

УДК 539.375

**ОЦЕНКИ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ ФОРМУЛЫ
В ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ
О ПЛОСКОЙ ТРЕЩИНЕ НОРМАЛЬНОГО РАЗРЫВА**

ГОЛЬДШТЕЙН Р. В., ШИФРИН Е. И.

В [1] была доказана изопериметрическая оценка сверху объема плоской трещины нормального разрыва при однородной нагрузке. В публикуемой работе благодаря замеченной связи между характеристиками решений задачи о трещине и уравнения Пуассона установлена изопериметрическая оценка объема снизу. В [2] формулируется, в каком случае можно считать оправданной приближенную формулу $x(G) \approx f(y(G))$, $y(G) = (y_1(G), \dots, y_m(G))$. Здесь $x(G)$ — искомая характеристика, зависящая от области G , $y_i(G)$ — более просто вычисляемые функционалы от области G .

В предлагаемой работе построены две приближенные формулы для объема трещины, занимающей выпуклую область, удовлетворяющие условиям [2]. Одна выражает объем через площадь области G и жесткость при кручении стержня сечением G , другая — через площадь области и длину ограничивающего ее контура. Кроме того, предложена приближенная формула для определения коэффициента интенсивности напряжений через коэффициент в асимптотике у границы области функции кручения. Наконец, оценки и приближенные формулы для объема трещины в сочетании с ранее [3] установленной оценкой через объем трещины максимального вдоль контура трещины значения коэффициента интенсивности напряжений (N_{\max}) позволяют получить достаточно эффективные оценки N_{\max} снизу. Такие оценки дают достаточные условия распространения трещины.

1. Пусть G — ограниченная область в плоскости $x_3=0$, занимаемая трещиной. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что к поверхностям трещины приложены нормальные однородные нагрузки единичной интенсивности. Напомним, что в этом случае u — смещение поверхности трещины в направлении x_3 , удовлетворяет уравнению $p_G \Delta u = 2(1-\nu^2)E^{-1}B$, $u \in H_{1/2}^{\circ}(G)$.

Объем трещины $V = 2 \int_G u(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. В области G рассмотрим задачу: $\Delta \Phi(x_1, x_2) = -2$, $\Phi \in H_1^{\circ}(G)$. Обозначим $P = 2 \int_G \Phi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$. Если

G — односвязная область, то P представляет собой жесткость при кручении стержня сечением G . Сформулируем

Утверждение 1.1. Рассмотрим выражение $J(G) = P/V$. Среди всех областей заданной площади S $J(G)$ достигает максимума на круге.

К сожалению, строгого доказательства этого утверждения пока нет, однако можно привести некоторые соображения, дающие основание предположить, что утверждение 1.1 справедливо.

Предложение 1.1. Функционал $J(G)$ ограничен сверху на областях заданной площади, т. е. $\exists C > 0$ такая, что $\forall G$ площади S выполняемо $J(G) \leq C$.

Доказательство. Согласно [1]:

$$V^{-1} = E(1-\nu^2)^{-1} 4^{-1} \inf_{v \in H_{1/2}^{\circ}(G)} \left[(\Delta v, v) / \left(\int_G v(x) dx \right)^2 \right]$$

Следовательно

$$J(G) = \frac{P}{V} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\int_G \Phi(x) dx \right) \inf_{v \in H_{1/2}^*(G)} \left[(\Delta v, v) / \left(\int_G v(x) dx \right)^2 \right] \leq \\ \leq \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left(\int_G \Phi(x) dx \right) (\Delta \Phi, \Phi) \left(\int_G \Phi(x) dx \right)^{-2} = \\ = \frac{E(\Delta \Phi, \Phi)}{2(1-\nu^2)} \left(\int_G \Phi(x) dx \right)^{-1}$$

$$(\Delta \Phi, \Phi) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |\xi| |\Phi^\vee(\xi)|^2 d\xi \leq \left(\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |\xi|^2 |\Phi^\vee(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

$$\left(\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} |\Phi^\vee(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} = (-\Delta \Phi, \Phi)^{1/2} \|\Phi\| = \sqrt{2} \left(\int_G \Phi(x) dx \right)^{1/2} \|\Phi\|$$

$$\Phi^\vee(\xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) e^{i(x, \xi)} dx, \quad (x, \xi) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2$$

Поэтому

$$J(G) \leq \frac{E}{\sqrt{2}(1-\nu^2)} \|\Phi\| \left(\int_G \Phi(x) dx \right)^{-1/2} \quad (1.1)$$

$$2 \int_G \Phi(x) dx = (-\Delta \Phi, \Phi) \geq \lambda^1(G) \|\Phi\|^2 \geq \lambda^1(K_R) \|\Phi\|^2 \quad (1.2)$$

Здесь $\lambda^1(G)$ — минимальное собственное число оператора $(-\Delta)$ в области G для функций, равных нулю на границе $G - \partial G$; K_R — круг радиуса $R = \sqrt{S/\pi}$; $\lambda^1(G) \geq \lambda^1(K_R)$ согласно [2]. Из (1.1), (1.2) следует $J(G) \leq E(1-\nu^2)^{-1} [\lambda^1(K_R)]^{-1/2} = C$.

Предложение 1.1 доказано.

Предложение 1.2. Пусть задано семейство областей G_t , таких, что граница области $G_{t+\Delta t}$ может быть определена значениями нормали к $\partial G_t - n(s, t, \Delta t)$, здесь s — координаты на ∂G_t . Предположим, что существует $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} [n(s, t, \Delta t) / \Delta t] = \xi(s, t)$, положительным будем считать направление внутрь области G_t (более точные ограничения, которые нужно наложить на функции $n(s, t, \Delta t)$ для справедливости формулируемого результата см. в [4]).

В каждой области G_t рассмотрим задачу $\Delta U_t = -f(x)$; $U_t = 0, x \in \partial G_t$. Здесь $f(x)$ — достаточно гладкая функция, определенная в области $D \supset G_t \forall t$. Из гладкости $f(x)$ следует, что $U_t(x)$ — гладкая функция, имеющая вблизи точек гладкости границы ∂G_t асимптотику $U_t(x) \approx T(s, t) s_t$, где s_t — расстояние до ∂G_t по нормали.

Рассмотрим величину $W(t) = (-\Delta U_t, U_t) = (f, U_t)$. Тогда $W(t)$ дифференцируема по t , причем

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{\partial G_t} T^2(s, t) \xi(s, t) ds \quad (1.3)$$

Доказательство. Согласно [4], функция $U_t(x)$ дифференцируема по t и $v(t, x) = dU_t(x)/dt$ является решением следующей краевой задачи в G_t :

$$\Delta v = 0; \quad v = -\xi(s, t) [\partial U_t / \partial n] = -\xi(s, t) T(s, t)$$

Следовательно

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(-\Delta U_t, U_t) = (-\Delta v, U_t) + (-\Delta U_t, v) = (-\Delta U_t, v)$$

$$(-\Delta U_t, v) = \int_{\partial G_t} \frac{\partial U_t}{\partial n} v ds + \int_{G_t} \sum_i \frac{\partial U_t}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$$

Заметим, что

$$\int_{G_t} \sum_i \frac{\partial U_t}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \sum_i \int_{G_t} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(U_t \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx - (U_t, \Delta v) = - \int_{G_t} U_t \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$$

Таким образом

$$\frac{dW}{dt} = \int_{\partial G_t} \frac{\partial U_t}{\partial n} v ds = \int_{\partial G_t} T(s, t) (-\zeta(s, t)) T(s, t) ds = - \int_{\partial G_t} T^2(s, t) \zeta(s, t) ds$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если $n(s, t) = 0$ вне малой окрестности $O(s_0)$ точки s_0 и $n(s, t)$ не меняет знак, то из (1.3) приближенно получается

$$dW = \left[- \int_{\partial G_t} T^2(s, t) \zeta(s, t) \right] dt \approx -T^2(s_0, t) \int_{O(s_0)} \frac{dn}{dt} ds dt \approx$$

$$\approx -T^2(s_0, t) \int_{O(s_0)} dn ds = -T^2(s_0, t) dS \quad (1.4)$$

Здесь dS — площадь области, заключенной между G_t и G_{t+dt} , имеющая знак плюс, если $G_{t+dt} \subset G_t$, и знак минус в противном случае.

Формулы (1.3), (1.4) представляют собой аналог известной в теории трещин формулы Ирвина [5], связывающей приращение энергии деформации упругого тела δA при расширении области трещины вблизи точки M с величиной коэффициента интенсивности напряжений N в этой точке. В записи, подобной (1.4), формула Ирвина имеет вид

$$\delta A = \pi(1-\nu) \mu^{-1} N^2 dS \quad (1.5)$$

Поскольку, согласно предложению 1.1, величина $J(G)$ ограничена сверху, предположим, что существует область G_0 площади S , на которой реализуется максимум $J(G)$. Необходимое условие экстремальности имеет вид $\delta J(G_0) = \delta(P/V) = [(\delta P)V - P(\delta V)] V^{-2} = 0$ или

$$(\delta P)V - P(\delta V) = 0 \quad (1.6)$$

Если в окрестности точки M_1 контура ∂G_0 , ограничивающего G_0 , область расширили, а в окрестности M_2 уменьшили, сохранив площадь, из (1.4), (1.5), (1.6) получим $(T_1^2 - T_2^2) \delta S V - (N_1^2 - N_2^2) P \text{ const } \delta S = 0$ или

$$(T_1^2 - T_2^2) V - (N_1^2 - N_2^2) P \text{ const} = 0 \quad (1.7)$$

где N_1, N_2 и T_1, T_2 — коэффициенты в асимптотике решений вблизи точек M_1, M_2 задач о трещине и о кручении соответственно. Так как (1.7) выполнено для любых двух точек контура, то необходимо, чтобы вдоль контура $T^2 = C_1 N^2 + C_2$ (C_1, C_2 — постоянные). Это необходимое условие экстремальности выполнено для круговой области G_0 , где $N = \text{const}, T = \text{const}$, что позволяет предположить справедливость утверждения 1.1. Из этого утверждения следует: $(P/V) \leq (P_{cr}/V_{cr})$. Здесь P_{cr}, V_{cr} — жесткость при кручении и объем трещины для круговой области площади S . Отсюда получим оценку объема трещины снизу

$$V \geq [PV_{cr}/P_{cr}] \quad (1.8)$$

Из (1.8), с учетом явных выражений для V_{cr} и P_{cr} , следует

$$V \geq P \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{16}{3} \left(\frac{S}{\pi} \right)^{3/2} \frac{2\pi}{S^2} = \frac{(1-\nu^2)}{E} \frac{32}{3} \frac{P}{\sqrt{\pi S}} \quad (1.9)$$

2. Прежде чем строить приближенные формулы для объема трещины, напомним, что в [2] приведены приближенные формулы, выражающие жесткость при кручении, емкость, основную частоту колебаний мембраны через геометрические характеристики области. При этом приближенное равенство $x(G) \approx f(y(G))$ считается обоснованным на некотором семействе областей, если выполнены следующие условия: (а) $\exists k_1 > 0, k_2 > 0$, такие, что для любой области из рассматриваемого семейства $k_1 \leq [x(G)/f(y(G))] \leq k_2$; (б) на всех эллипсах или прямоугольниках $[x(G)/f(y(G))] \approx 1$; (в) при симметризации области величины $x(G)$ и $f(y(G))$ изменяются в одну сторону. Напомним, что объем эллиптической трещины равен $V_{el} = [8(1-\nu^2)Sb]/(3EE^*(k))$. Здесь a, b — полуоси эллипса, $k^2 = (a^2 - b^2)/a^2$, $E^*(k)$ — полный эллиптический интеграл 2-го рода. Запишем приближенное выражение объема через площадь области G и длину контура $\partial G = l$:

$$V_{el} \approx 32(1-\nu^2)S^2/(3\pi El) \quad (2.1)$$

Покажем, что перечисленные выше условия, которым должна удовлетворять приближенная формула, выполнены на семействе выпуклых областей. Действительно, на эллипсах формула (2.1) становится точной и, следовательно, условие (б) выполнено. Хорошо известно, что при симметризации Штейнера области относительно прямой площадь области сохраняется, а длина контура не возрастает. Следовательно, правая часть формулы (2.1) при этом не убывает. Согласно доказанному в [1], при такой симметризации величина V также не убывает и потому условие (в) выполнено. Выполнение условия (а) в классе выпуклых областей следует из условия (б) и леммы о включении (см. [2]). Действительно, лемма о включении утверждает, что в любую выпуклую область можно вписать эллипс и вокруг области описать эллипс так, что эллипсы подобны и коэффициент подобия не зависит от вида исходной области. Обозначим через λ коэффициент подобия, S_+ — площадь описанного эллипса, l_+ — длину его контура (для вписанного эллипса эти величины обозначаются через S_-, l_- соответственно). Обозначим также сокращенно правую часть формулы (2.1) через $f(S, l)$. Тогда

$$f(S, l) \leq f(S_+, l) \leq f(S_+, l_-) = \lambda f(S_+, l_+) = \lambda V_+ = \lambda^4 V_- \leq \lambda^4 V \quad (2.2)$$

Здесь V_+, V_- — объемы трещин, занимающих области описанного и вписанного эллипсов соответственно. Аналогично (2.2) получим оценку

$$f(S, l) \geq f(S_-, l_+) = \lambda^{-1} f(S_-, l_-) = \lambda^{-1} V_- = \lambda^{-4} V_+ \geq \lambda^{-4} V \quad (2.3)$$

Формулы (2.2), (2.3) показывают, что условие (а) выполнено. Таким образом, формула (2.1) удовлетворяет всем перечисленным условиям. В классе выпуклых областей может быть использована и другая приближенная формула

$$V \approx V_{cr} \sqrt{P/P_{cr}} \quad (2.4)$$

Правая часть формулы (2.4) является средним геометрическим между нижней оценкой V (1.8) и верхней оценкой, доказанной в [1] ($V \leq V_{cr}$). После замены V_{cr} и P_{cr} их значениями формула (2.4) принимает вид

$$V \approx 16\sqrt{2S}(1-\nu^2)\sqrt{P}/(3\pi E) \quad (2.5)$$

Проверим выполнение условий (а), (б), (в) для формул (2.4), (2.5). Эти формулы точны для круговой области. На эллипсах отношение истинного значения объема к его приближенному значению не меньше единицы

G	1	2	3
Квадрат	0,8834	0,9399	0,8862
Узкий прямоугольник площади S с малой стороной b	$2,0944 \frac{b^2}{S}$	$1,4472 \frac{b}{S^{1/2}}$	$1,7725 \frac{b}{S^{1/2}}$
Равносторонний треугольник	0,7255	0,8518	0,7776
Равнобедренный прямоугольный треугольник	0,6557	0,8098	0,7342
Полукруг	0,7577	0,8705	0,8641

и не превышает 1,4107 (в случае, когда эллипс вырождается в щель). Следовательно, на эллипсах погрешность приближенных формул невелика и условие (б) можно считать выполненным. При симметризации области относительно прямой, как уже упоминалось выше, V не убывает, а S остается неизменной. Согласно [2], P при этом не убывает. В силу этого и правая и левая части формул (2.4), (2.5) при симметризации не убывают. Следовательно, условие (в) выполнено. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что на семействе выпуклых областей из условия (б) и леммы о включении следует, что условие (а) выполнено. Таким образом, формула (2.4) оправдана. Заметим, что вместо формулы (2.4) можно использовать любую из формул вида $V \approx V_{ei} \sqrt{P/P_{ei}}$, где V_{ei} , P_{ei} — объем трещины и жесткость при кручении для эллиптической области той же площади. В таблице для различных областей G приведены последовательно оценка снизу значения V/V_{cr} по формулам (1.8), (1.9); приближенное значение V/V_{cr} по формуле (2.4); приближенное значение V/V_{cr} по формуле (2.1). Необходимые для вычислений значения P/P_{cr} брались из [2].

Данные таблицы показывают, что приближенные значения V/V_{cr} , вычисленные по формулам (2.4), (2.1), весьма близки и согласуются с нижней оценкой.

3. Перейдем к построению приближенных формул для коэффициента интенсивности напряжений. Рассмотрим две разновидности приближенного определения коэффициента интенсивности напряжений. Первая разновидность состоит в том, что приближенное решение задачи о трещине для выпуклой области G разыскивается в виде

$$u = (1 - \nu^2) E^{-1} C \sqrt{\Phi} \quad (3.1)$$

где C — постоянная, Φ — решение задачи о кручении стержня сечением G (см. п. 1). Постоянную C можно определить подсчитав объем трещины по определению при помощи формулы (3.1) и воспользовавшись приближенными формулами для вычисления объема (2.1), (2.5). Заметим, что поскольку Φ имеет у границы асимптотику Ts , где s — расстояние по нормали к ∂G , то приближенное решение u в форме (3.1) будет по построению иметь правильную асимптотику вблизи края трещины. Это обстоятельство важно для определения коэффициента интенсивности напряжений N . Нетрудно видеть, что для эллиптических трещин описанный способ позволяет найти точное решение задачи.

Вторая разновидность приближенного определения N заключается в том, чтобы построить некоторое отображение $G \rightarrow \varphi_G(x_1', x_2') \approx N(x_1', x_2')$, $(x_1', x_2') \in \partial G$, где φ_G — функция, заданная на границе ∂G . При построении φ_G нужно учесть известные свойства коэффициента интенсивности напряжений по отношению к изменению области трещины (принцип сравнения [6], т. е. если $G \subset G_1$ и ∂G касается ∂G_1 в точке M , то нужно, чтобы $\varphi_G(M) \leq \varphi_{G_1}(M)$). Кроме того, необходимо, чтобы на некотором классе областей, например эллиптических, φ_G давала значения, близкие к коэффициентам интенсивности напряжений. Используем при построении φ_G соответствие между задачами о трещине и о кручении. Сопоставим коэффи-

коэффициент интенсивности напряжений N и коэффициент T в асимптотике решения задачи о кручении в соответствующих точках контура трещины и границы сечения стержня. Для эллиптических областей, как нетрудно видеть, $T/N^2 \approx \text{const}$. Отметим, что для функции $T(x_1', x_2')$, $(x_1', x_2') \in \partial G$ выполняется свойство, аналогичное принципу сравнения. Можно выбрать поэтому для выпуклых областей G $\Phi_G^2(x_1', x_2') = T(x_1', x_2')/\text{const}$. Выбрав соответствующее значение постоянной, дающее точный результат для крутой области, получим

$$N^2 \approx 2T\pi^{-2} \quad (3.2)$$

Приводим значения N в точках эллиптического контура трещины, соответствующих концам малой ($b=1$) и большой полуосей:

b/a	0,8		0,5		0,3	
φ	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0	$\pi/2$	0
N_{ex}	0,4986	0,4460	0,5839	0,4129	0,6450	0,3533
$N_{(3.2)}$	0,4971	0,4446	0,5694	0,4026	0,6098	0,3340

В первой строке даны точные значения N , во второй — по формуле (3.2).

Рассмотрим примеры применения обоих способов приближенного вычисления N .

Пример 3.1. Вычислим значения N вдоль контура трещины в форме квадрата со стороной 2. По первому способу в представлении (3.2) положим $\Phi = (1-x^2)(1-y^2)$, учитывая, что согласно [6] функция Φ такого вида с некоторым постоянным множителем хорошо приближает решение задачи о кручении стержня квадратного сечения. Из таблицы видно, что $V \approx 0,94V_{cr}$ (согласно формуле (2.4)). Следовательно, $V \approx 7,2(1-\nu^2)E^{-1}$ (здесь учтено точное значение V_{cr}). С другой стороны

$$V \approx (1-\nu^2)E^{-1}2C_1 \int_G \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)} dx_1 dx_2 = (1-\nu^2)E^{-1}\pi^2 0,5C_1$$

Сравнивая два выражения для V , находим, что $C_1 \approx 14,4\pi^{-2}$. Отсюда $u \approx (1-\nu^2)E^{-1}\pi^{-2}14,4[(1-x_1^2)(1-x_2^2)]^{1/2}$.

Ниже во второй строке приводим подсчитанные, исходя из этой формулы, значения N :

x_1	0	0,25	0,5	0,75
N	0,4869	0,4773	0,4499	0,3874
$N_{(3.1)}$	0,5158	0,4995	0,4467	0,3412
$N_{(3.2), (3.3)}$	0,5337	0,5194	0,4718	0,3694
$N_{(3.2), (3.4)}$	0,5033	0,4873	0,4359	0,2978

В первой строке даны значения N , найденные в [7] в результате численного решения пространственной задачи теории упругости.

В третьей и четвертой строках приведены величины N , найденные вторым способом. Значения коэффициента T в асимптотике задачи кручения, входящие в (3.2), определены по двум формулам, выражающим ее приближенное решение и взятым из [6]:

$$\Phi_1 = 5(1-x_1^2)(1-x_2^2)/8 \quad (3.3)$$

$$\Phi_2 = (1-x_1^2)(1-x_2^2) \left[\frac{1295}{2216} + \frac{525}{4432} (x_1^2 + x_2^2) \right] \quad (3.4)$$

Пример 3.2. Пусть область G — равносторонний треугольник ABC с высотой 5 (координаты вершины A $(-2,0)$, основания D высоты на сторону BC : $(1,0)$). Вычислим значения N в точках D $(1; 0)$, E $(1; 0,7)$, F $(1; 1,4)$ стороны BC контура трещины, занимающей область G по формулам (3.1), (3.2). Для вычисления по первому способу в качестве функции Φ выберем известное точное решение задачи кручения стержня сечением G [6]:

$$\Phi = \frac{1}{6} (1-x_1) [(x_1+2)^2 - 3x_2^2], \quad \int_G \{(1-x_1) [(x_1+2)^2 - 3x_2^2]\}^{1/2} dx_1 dx_2 = \frac{72}{35} \pi$$

Объем V трещины равен

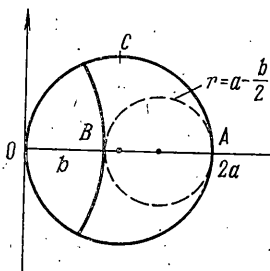
$$V = 2 \int_G u dx_1 dx_2 \approx \frac{(1-\nu^2)}{E} 2C_1 \frac{72}{35} \pi = \frac{(1-\nu^2)}{E} C_1 \frac{144}{35} \pi$$

Приравнивая это значение V величине объема, полученной по приближенной формуле (2.4) (см. таблицу), получим $C_1 \approx 0,748$. Теперь уже можно найти приближенные значения коэффициента интенсивности напряжений в расчетных точках контура. Эти значения приведены ниже в первой строке:

D	E	F
0,561	0,513	0,330
0,551	0,504	0,324

Значения N в тех же точках, вычисленные по второму способу, даны во второй строке.

Сопоставим вычисленные значения N в точке D с оценками, которые можно получить по принципу сравнения. Построим вписанный в G круг единичного радиуса и описанный около G квадрат со стороной $2\sqrt{3}$,



касающиеся границы G в точке D . Тогда $N_D^{(cr)} \leq N_D^{(G)} \leq N_D^{(sq)}$, где $N_D^{(cr)} = 0,45016$; $N_D^{(sq)} \approx 0,641$.

Величина $N_D^{(sq)}$ найдена по данным численного решения [7] в середине контура квадрата со стороной 2, $N \approx 0,4869$. Нетрудно видеть, что при переходе от квадрата со стороной a к квадрату со стороной b значение коэффициента интенсивности напряжений меняется в $\sqrt{a/b}$ раз. Поэтому $N_D^{(sq)} \approx N[2\sqrt{3}/2]^{1/2} \approx 0,641$. Значения $N_D^{(G)}$, приведенные выше, хорошо согласуются с указанными оценками.

Пример 3.3. Попробуем применить приближенную формулу (3.2) в случае невыпуклой области. Пусть G — круг радиуса a с круговой выточкой радиуса b . Выпишем функцию кручения для стержня сечением G . Имеем [6]:

$$\Phi = (1/2)(b^2 - r^2)(1 - 2ar^{-1} \cos \varphi) \quad (3.5)$$

где r, φ — полярные координаты с началом в точке O (фигура).

Вычислим значение T в асимптотике Φ вблизи границы области G из формулы (3.5), а затем, используя (3.2), найдем приближенное значение N . В точках A, B, C (см. фигуру) имеем:

T	$\frac{A}{(4a^2 - b^2)/(4a)}$	$\frac{B}{2a - b}$	$\frac{C}{(2a^2 - b^2)/(2a)}$
N	$\frac{\pi^{-1} \sqrt{(4a^2 - b^2)/(2a)}}{\pi^{-1} \sqrt{(4a^2 - b^2)/(2a)}}$	$\frac{\pi^{-1} \sqrt{2(2a - b)}}{\pi^{-1} \sqrt{2(2a - b)}}$	$\frac{\pi^{-1} \sqrt{(2a^2 - b^2)/a}}{\pi^{-1} \sqrt{(2a^2 - b^2)/a}}$

Заметим, что в точном решении задачи кручения для стержня сечением G при $b \rightarrow 0$ коэффициент T в точке B не стремится к значению a , соответствующему крутовому сечению стержня. Аналогичное поведение, видимо, характерно и для N , что следует из анализа значений N , приведенных выше.

4. В работе [3] для трещин, ограниченных контуром, который в некоторой полярной системе координат может быть описано уравнением $r_T = r(\varphi)$, получена оценка максимального вдоль контура трещины коэффициента интенсивности напряжений N_{\max} снизу. В случае однородной нагрузки единичной интенсивности эта оценка принимает вид

$$N_{\max}^2 \geq 3V/4\pi BS \quad (4.1)$$

Оценка N_{\max} снизу дает достаточное условие распространения трещины. Перепишем неравенство (4.1) с учетом полученных в пп. 1, 2, 3 оценок объема. Из (4.1) и оценки объема снизу (1.8) получим

$$N_{\max}^2 \geq 3PV_{cr}/4\pi BSP_{cr} \quad (4.2)$$

Если применять приближенные формулы для объема трещины, то из (4.1), (2.4) и (4.1), (2.1) получим соответственно

$$N_{\max}^2 \geq (3V_{cr}/4\pi BS)(P/P_{cr})^{1/2} \quad (4.3)$$

$$N_{\max}^2 \geq \frac{3}{4\pi BS} \frac{32(1-\nu^2)}{3\pi E} \frac{S^2}{l} = \frac{4S}{\pi^2 l} \quad (4.4)$$

Рассмотрим примеры применения оценок (4.2), (4.3), (4.4).

Пример 4.1. Пусть G — квадрат со стороной 2. Оценки, полученные по формулам (4.2), (4.3), (4.4), приведены соответственно ниже:

	1	2	3
N_{\max}^2	0,2020	0,2149	0,2026
N_{\max}	0,4494	0,4636	0,4502

Полученные оценки незначительно отличаются от оценки, которую можно получить на основе принципа сравнения [8]. Поскольку в квадрат можно вписать круг единичного радиуса, касающийся границы, то $N_{\max} \geq N_{cr} \approx 0,45016$.

Пример 4.2. Пусть G — круг радиуса a с круговой выточкой радиуса b .

Для определенности вычисления проведем для случая $a=b=2$. Поскольку для невыпуклой области приближенные формулы для вычисления объема могут быть неточны, воспользуемся оценкой (4.2). Вычислим жесткость

$$P = 2 \int_G \Phi dx_1 dx_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_2^{4 \cos \varphi} (4-r^2) \left(1 - \frac{4 \cos \varphi}{r}\right) r dr d\varphi = \frac{54}{\sqrt{3}} - \frac{72\pi}{9} \approx 6,04417$$

Поскольку площадь $S = 4\pi - 2(4\pi/3 - \sqrt{3}) \approx 7,65289$, $P_{cr} = S^2 / (2\pi) \approx 9,32119$. Следовательно, $N_{\max}^2 \geq 0,06355 V_{cr} / (\pi B) \approx 0,20508$, $N_{\max} \geq 0,45286$. Эта оценка несколько лучше оценки, получаемой из принципа сравнения, если в G вписать круг единичного радиуса.

Пример 4.3. Пусть G — сектор круга радиуса 1 с углом α . Приводим оценки N_{\max} снизу, полученные из (4.2):

α	P	V/V_{cr}	N_{\max}^2	N_{\max}
$\pi/4$	0,0181	0,73746	0,05284	0,22986
$\pi/3$	0,0349	0,79985	0,06617	0,2572
$\pi/2$	0,0825	0,8403	0,08514	0,2918
$2\pi/3$	0,148	0,84798	0,09921	0,315
π	0,298	0,7577	0,1086	0,3295

Необходимые для вычислений значения P взяты из [9]. Во второй колонке даны также оценки объема V снизу, полученные из (1.8).

Отметим, что предложенные оценки N_{\max} снизу применимы и в тех случаях, когда в исходную трещину нельзя вписать трещину достаточно простой формы, в связи с чем применение принципа сравнения становится затруднительным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Изопериметрические неравенства и оценки некоторых интегральных характеристик решения пространственной задачи теории упругости для тела с плоскими трещинами нормального разрыва. — Изв. АН СССР. МТТ, 1980, № 2, с. 68–79.
2. Полюа Г., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
3. Гольдштейн Р. В., Шифрин Е. И. Некоторые энергетические методы построения оценок в пространственных задачах теории упругости о плоских трещинах произвольного разрыва. — Изв. АН СССР. МТТ, 1981, № 4, с. 61–76.
4. Крейн С. Г. О вариации области для эллиптических задач. — Studia Mathematica, 1963, 31, p. 411–424.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
6. Дурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939 с.
7. Goldstein R. V., Entov V. M., Zazovski A. F. Application of direct variational method to the solution of mixed boundary value problems. — Internat. J. Numerical Methods in Engng, 1978, v. 12, No. 8, p. 1243–1239.
8. Гольдштейн Р. В., Энтов В. М. Вариационные оценки для коэффициента интенсивности напряжений на контуре плоской трещины нормального разрыва. — Изв. АН СССР. МТТ, 1975, № 3, с. 59–64.
9. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М.: Наука, 1979. 560 с.

Москва

Поступила в редакцию
9.VII.1981