных скоростей. Если под символами $w^*(\xi, 0)$ и $w_*(\xi, 0)$ понимать соответственно действительные и модальные скорости, то имеем

$$\int_0^1 h(\xi) [w^*(\xi, 0)]^2 d\xi = \int_0^1 h(\xi) [w_*(\xi, 0)]^2 d\xi$$

Вычислим эти интегралы, учитывая формулы $v_0=\Delta/\gamma$, $v_1=\Delta$ и (3.1); в результате находим

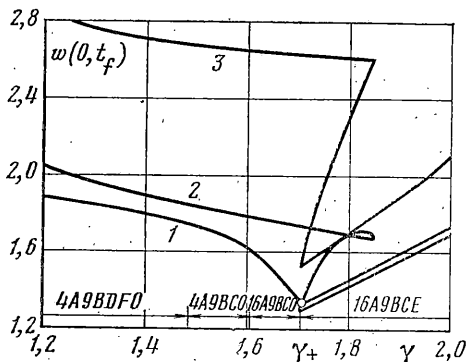
$$v_{0,2} = \frac{3\Delta^2}{\gamma\Gamma} [\alpha + \gamma(1-\alpha)], \quad \Gamma = \alpha\gamma(1+\lambda+\lambda^2) + (1-\alpha)\lambda^2 \quad (3.7)$$

Метод Саймондса — Мартина. В [5] было показано, что метод модальных движений обеспечивает наибольшую точность, если выполняется равенство

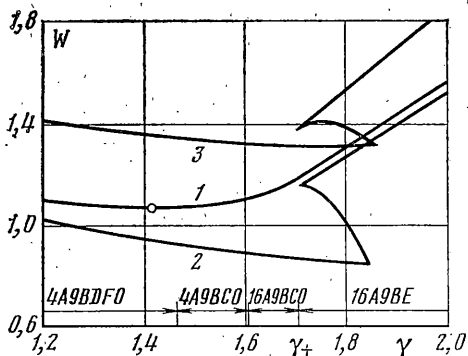
$$\int_0^1 h(\xi) w^*(\xi, 0) w_*(\xi, 0) d\xi = \int_0^1 h(\xi) [w_*(\xi, 0)]^2 d\xi$$

Вычисляя эти интегралы, получим $v_0=4,5\Delta(\lambda+\alpha)/\Gamma$.

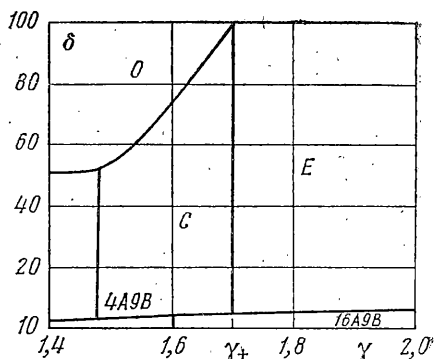
Для сравнения этих двух вариантов решения представим результаты вычислений для балок постоянной толщины (эти результаты можно получить из общих зависимостей, принимая $\gamma=1$). В случае точного решения остаточный прогиб в центре балки $w(0, \tau_f)=2$; метод кинетической энергии и метод Саймондса — Мартина дадут $w=3$ и $2,25$ (ошибки будут соответственно 50 и 12,5%). Для среднего прогиба точное решение даст $W=1,167$; проводя вычисления по методу модальных решений, находим



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

$W=1,5$ (ошибка 28,6%) и $W=1,125$ (ошибка 3,6%). Из этого сравнения видно, что точность, достигаемая методом Саймондса — Мартина, значительно больше, чем в случае метода кинетической энергии.

4. Примеры. На основании методики, представленной в пп. 2, 3, на ЭВМ проведены расчеты, часть которых представлена ниже.

Выбираем вначале для параметра α значение $\alpha=0,8$. Остаточный прогиб $w(0, \tau_f)$ и средний остаточный прогиб W как функции от параметра γ показаны на фиг. 4, 5. Здесь кривые 1 представляют точные решения, 2, 3 — модальные решения, найденные методом Саймондса — Мартина (кривые 2) или методом кинетической энергии (кривые 3). На нижней части этих графиков указано, какая последовательность фаз из фиг. 2 была реализована для данного значения γ (например, символ 4A9BDF0 означает, что движение начинается с фазы 4, следуют фазы A, B, D, F, 0).

Из фиг. 4, 5 видно, что в случае модальных решений, как и следовало ожидать, существует некоторый интервал параметра γ , где функции $w(0, \tau_f)$ и W являются многозначными.

Проведенные вычисления показали, что все кривые на фиг. 4 имеют минимум при $\gamma_+=1,71$. Такого совпадения нельзя констатировать в случае интегрального критерия (1.4): как следует из фиг. 5, точные и модальные решения дадут для оптимального параметра γ совсем различные значения.

При исследовании фиг. 4, 5 возникает вопрос, почему при $\gamma > \gamma_+$ модальные решения сравнительно хорошо аппроксимируют точное решение, а при $\gamma < \gamma_+$ кривые 1—3 значительно расходятся. Для выяснения этого факта рассмотрим фиг. 6, где указан в процентах остаточный прогиб, приобретенный в течение отдельных фаз. Из диаграммы следует, что первые фазы движения 4A9B или 16A9B дадут вклад в полный прогиб лишь ~5%. При $\gamma > \gamma_+$ доминирует модальная фаза E, поэтому метод модальных движений имеет хорошую точность.

В случае $\gamma < \gamma_+$ значительная часть полного прогиба достигается в течение немодальных фаз DF или C; движение заканчивается с модальной фазой 0, но значение прогиба с увеличением параметра γ постепенно уменьшается. Поэтому и точность метода модальных движений невысока. Так как минимум среднего прогиба достигается в области $\gamma < \gamma_+$ (см. фиг. 5), то и оптимальные значения γ , найденные в точной и приближенной постановках, не совпадают.

Варируем теперь оба параметра α и γ . Проведенные вычисления показали, что минимальный прогиб в центре балки достигается при $\alpha=0,82$, $\gamma=1,79$, причем

$w(0, \tau_f) = 1,33$; по сравнению с балкой постоянной высоты прогиб уменьшился на 33%. В случае среднего прогиба (1.4) имеем соответственно $\alpha = 0,75$, $\gamma = 1,36$, $W = 1,08$, что составляет 91,4% от среднего прогиба балки постоянной высоты.

Решая задачу методом модальных движений и минимизируя прогиб в центре балки, находим: а) методом кинетической энергии $\alpha = 0,83$, $\gamma = 1,82$, $w(0, \tau_f) = 1,53$; б) методом Саймондса - Мартина $\alpha = 0,77$, $\gamma = 1,60$, $w(0, \tau_f) = 1,30$.

Сравнивая эти данные со значениями оптимальных параметров, найденных путем точного решения задачи, заметим некоторые отклонения. На первый взгляд это можно считать недостатком метода модальных движений. Но более подробный анализ показывает, что минимум прогиба достигается всегда вдоль некоторой кривой $\alpha = \alpha(\gamma)$, где случай 3 (из п. 3) переходит в случай 2. Некоторые точки этой кривой указаны в таблице, где даны и значения прогиба в центре балки, найденные методом кинетической энергии и методом Саймондса - Мартина (отмечены соответственно через w_* и w_{**}).

γ	α	w_*	w_{**}
1,4	0,681	1,588	1,314
1,5	0,730	1,558	1,300
1,6	0,768	1,543	1,297
1,7	0,799	1,536	1,299
1,8	0,823	1,534	1,305
1,9	0,844	1,535	1,312
2,0	0,860	1,537	1,320
2,1	0,875	1,540	1,329
2,2	0,887	1,543	1,337
2,3	0,897	1,546	1,346
2,4	0,906	1,549	1,353
2,5	0,914	1,553	1,361

Из таблицы следует, что вблизи точки минимума величины w_* и w_{**} изменяются очень мало (все числа, указанные в двух последних строках таблицы, отличаются от их минимальных значений меньше чем на 5%). Это обстоятельство открывает и больше возможности для проектировщика: вместо строгого выбора оптимальных параметров α , γ он может изменить величину γ в довольно широких пределах, определяя значение α согласно таблице.

Рассмотренная здесь задача является модельной. На основе данной методики получены точные решения и для некоторых других задач. Случай жестко заделанной балки под действием импульсного нагружения исследован в [9]. Задача оптимизации свободно опертой балки под действием равномерного динамического давления изучалась в [10]. Свободно опертые балки, высота которых изменяется по закону $h^*(x) = h_2[1 + k(1 - x/l)^n]$, где $2l$ - длина балки, k , n - положительные постоянные, подлежащие оптимизации, к балке приложена равномерная поперечная нагрузка, - рассматривались в [11].

Анализ решений этих задач показывает, что все выводы, которые были сделаны в п. 4 публикуемой работы, сохраняют силу. В частности, следует отметить и здесь высокую точность метода модальных движений при решении оптимизационных задач.

В случае оптимизации жесткопластических двухступенчатых пластин и оболочек имеются лишь приближенные решения, полученные методом модальных движений (некоторые результаты для круглых пластин и оболочек вращения можно найти в [8]).

Возникает вопрос, какую экономию можно получить применяя вместо двухступенчатых элементов конструкций элементы более сложной формы. Здесь пока имеется лишь один результат: в [1] показано, что в случае свободно опертой балки под действием импульсного нагружения остаточные прогибы для оптимального проекта с тремя разными высотами h_1 , h_2 , h_3 лишь на 6,3% меньше, чем в случае двухступенчатой балки того же объема. Хотя в данном случае экономия небольшая, этот вопрос заслуживает дальнейшего исследования.

Развитый метод решения достаточно прост, так как приходится интегрировать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения. Некоторые осложнения возникают только при выборе подходящих режимов движения и при составлении соответствующих дифференциальных уравнений. Но этот процесс может быть автоматизирован при помощи ЭВМ. Первая попытка в этом направлении сделана в [12], где представлен пакет программ для решения задач изгиба и оптимизации балок, состоящих из любого числа сегментов постоянной высоты.

В дальнейшем желательно перейти к более совершенным моделям среды (см., например, [13, 14]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Lepik U., Mróz Z. Optimal design of plastic structures under impulsive and dynamic pressure loading.— *Int. J. Solids Struct.*, 1977, v. 13, No. 7, p. 657–674.
2. Lepik U., Mróz Z. Optimal design of impulsively loaded plastic beams for asymmetric mode motions.— *Int. J. Solids Struct.*, 1978, v. 14, No. 10, p. 841–850.
3. Сакков Э. К оптимальному проектированию жесткопластической свободной балки ступенчато-переменной толщины под действием динамической нагрузки.— *Уч. зап. Тарт. ун-та*, 1979, т. 487, с. 40–44.
4. Соонегс К., Хартикайнен А. Оптимизация динамически нагруженной жестко закрепленной балки ступенчато-переменной толщины.— *Уч. зап. Тарт. ун-та*, 1979, т. 487, с. 45–51.
5. Martin J. B., Symonds P. S. Mode approximation for impulsively-loaded rigid-plastic structures.— *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs; J. Engng Mech. Div.*, 1966, v. 92, No. 5, p. 43–66.
6. Lepik U. The method of quasimodal form solutions for the dynamic response of rigid-plastic structures.— *Mech. Res. Commun.*, 1979, v. 6, No. 3, p. 135–140.
7. Лепик Ю. П. Решение задач динамического изгиба жесткопластических конструкций методом квазимодальных форм движения.— *Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький: Изд-во Горьк. ун-та*, 1980, вып. 14, с. 70–74.
8. Лепик Ю. П. Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин: Валгус, 1982. 198 с.
9. Соонегс К. Оптимизация формы импульсивно нагруженной двухступенчатой жестко заделанной балки.— *Уч. зап. Тарт. ун-та*, 1981, т. 564, с. 24–34.
10. Lepik U. Optimal design of rigid-plastic simply supported beams under dynamic loading.— *Int. J. Solids Struct.*, 1982, v. 18, No. 4, p. 285–292.
11. Лепик Ю. П. Оптимальное проектирование жесткопластических балок переменной толщины под действием динамической нагрузки.— *Прикладные проблемы прочности и пластичности: Сб. статей. Горький: Изд-во Горьк. ун-та*, 1981, вып. 18, с. 85–93.
12. Лепик Ю., Юст, М. Автоматизированный расчет динамического изгиба жесткопластических балок ступенчато-постоянной высоты.— *Уч. зап. Тарт. ун-та*, 1981, т. 564, с. 12–23.
13. Когляревский В. А. Динамический расчет балки за пределом упругости с учетом эффектов скоростного деформирования.— *Строит. механ. и расчет сооруж.*, 1979, № 6, с. 48–55.
14. Symonds P. S. Elastic, finite deflection and strain rate effects in a mode approximation technique for plastic deformation of pulse loaded structures.— *J. Mech. Engng Sci.*, 1980, v. 22, No. 4, p. 189–197.

Тарту

Поступила в редакцию
18.III.1982