

УДК 539.4

**ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ
В РАЗРУШИВШЕМСЯ ВОЛОКНЕ ПРИ ОТСЛОЕНИИ ЕГО
ОТ ВЯЗКОУПРУГОЙ МАТРИЦЫ КОМПОЗИЦИОННОГО
МАТЕРИАЛА**

МОСКВИТИН В. В., МОСКВИТИН В. В.

Разрушение волокна в композиционном материале, как правило, сопровождается отслоением некоторого участка разрушенного волокна от матрицы. В качестве критерия отслоения вводится нелинейное условие длительной прочности. Используемая модель материала [1] позволяет исследовать динамическое перераспределение напряжений в процессе отслоения вязкоупругой матрицы от волокна.

1. Пусть однонаправленный композиционный материал с непрерывными волокнами нагружен растягивающими усилиями, направленными вдоль волокон, и подвержен действию температуры $T(z, t)$, отсчитываемой от некоторого начального состояния.

Рассматривается модель материала с гексагональной укладкой волокон. Для исследования перераспределения напряжений в разрушенном волокне принимается, что соседние волокна закреплены, т. е. их перемещения равны нулю.

В основу модели композиционного материала положена гипотеза о сдвиговых деформациях матрицы $\gamma = u/b(\theta)$ [2], где $b(\theta)$ — расстояние между волокнами, u — перемещение волокна, вызванное разрушением.

Для материала матрицы используются соотношения нелинейной вязкоупругости

$$\frac{\tau}{G_{om}} = \gamma \varphi_1(\varepsilon_u, T) - \int_0^t R(t-\xi, T) \varphi_2(\varepsilon_u, T) \gamma(\xi) d\xi \quad (1.1)$$

где $\varepsilon_u = |\gamma|/\sqrt{3}$ — интенсивность деформаций, G_{om} — мгновенный модуль сдвига, $R(t, T)$ — ядро релаксации материала матрицы, φ_1 и φ_2 — функции, характеризующие физическую нелинейность материала.

В модели принимается, что осевые напряжения в волокнах равномерно распределены по сечениям волокон и волокна вплоть до разрушения упруго деформируются. Действие радиальных и окружных напряжений не рассматривается.

Касательные силы Q_1 , действующие на границе разрушившегося волокна, с учетом соотношения (1.1) и гипотезы о сдвиговых деформациях выражаются через перемещения зависимостью

$$\begin{aligned} \frac{Q_1(u)}{E_f F_f} &= \frac{48}{\pi E d_f} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{u}{b(\theta)} \varphi_1\left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T\right) - \right. \\ &\left. - \int_0^t R(t-\xi, T) \varphi_2\left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T\right) \frac{u(\xi)}{b(\theta)} d\xi \right] d\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$F_f = \pi d_f^2 / 4, \quad E = E_f / G_{0m}$$

где E_f — модуль Юнга, d_f — диаметр волокна.

С учетом связи касательных сил с перемещениями (1.2) и различных коэффициентов линейного расширения у материалов матрицы и волокна уравнения движения и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Q_1(u)}{E_f F_f} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$\left. \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = -(\varepsilon_f + \varepsilon_{fr}^0), \quad u(z, t)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

$$\Psi(T) = (\alpha_c - \alpha_f) T / (1 + \alpha_f T), \quad \varepsilon_{fr}^0 = \Psi|_{z=0}$$

где α_c , α_f — коэффициенты линейного расширения композита и волокон, ε_f — деформация волокна до разрушения, вызванная растягивающей нагрузкой.

Начальные данные нулевые, т. е.

$$u(z, t)|_{t=0} = 0, \quad \partial u(z, t) / \partial t|_{t=0} = 0 \quad (1.5)$$

Решение задачи (1.3)–(1.5) дает распределение перемещений и напряжений в волокне. В свою очередь, перемещения позволяют определить касательные напряжения по формуле (1.1), которые могут вызвать отслоение волокна от матрицы в некоторый момент времени t_h^0 .

Пусть отслоение волокна от матрицы композита начинается от плоскости разрыва волокна $z_s^0 = z = 0$. Для определения времени начала отслоения t_h^0 используется нелинейный критерий длительной прочности [3]:

$$\frac{1}{1+m} = \int_0^{t_h^0} (t_h^0 - \xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m}(\tau_1(0, \xi))} \quad (1.6)$$

Здесь $\tau_1(z, t)$ — касательное напряжение $\tau(z, t)$ (область 1 на фиг. 1) на границе матрицы с волокном, полученное в результате решения задачи (1.3)–(1.5).

Уравнение (1.6) содержит единственное неизвестное t_h^0 . Функция $t_0(\tau)$ может быть определена из эксперимента, схема которого представлена на фиг. 2. Нагружение волокна осуществляется силой $P = P_0 h(t)$ ($P_0 = \text{const}$, $h(t)$ — единичная функция Хевисайда).

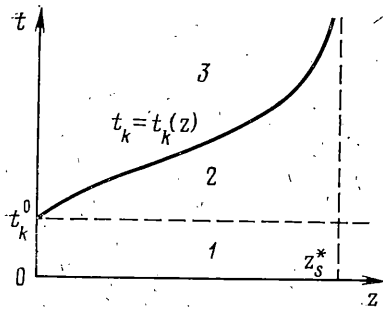
Нагружаемое волокно при действии постоянного усилия P_0 отслаивается по истечении определенного времени t_0 , зависящего от P_0 . Имея несколько экспериментальных точек $t_0^{(k)} \sim P_{0k}$ ($k=1, 2, \dots$), можно определить функцию $t_0(P_0)$, а значит, и функцию $t_0(\tau_0)$, так как $\tau_0 = P_0 / (\pi d_f H)$.

Пусть теперь $t > t_h^0$. При этом область отслоения распространится до некоторого значения $z_s(t)$. Отслаившийся участок волокна в процессе движения соприкасается с матрицей, что вызывает трение между ними. При этом экспериментально установлено [4], что сила трения может быть принята постоянной.

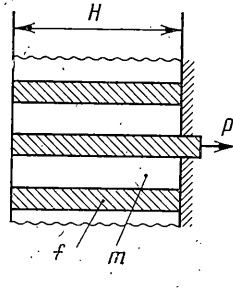
При наличии участка отслоения выражения касательных напряжений на границе матрицы с волокном имеют различный вид для областей 2 и 3 (фиг. 1).

$$\frac{\tau_2}{G_{0m}} = \frac{u}{b(\theta)} \varphi_1 \left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) - \int_0^t R(t-\xi, T) \varphi_2 \left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) \frac{u(\xi)}{b(\theta)} d\xi, \quad t \leq t_h(z) \quad (1.7)$$

$$\frac{\tau_3}{G_{0m}} = \frac{\tau_*}{G_{0m}} \text{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad t > t_h(z) \quad (\tau_* = \text{const}) \quad (1.8)$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда касательные силы будут определяться следующими выражениями:

$$\frac{Q_2(u)}{E_f F_f} = \frac{48}{\pi E d_f} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{u}{b(\theta)} \varphi_1 \left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) - \int_0^t R(t-\xi, T) \varphi_2 \left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) \frac{u(\xi)}{b(\theta)} d\xi \right] d\theta, \quad t \leq t_k(z) \quad (1.9)$$

$$\frac{Q_3}{E_f F_f} = \frac{4\tau_*}{E_f d_f} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad t > t_k(z) \quad (1.10)$$

Уравнения движения для областей 2 и 3, согласно (1.9) и (1.10), принимают вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Q_2(u)}{E_f F_f} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad t \leq t_k(z) \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{Q_3}{E_f F_f} = 0, \quad t > t_k(z) \quad (1.12)$$

Присоединяя к уравнениям (1.11), (1.12) нелинейное условие отслоения

$$\frac{1}{1+m} = \int_0^{t_k} (t_k - \xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m}(\tau_1(z_s, \xi))} + \int_{t_k^0}^{t_k} (t_k - \xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m}(\tau_2(z_s, \xi))} \quad (1.13)$$

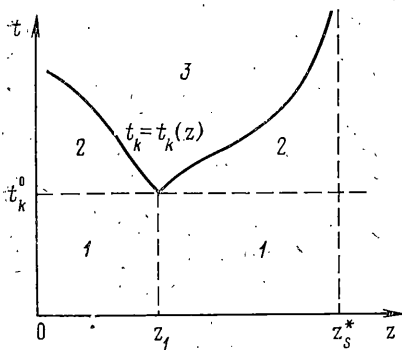
имеем два уравнения (1.11)–(1.13) для определения неизвестных функций $u(z, t)$ и $t_k(z)$. При этом граничные условия и начальные данные имеют вид (1.4), (1.5).

В данной постановке можно рассматривать не только случай отслоения от плоскости разрыва $z_s = z = 0$, но и отслоение, начинающееся в любом месте границы волокна и матрицы. Если отслоение начинается в точке с координатой $z_s = z_1 > 0$ (фиг. 3), то в этом случае возможно движение границы отслоения как влево, так и вправо от точки начала отслоения. Уравнения движения (1.11), (1.12) имеют тот же вид в соответствующих областях. Для определения времени начала отслоения, начинающегося с координаты z_1 , вместо уравнения (1.6) будем иметь

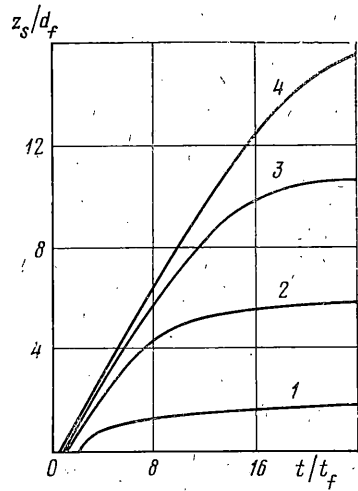
$$\frac{1}{1+m} = \int_0^{t_k^0} (t_k^0 - \xi)^m \frac{d\xi}{t_0^{1+m}(\tau_1(z_1, \xi))}$$

Уравнение (1.13) остается неизменным.

Необходимо отметить, что рассматривается локальное отслоение, а это значит, что граница отслоения ограничена, т. е. $z_s(t) \rightarrow z_s^*$ при $t \rightarrow \infty$ (фиг. 1).



Фиг. 3



Фиг. 4

2. Нелинейный закон связи сдвиговых деформаций и касательных напряжений матрицы (1.1), а также нелинейное уравнение (1.13) вносят существенные трудности для построения аналитического решения задачи. Поэтому возникает необходимость использования приближенных и численных методов решения поставленной задачи.

Рассмотрим два метода последовательных приближений. Для этого предварительно представим функцию $\varphi_1(\varepsilon_u, T) = 1 - \omega_1(\varepsilon_u, T)$. Выражения (1.9), (1.10) для касательных сил можно привести к единой записи следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{Q(u)}{E_f F_f} = & \frac{4\tau_*}{E_f d_f} \operatorname{sign}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) h_1(t - t_k - 0^+) + \\ & + \left\{ \alpha_y^2 u - \frac{48}{\pi E d_f} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{u}{b(\theta)} \omega_1\left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^t R(t - \xi, T) \varphi_2\left(\frac{|u|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T\right) \frac{u(\xi)}{b(\theta)} d\xi \right] d\theta \right\} h_1(t_k - t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\alpha_y^2 = \frac{8}{E b d_f^2}, \quad b = \frac{2b_c}{d_f}, \quad \frac{1}{b_c} = \frac{6}{\pi} \int_0^{\pi/6} \frac{d\theta}{b(\theta)}, \quad h_1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Введение положительной бесконечно малой величины 0^+ в выражение (2.1) вызвано необходимостью определения касательной силы Q , равной Q_2 на кривой $t_k = t_k(z)$.

За нулевое приближение принимается решение задачи с упругой матрицей, т. е. предполагается, что нелинейные и интегральные слагаемые в соотношении (2.1) отсутствуют и волокно не отслоилось от матрицы. Согласно [5], решение в нулевом приближении имеет вид

$$u^{(0)}(z, t) = (\varepsilon_f + \varepsilon_{fT}^0) a \int_0^t J_0\left(\alpha_y a \sqrt{\xi^2 - \frac{z^2}{a^2}}\right) h\left(\xi - \frac{z}{a}\right) d\xi \quad (2.2)$$

где J_0 — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Для любого n -го приближения имеют место уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial t^2} - \alpha_y^2 u^{(n)} &= f_1^{(n-1)}(z, t) \\ f_1^{(n-1)}(z, t) &= \frac{4\tau_*}{E_f d_f} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t} \right) h_1(t - t_k^{(n-1)} - 0^+) - \\ &\quad - \frac{48}{\pi E d_f} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{u^{(n-1)}}{b(\theta)} \omega_1 \left(\frac{|u^{(n-1)}|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T R(t - \xi, T) \varphi_2 \left(\frac{|u^{(n-1)}|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) \frac{u^{(n-1)}(\xi)}{b(\theta)} d\xi \right] d\theta h_1(t_k^{(n-1)} - t) - \\ &\quad - \frac{\partial \Psi}{\partial z} h_1(t_k^{(n-1)} - t) \\ u^{(n)}|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u^{(n)}}{\partial z} \Big|_{z=0} = -(\varepsilon_f + \varepsilon_{fT}^0), \quad u^{(n)}|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, в отличие от однородного уравнения движения в нулевом приближении, в каждом последующем приближении имеем неоднородную задачу с известной функцией $f_1^{(n-1)}(z, t)$ (2.3).

Приведенный способ последовательных приближений связан с определенными трудностями нахождения решения неоднородного уравнения (2.3). Поэтому возникает необходимость определения последовательных приближений более простым методом.

Представим решение для любого n -го приближения в виде $u^{(n)} = u^{(0)} + u_n$, где $u^{(0)}$ имеет вид (2.2), а $u_0 = 0$.

Последовательные приближения построим таким образом, что функции u_n будут определяться в каждом приближении из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= f_2^{(n-1)}(z, t) \\ f_2^{(n-1)}(z, t) &= \frac{4\tau_*}{E_f d_f} \operatorname{sign} \left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial t} \right) h_1(t - t_k^{(n-1)} - 0^+) + \\ &\quad + \left\{ \alpha_y^2 u_{n-1} - \frac{48}{\pi E d_f} \int_0^{\pi/6} \left[\frac{u^{(n-1)}}{b(\theta)} \omega_1 \left(\frac{|u^{(n-1)}|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^T R(t - \xi, T) \varphi_2 \left(\frac{|u^{(n-1)}|}{\sqrt{3} b(\theta)}, T \right) \frac{u^{(n-1)}(\xi)}{b(\theta)} d\xi \right] d\theta - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} h_1(t_k^{(n-1)} - t) \\ u_n|_{t=0} &= 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad u_n|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) можно получить используя формулу Даламбера

$$u_n(z, t) = -\frac{a}{2} \int_0^t \left[F_2^{(n-1)}(z, t, \xi) + \int_0^{z+a(t-\xi)} f_2^{(n-1)}(\eta, \xi) d\eta \right] d\xi \quad (2.5)$$

$$F_2^{(n-1)}(z, t, \xi) = - \int_0^{z-a(t-\xi)} f_2^{(n-1)}(\eta, \xi) d\eta, \quad z-a(t-\xi) > 0$$

$$F_2^{(n-1)}(z, t, \xi) = \int_0^{a(t-\xi)-z} f_2^{(n-1)}(\eta, \xi) d\eta, \quad z-a(t-\xi) < 0$$

Следовательно, данным методом можно построить аналитическое решение в виде квадратур (2.2), (2.5) для любого приближения.

Следует отметить, что в каждом приближении как в первом, так и во втором методах последовательного приближения необходимо решать уравнение (1.13), для того, чтобы определять границу области отслоения.

В результате численного решения уравнений (1.11)–(1.13) получена зависимость величины отслоившегося участка z_s от времени (фиг. 4) для различных значений уровня напряжений, при которых происходит разрушение волокна (кривые 1–4 соответствуют $\epsilon_f = 0,001; 0,002; 0,003; 0,004$). Расчеты проводились для композиционного материала с матрицей из линейного вязкоупругого материала. При этом принимались следующие значения параметров: $t_f = d_f/a$, $E = 14,82$, $4\tau_*/E = 0,36 \cdot 10^{-3}$, $\Psi = 0$, $m = 0$, объемная доля волокон равна 0,6. С увеличением деформации возрастает скорость отслаивания матрицы от волокна и соответственно увеличивается предельное значение границы области отслоения z_s^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. Сахарова Е. Н., Овчинский А. С. Динамика перераспределения напряжений в разрушившемся волокне композиционного материала. — *Мех. композ. материалов*, 1979, № 1, с. 57–64.
2. Копьев И. М., Овчинский А. С. Разрушение металлов, армированных волокнами. М.: Наука, 1977. 240 с.
3. Москвитин В. В. Сопротивление вязкоупругих материалов применительно к зарядам ракетных двигателей на твердом топливе. М.: Наука, 1972. 327 с.
4. Broutman L. J. Measurement of fiber-polymer matrix interfacial strength. — In: *Interfaces in Composites*. Philadelphia, Pa: 1969, p. 27–41.
5. Москвитин В. В., Овчинский А. С. Динамика перераспределения напряжений в разрушившемся волокне при упругом деформировании компонентов композиционного материала. — *Изв. АН СССР. МТТ*, 1979, № 1, с. 120–124.

Москва

Поступила в редакцию
2.XI.1981