

УДК 539.376

ОБ ОДНОМ РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ  
НЕЛИНЕЙНОЙ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ  
ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

АЛЕКСАНДРОВ В. М., СУМБАТЯН М. А.

Предлагается новый подход к решению контактной задачи о вдавливании жесткого штампа в полуплоскость, материал которой находится в условиях степенной установившейся ползучести. Он основан на сращивании решения, эффективного во всей области, за исключением окрестностей углов штампа, с решением, справедливым вблизи углов.

Определены размеры зон «локального» и «глобального» решений. Найдена зависимость между силой вдавливания и осадкой штампа.

1. Пусть жесткий штамп вдавливается в деформируемую полуплоскость силой  $P$ . Трение в области контакта отсутствует. Задача рассматривается в рамках малых плоских деформаций нелинейной установившейся ползучести со степенным законом связи между интенсивностями напряжений и скоростью деформации

$$\varepsilon_i = A (\sigma_i^*)^m \quad (1 < m < 2) \quad (1.1)$$

Материал полуплоскости предполагается несжимаемым. В дальнейшем для простоты ограничиваемся случаем симметричной задачи для штампа с плоским основанием.

Данная задача была решена ранее [1] в рамках принципа суперпозиции «обобщенных» перемещений (СОП). Скорость осадки поверхности полуплоскости дается выражением

$$v(x) = - \frac{(2-m) A \sin \frac{\pi}{2} l}{(m-1) J^m(\mu)} \left\{ \int_{-a}^a \frac{p(t) dt}{|t-x|^{1-\mu}} \right\}^m \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.2)$$

$$\mu = \frac{1}{m}, \quad l^2 = 1 - (m-1)^2,$$

$$J(\mu) = 4l^\mu \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^\mu \cos \theta d\theta$$

Контактное напряжение  $p(x)$  определяется следующей формулой

$$p(x) = \left\{ \frac{V(m-1) J^m(\mu)}{A(2-m) \sin \frac{\pi}{2} l} \right\}^\mu \frac{\sin \frac{\pi \mu}{2}}{\pi (a^2 - x^2)^{\mu/2}} \quad (|x| < a) \quad (1.3)$$

где  $V = \text{const}$  — скорость осадки основания штампа.

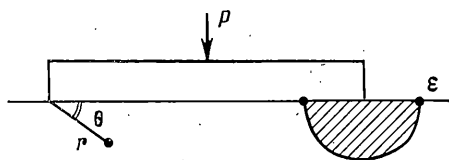
Впоследствии было доказано, что принцип СОП не позволяет получить истинный характер особенности напряжений вблизи концов штампа. Впервые, видимо, этот факт был отмечен Аткинсоном на примере задачи о плоской трещине в степенно-упрочняющейся среде [2]. Для задачи, рассмат-

риваемой в данной работе, принцип СОП дает следующий характер поведения контактного напряжения вблизи концов штампа (см. (1.3)):

$$p(x) \sim (a \mp x)^{-\mu/2} \quad (x \rightarrow \pm a) \quad (1.4)$$

В то же время истинное поведение контактного напряжения вблизи концов штампа, полученное в [3], есть

$$p(x) \sim r^{-\mu/(1+\mu)} \quad (r \rightarrow 0) \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Таким образом, решение (1.2) — (1.3), получаемое на основе принципа СОП, является эффективным

лишь на некотором удалении от концов штампа.

Из изложенного выше следует, что в окрестности концов штампа должно быть построено специальное локальное решение. Будем считать, что последнее справедливо в малых областях радиуса  $\epsilon$ , охватывающих углы штампа (фиг. 1).

Локальное решение строится аналогично [4, 5], где рассматривалась задача о плоской трещине.

После введения полярной системы координат  $(r, \theta)$  (фиг. 1) функция Эйри ищется в виде

$$\Phi(r, \theta) = Kr^s \varphi(\theta) \quad (1.6)$$

причем параметр  $s$  будет определен ниже. Напряжения выражаются через функцию Эйри следующим образом

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= Kr^{s-2} \sigma_r(\theta), & \sigma_r(\theta) &= s\varphi + \varphi'' \\ \sigma_\theta^* &= Kr^{s-2} \sigma_\theta(\theta), & \sigma_\theta(\theta) &= s(s-1)\varphi \\ \sigma_{r\theta}^* &= Kr^{s-2} \sigma_{r\theta}(\theta), & \sigma_{r\theta}(\theta) &= (1-s)\varphi' \end{aligned} \quad (1.7)$$

Интенсивность напряжения

$$\sigma_i^* = Kr^{s-2} \sigma_i(\theta), \quad \sigma_i = \left\{ \left[ \left( s - \frac{s^2}{2} \right) \varphi + \frac{\varphi''}{2} \right]^2 + (1-s)^2 \varphi'^2 \right\}^{1/2} \quad (1.8)$$

Компоненты тензора скоростей деформации находятся из соотношений Генки  $\epsilon_{kn} = (\epsilon_i / \sigma_i) (\sigma_{kn}^* - \sigma^* \delta_{kn})$  ( $\sigma^*$  — среднее напряжение) и имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= AK^m r^{m(s-2)} \sigma_i^{m-1} [(s^{-1}/2s^2) \varphi + 1/2 \varphi''] \\ \epsilon_{r\theta} &= AK^m r^{m(s-2)} \sigma_i^{m-1} (1-s) \varphi', \quad \epsilon_\theta = -\epsilon_r \end{aligned} \quad (1.9)$$

Уравнение совместности Сен-Венана приводит к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению 4-го порядка относительно функции  $\varphi(\theta)$ :

$$\left\{ \frac{d^2}{d\theta^2} - m(s-2)[m(s-2)+2] \right\} \{ \sigma_i^{m-1} [s(2-s)\varphi + \varphi''] \} + \quad (1.10)$$

$$+ 4(s-1)[m(s-2)+1] \{ \sigma_i^{m-1} \varphi' \}' = 0$$

где  $\sigma_i$  дается выражением (1.8). Отметим, что полученное уравнение является однородным степени  $m$  относительно функции  $\varphi$ .

Получим граничные условия для уравнения (1.10). На свободной поверхности ( $\theta = \pi$ )  $\sigma_{r\theta}^* = \sigma_\theta^* = 0$ , что с учетом (1.7) приводит к соотношениям

$$\varphi(\pi) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0 \quad (1.11)$$

Аналогично, отсутствие трения в области контакта ( $\theta=0$ ) приводит к условию

$$\varphi'(0)=0 \quad (1.12)$$

Последнее, четвертое граничное условие должно быть получено из того, что при  $\theta=0$   $v_\theta=V$ . Именно, из последнего равенства (1.7) и соотношений Генки вытекает, что при  $\theta=0$   $\varepsilon_{r\theta}=0$ , а следовательно, и  $(\partial/\partial r) \times (r\varepsilon_{r\theta})=0$ . Но соотношения Коши, записанные в полярных координатах, имеют вид

$$r\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - v_\theta + \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_r = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad r\varepsilon_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_r \quad (1.13)$$

поэтому

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) - \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \theta} = 0$$

Отсюда с учетом того, что скорость осадки штампа  $v_\theta=V=\text{const}$  следует  $\partial^2 v_r / \partial r \partial \theta = 0$ , а поскольку  $\varepsilon_r = \partial v_r / \partial r$ , получаем, что при  $\theta=0$

$$\partial \varepsilon_r / \partial \theta = 0 \quad (1.14)$$

Соотношение (1.14) с учетом (1.9) можно переписать в виде

$$\{\sigma_i^{m-1} [s(2-s)\varphi + \varphi'']\}' = 0 \quad (1.15)$$

После ряда преобразований с использованием условия (1.12) равенство (1.15) приводит к четвертому граничному условию

$$\varphi'''(0) = 0 \quad (1.16)$$

Краевая задача (1.10)–(1.12), (1.16) рассматриваемой контактной задачи оказывается такой же, как и в [4, 5] для задачи о трещине. Это доказывает известный факт линейной теории о математической эквивалентности контактных задач и задач теории трещин для случая степенной физической нелинейности. Отметим лишь, что в теории трещин последнее граничное условие (1.16) сразу следует из соображений симметрии, в то время как в контактной задаче, как мы видели выше, это условие получается путем ряда нетривиальных преобразований.

Получившаяся однородная краевая задача имеет отличное от нуля решение лишь при значениях параметра  $s$ , являющихся собственными для этой задачи. Первое собственное число

$$s = (2m+1)/(m+1) \quad (1.17)$$

что следует как из энергетических соображений [3, 4, 5], так и путем численного анализа получившейся краевой задачи [4]. В дальнейшем принимаем значение параметра  $s$ , определяемое равенством (1.17).

2. Для построения решения, эффективного во всей полуплоскости, сравним локальное решение с решением по принципу СОП. Срачивание произведем на расстоянии  $\varepsilon$  от кромки штампа. Имеющийся произвол состоит из двух констант:  $K$  — множитель, входящий в выражение (1.6) для функции  $\Phi(r, \theta)$ , и  $\varepsilon$ . Поэтому поступим следующим образом. На расстоянии  $\varepsilon$  от кромки штампа в области контакта потребуем срачивания контактного напряжения (условие непрерывности контактного напряжения). Скорость осадки равна  $V$  и у локального, и у глобального решения, поэтому  $v_\theta$  совпадает априори так же, как совпадает и тангенциальное напряжение, равное нулю у обоих решений. На свободной же поверхности на расстоянии  $\varepsilon$  от кромки штампа потребуем срачивания скорости осадки поверхности полуплоскости (условие неразрывности формы поверхности полуплоскости). Нормальное и касательное напряжения здесь равны нулю для обоих решений и поэтому также совпадают автоматически.

Получим выражение скорости осадки свободной поверхности для локального решения. С учетом соотношений Коши (1.13) из первого равенства (1.9) получаем

$$v_r = AK^m \frac{r^{m(s-2)+1}}{m(s-2)+1} \sigma_i^{m-1} \left[ \left( s - \frac{s^2}{2} \right) \varphi + \frac{\varphi''}{2} \right] + f(\theta) \quad (2.1)$$

Поскольку  $m(s-2)+1=1/(m+1)>0$ , то

$$f(\theta) = v_r|_{r=0} = v_r^\circ \quad (2.2)$$

является постоянной величиной. Теперь  $v_\theta$  легко находится из условия несжимаемости  $\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0$ , из которого с учетом соотношений (1.13) следует, что

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = - \left( r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \right)$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение (2.1) с учетом (2.2) и интегрируя по  $\theta$ , получаем

$$v_\theta = V - v_r^\circ \theta - AK^m \frac{m(s-2)+2}{m(s-2)+1} r^{m(s-2)+1} \int_0^\theta \sigma_i^{m-1} \left[ \left( s - \frac{s^2}{2} \right) \varphi + \frac{\varphi''}{2} \right] d\theta \quad (2.3)$$

Здесь было использовано граничное условие  $v_\theta = V$  при  $\theta = 0$ . Далее, поскольку при  $\theta = \pi$  и  $r \rightarrow 0$ , очевидно,  $v_\theta \rightarrow -V$ , то из (2.3) имеем  $-V = V - \pi v_r^\circ$ , откуда

$$v_r^\circ = 2\pi^{-1}V \quad (2.4)$$

На свободной поверхности (при  $\theta = \pi$ ) выражение (2.3) может быть значительно упрощено. Для этого проинтегрируем по  $\theta$  основное уравнение (1.10) в пределах от  $\theta = 0$  до  $\theta = \pi$  с учетом граничных условий (1.11). После ряда преобразований получим

$$[m(s-2)+2] \int_0^\pi \sigma_i^{m-1} \left[ \left( s - \frac{s^2}{2} \right) \varphi + \frac{\varphi''}{2} \right] d\theta = \frac{1}{2^m(s-2)} |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi)$$

В итоге приходим к соотношению

$$v_\theta(r, \pi) = -V + AK^m \frac{(m+1)^2}{2^m} r^{\frac{1}{m+1}} |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi) \quad (2.5)$$

Для нахождения скорости осадки свободной поверхности полуплоскости в глобальном решении, получаемом по принципу СОП, необходимо в соотношение (1.2) подставить выражение контактного напряжения (1.3) при  $x < -a$ . Встречающийся при этом интеграл после некоторых преобразований может быть выражен через гипергеометрическую функцию Гаусса [6]:

$$\int_{-a}^x \frac{dt}{(a^2-t^2)^{\mu/2} (t-x)^{1-\mu}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi\mu}{2}} + \left( \frac{-a-x}{2a} \right)^{\mu/2} \times \quad (2.6)$$

$$\times \frac{\Gamma\left(-\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(1-\mu)} F\left(1-\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}; 1+\frac{\mu}{2}; \frac{a+x}{2a}\right) \quad (x < -a)$$

В результате сращивание форм свободной поверхности (1.2) при  $x = -a - \varepsilon$  и (2.5) при  $r = \varepsilon$  с учетом соотношений (1.3) и (2.6) приводит

к равенству

$$-V + AK^m N_1 \varepsilon^{m+1} = -V \left[ 1 - N_2 \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^{\frac{1}{2m}} F \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$F \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right) = F \left( 1 - \frac{\mu}{2}; \frac{\mu}{2}; 1 + \frac{\mu}{2}; -\frac{\varepsilon}{2a} \right)$$

$$N_1 = \frac{(m+1)^2}{2^m} |\varphi''(\pi)|^{m-1} \varphi'''(\pi),$$

$$N_2 = \frac{2m \sin \frac{\pi\mu}{2} \Gamma^2 \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)}{\pi \Gamma(1-\mu)}$$

Сращивание контактного напряжения (1.3), взятого при  $x = -a + \varepsilon$ , со вторым выражением (1.7) при  $r = \varepsilon$ ,  $\theta = 0$  с учетом того, что контактное напряжение (1.3) направлено вниз, приводит к следующему соотношению

$$KN_3 \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}} \varphi(0) = -\frac{V^\mu}{A^\mu} N_4 [\varepsilon(2a - \varepsilon)]^{-\frac{1}{2m}} \quad (2.8)$$

$$N_3 = \frac{m(2m+1)}{(m+1)^2}, \quad N_4 = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \mu}{\pi} \left[ \frac{(m-1)J^m(\mu)}{(2-m)\sin \frac{\pi}{2} l} \right]^\mu$$

Уравнения (2.7) и (2.8) в совокупности являются системой двух нелинейных уравнений для нахождения величин  $K$  и  $\varepsilon$ .

Анализируя характер поведения контактного напряжения и скорости осадки поверхности для двух решений, легко установить следующую картину сращивания.

На фиг. 2 штриховыми кривыми обозначено решение по принципу СОП, штрихпунктирными — локальное решение.

В результате сращивания глобального решения с локальным эпюра контактного напряжения становится более крутой, а кривая скорости осадки свободной поверхности — более полой.

3. Здесь остановимся на численной реализации предлагаемого метода. Для решения уравнения (1.10) при значении параметра  $s$ , равного собственному (1.17), необходимо вместо одного из граничных условий (1.11), (1.12), (1.16) произвести нормировку функции  $\varphi$ , отличную от нуля. В этом случае отброшенное граничное условие должно удовлетворяться автоматически. В работе выбиралась нормировка

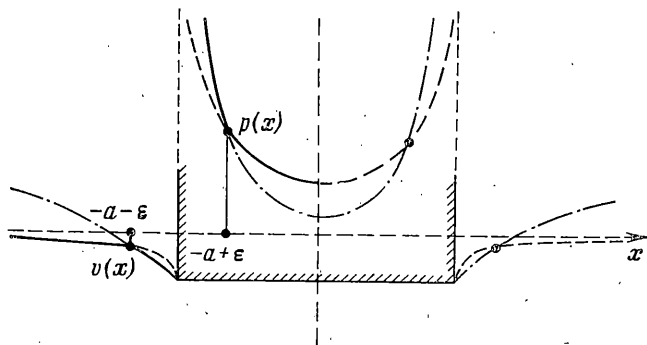
$$\varphi(0) = -1 \quad (3.1)$$

Знак минус взят для того, чтобы в соотношении (1.7) контактное напряжение  $\sigma_a^*$  обладало истинным направлением. Отброшенное граничное условие было первое условие (1.11).

Для решения уравнения (1.10) применялся метод Рунге — Кутты четвертого порядка, реализованный в виде подпрограммы RKGS библиотеки стандартных подпрограмм машин серии ЕС. Поскольку метод Рунге — Кутты применим к задачам с начальными значениями (к задачам Коши), а задача для уравнения (1.10) является краевой с граничными условиями

$$\varphi(0) = -1, \quad \varphi'(0) = 0, \quad \varphi'''(0) = 0, \quad \varphi'(\pi) = 0 \quad (3.2)$$

то применяется метод прогонки по значению  $\varphi''(0)$  (недостающее начальное значение), состоящий в следующем.



Фиг. 2

Если задавать произвольным образом значение  $\varphi''(0)$ , то получающееся на выходе методом Рунге — Кутты значение  $\varphi'(\pi)$  определяется вполне однозначно. Таким образом, существует функциональная зависимость  $\varphi'(\pi)$  от  $\varphi''(0)$ . Проблема состоит в нахождении нуля этой невявной функции, т. е. в нахождении значения  $\varphi''(0)$ , при котором  $\varphi'(\pi) = 0$ . Данная проблема решается методом секущих [7], если за два начальных значения  $\varphi''(0)$  взять числа, близкие к значению  $\varphi''(0) = 0,75$ , взятому из линейной теории. Конкретные вычисления показывают быструю сходимость такого процесса. Для четырех рассматриваемых значений  $m$  при точности  $10^{-5}$  время счета на ЭВМ ЕС-1022 составляет примерно 1,5 мин. Как и следовало ожидать, условие  $\varphi(\pi) = 0$  удовлетворяется при этом автоматически.

Система (2.7) — (2.8) приводит к следующему уравнению для нахождения величин  $\varepsilon/2a$ :

$$\frac{\varepsilon}{2a} = \left[ \frac{N_3^m}{N_1 N_4^m} \right]^{\frac{2m}{m-1}} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{2a} \right)^{\frac{m}{m-1}} \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^{-\frac{1}{m+1}} \times \\ \times \left\{ 1 - \left[ 1 - N_2 \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right)^{\frac{1}{2m}} F \left( \frac{\varepsilon}{2a} \right) \right]^m \right\}^{\frac{2m}{m-1}} \quad (3.3)$$

Это уравнение легко решается методом половинного деления [7]. Ниже даны результаты вычислений:

$m$	1	1,2	1,4	1,6	1,8
$\varepsilon/a$	0	0,111	0,240	0,257	0,124

При  $m=1$  приведенный результат получается путем асимптотической оценки решения при  $m \rightarrow 1$ . Нулевое значение  $\varepsilon$  в линейном случае говорит о том, что решение по принципу СОП применимо во всей полуплоскости. Это естественно, ибо при  $m=1$  принцип суперпозиции обобщенных перемещений превращается в обычный принцип суперпозиции [1], а последний, как известно, приводит в линейной теории к точному решению задачи.

По результатам этих вычислений видно также, что размеры зоны локального решения существенны по сравнению с размерами области контакта и достигают в некоторых случаях одной четвертой части последней.

Установим еще связь между силой вдавливания  $P$  и скоростью внедрения штампа  $V$ . Она получается интегрированием контактного напряжения, даваемого формулой (1.3) при  $|x| < a - \varepsilon$  и второй формулой (1.7) при  $\theta=0$ ,  $0 < r < \varepsilon$ , по области контакта. В результате приходим к соотношению

$$P = aA^{-\mu} (V/2a)^{\mu k} \quad (3.4)$$

значения коэффициента  $k$  приведены ниже во второй строке

$m$	1	1,2	1,4	1,6	1,8
$k$	0	1,919	3,776	5,372	7,361
$k$ (СОП)	0	1,878	3,597	5,095	7,160

В третьей строке приведены значения  $k$  для того случая, когда решение, построенное по принципу СОП, распространено на всю область контакта.

Нулевое значение  $k$  при  $m=1$  соответствует известному факту линейной теории об отсутствии связи между силой вдавливания и глубиной внедрения штампа в плоской задаче. В общем случае построенное в данной работе решение дает несколько большее значение коэффициента поствели  $k$ , чем получаемое по принципу СОП. Различие же контактного напряжения гораздо более существенно.

Отметим, что аналогичным образом может быть получено приближенное решение задачи о вдавливании без трения штампа в тонкий слой ( $\lambda \ll 1$ ,  $\lambda = ha^{-1}$ ,  $h$  — толщина слоя), изготовленный из несжимаемого материала (1.1) и лежащий без трения на жестком основании. В этом случае глобальное решение может быть получено точно, без использования принципа СОП. Именно, при  $|x| \leq a - \varepsilon$  будем иметь для плоского штампа  $p = 2(V/Ah)^{1/2}$ , а при  $|x| \geq a + \varepsilon$  получим  $v = 0$ . Локальные решения не изменяются. Другой подход для решения этой задачи был развит в работе [3].

Авторы благодарны Н. Х. Арутюняну за внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. — ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 901–924.
2. Atkinson C. A note on crack problems in power-law elastic materials and contact problems in non-linear creep. — Internat. J. Engng. Sci., 1971, v. 9, No. 8, p. 729–739.
3. Арутюнян Н. Х., Сумбатьян М. А. Плоская задача теории ползучести для слоя. — Изв. АН АрмССР, Механика, 1980, т. 33, № 3, с. 18–28.
4. Hutchinson J. W. Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material. — J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, No. 1, p. 13–31.
5. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. — J. Mech. and Phys. Solids, 1968, v. 16, No. 1, p. 1–12.
6. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 296 с.
7. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 280 с.

Москва, Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
14.1.1982