МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 1 • 1983

УДК 539.374

РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ КРУЧЕНИЯ УПРУГО-ИДЕАЛЬНОПЛАСТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

ПРОЦЕНКО А. М.

Рассматривается задача о кручении стержня, сечение которого содержит вершину входящего угла. Доказывается существование сингулярных полей самонапряжений и, как результат, регулярность поля напряжений для задачи пластичности. Обсуждаются способы решения таких задач и результаты их реализации на примере метода конечных элементов.

1. Сингулярной точкой контура назовем вершину входящего угла, раствор которого $2\theta>\pi$ измерен по сечению. Известно, что для упругого стержня напряжения в окрестности такого угла сингулярные [1]. Пусть τ_1 и τ_2 — ортогональные касательные напряжения и $\tau^2=\tau_1^2+\tau_2^2$. Тогда в окрестности сингулярного угла $\tau=O(r^{\nu-1})$, $\nu=\pi/(2\theta)$.

Рассмотрим проблему сингулярных решений с позиций теории упруго-идеальнопластического тела, для которого напряжения должны удовлетворять условию пластичности $\tau^2-\sigma^2\leqslant 0$ (σ — предел текучести для касательных напряжений). Поэтому напряжения во всех точках сечения вплоть до контура должны быть ограниченными. Эти напряжения можно представить как сумму «упругих» $\boldsymbol{\tau}^e$ и «остаточных» $\boldsymbol{\tau}^\circ$: $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^e+\boldsymbol{\tau}^\circ$. Здесь термин «остаточные» взят в кавычки, поскольку они не есть действительные остаточные напряжения. Величины $\boldsymbol{\tau}^e$ и $\boldsymbol{\tau}^\circ$ будем рассматривать как элементы гильбертова пространства H° с нормой $\|\boldsymbol{\tau}\|=[(\tau_1, \tau_1)+(\tau_2, \tau_2)]^{1/2}$, где скалярное произведение означает интегрирование по всему сечению. Пространство H° разобьем на два ортогональных подпространства $H^\circ=S+B$, где S — подпространство сингулярных значений, B — ортогональное ему подпространство регулярных значений.

Пусть $\boldsymbol{\tau}^e\in S^e+B^e$. Ниже покажем, что $\boldsymbol{\tau}^\circ\in S^\circ+B^\circ$, причем $S^e\subset S^\circ$. Это означает, что для любого $\boldsymbol{\tau}^e$ может быть выбрано такое $\boldsymbol{\tau}^\circ$, что сингулярность будет потеряна и останется только регулярное значение $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}^e+\boldsymbol{\tau}^\circ\in B$. А это, в свою очередь, позволит при некоторых дополнительных условиях удовлетворить условию пластичности.

Рассмотрим конечный сектор круга радиусом R с центральным углом 2θ, $\pi/2<\theta\leqslant\pi$. При $\theta=\pi$ получим круг с разрезом. Для упрощения предполагается только одна сингулярная точка — центр круга. Более сложная фигура, но с одной сингулярной точкой, может быть конформно отображена на этот сектор.

Введем полярную систему координат с полюсом в вершине угла и границами сектора при $\varphi=\pm\theta$. Будем использовать функцию напряжений, для которой запишем уравнения совместности деформаций, условие равновесия с внешним крутящим моментом M_0 и краевые условия для односвязной области

$$\Delta F=-\mu(2u+f),\quad F(R,\varphi)=F(r,\pm\theta)=0$$

$$\int\limits_0^R\int\limits_{-\theta}^{\theta}F(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi=\frac{\alpha}{2}M_0 \tag{1.1}$$

Эти уравнения записаны для общего случая: $\alpha=1$, $f=0$ соответствует задаче теории упругости, $\alpha=0$, f — обобщенная функция соответствует самоуравновешенному полю напряжений, вызванному дислокациями f.

Решение уравнений (1.1) будем разыскивать в пространстве H^1 — это гильбертово пространство с нормой $\|F\|_1^2=(F_{,r}, F_{,r})+(F_{,\varphi}/r, F_{,\varphi}/r)$.

Краевые условия обязательно входят в определение пространства H^1. Фактически здесь приходим к построению обобщенного решения, которое осуществляется на базисе из собственных функций оператора Лапласа для однородной задачи Дирихле. Пусть $J_\gamma(x)$ — функция Бесселя, тогда собственными функциями будут $J_{k\nu}(\lambda_{kj}r)\cos(k\nu\varphi)$, где $\nu=\pi/(2\theta)$ $(k=1, 3, 5, \ldots)$; λ_{kj} определяется из уравнения $J_{k\nu}(\lambda_{kj}R)=0$. Представим F в виде разложения по этому базису

$$F(r,\varphi)=\sum_{k,j} c_{kj}J_{k\nu}(\lambda_{kj}r)\cos(k\nu\varphi) \tag{1.2}$$

Пусть существует обобщенный ряд для разложения правой части уравнения Пуассона в (1.1)

$$\mu(2u+f)=\sum_{k,j} s_{kj}J_{k\nu}(\lambda_{kj}r)\cos(k\nu\varphi) \tag{1.3}$$

Из уравнения Пуассона (1.1) однозначно определяем, что $c_{kj}=s_{kj}\lambda_{kj}^{-2}$, где λ_{kj} — корни бесселевых функций, имеющих при больших j асимптотику $O(j)$ при любых k. Поэтому для того, чтобы $F\in H^1$, достаточно выполнить условия $s_{kj}=O(k^{-2})$ при любых j и достаточно больших k. Это вполне широкий класс для функций дислокаций f.

Далее, необходимо удовлетворить одному интегральному условию из (1.1):

$$\sum_{k,j} c_{kj}k^{-1}p_{kj}=\frac{\alpha}{2}\nu M_0, \qquad p_{kj}=\int_0^R rJ_{k\nu}(\lambda_{kj}r)\,dr=O(\lambda_{kj}^{-1}) \tag{1.4}$$

При сделанных выше ограничениях для s_{kj} условие (1.4) выполняется. Поэтому в задаче теории упругости можно считать $s_{kj}=-2\mu s_{kj}^1$, где s_{kj}^1 — коэффициенты разложения для единицы. Величина u определяется уже из уравнения (1.4) при $\alpha=1$.

Для самонапряжений значения s_{kj} произвольные в рамках ограничений на функциональную принадлежность F, а уравнение (1.4) однородное.

Таким образом, пространство сингулярных значений $S^e\subset S^\circ$, поскольку оба они построены на базисе функций $J_\nu(\lambda_{1j}r)\cos(\nu\varphi)$ $(j=1, 2, \ldots)$. Такое пространство создает сингулярное решение $\tau=O(r^{\nu-1})$, а выбор для F° коэффициентов разложения c_{1j}, таких, как для F^e, но с обратным знаком, приводит к регулярности результирующих напряжений $\tau\in B=B^e+B^\circ$; причем коэффициенты разложения τ° по базису B° связаны соотношением (1.4).

2. Вариационная задача для упруго-идеальнопластического тела может быть сформулирована в терминах «остаточных» напряжений [2]. Однако здесь могут возникнуть технические трудности, связанные с предварительным определением интенсивности сингулярной составляющей $\boldsymbol{\tau}^e$. Этого можно избежать воспользовавшись энергетической ортогональностью полей $\boldsymbol{\tau}^e$ и $\boldsymbol{\tau}^\circ$. Действительно, пространство H^1 одновременно является энергетическим, так что скалярное произведение F^e на F° в H^1 есть энергия поля τ^e на упругих деформациях поля τ° и наоборот. Поэтому на основании формул Грина имеем

$$(F^e, F^\circ)_{H^1}=\int_\Gamma F^\circ F_{,n}^e\,d\Gamma-(F^\circ, \Delta F^e)=-2\mu u\int_S F^\circ\,dS=0$$

Здесь $(\ldots, \ldots)$ — скалярное произведение, S и Γ — площадь и контур сечения, $\mathbf{n}$ — нормаль к Γ.

На этом основании можно составить общий функционал для суммарного поля $\boldsymbol{\tau}$, фактически являющийся суммой упругих энергий полей $\boldsymbol{\tau}^e$ и $\boldsymbol{\tau}^\circ$

$$U(\tau)=\frac{1}{2\mu}\int\limits_S (\tau_x^2+\tau_y^2)\,dS \tag{2.1}$$

Здесь и ниже используется декартовая система координат с осью z, направленной вдоль стержня, и $\tau_x=\sigma_{xz}$, $\sigma_y=\sigma_{yz}$.

Напряжения должны удовлетворять условиям равновесия и краевым условиям

$$\begin{gathered}\tau_{x,\,x}+\tau_{y,\,y}=0 \quad (x,\,y\in S)\\ \tau_x n_x+\tau_y n_y=0 \quad (x,\,y\in\Gamma)\\ \int\limits_S (\tau_x y-\tau_y x)\,dS=M_0\end{gathered} \tag{2.2}$$

Решение экстремальной задачи $U(\tau)\to\inf$ при условиях (2.2) приводит к обобщенному решению задачи теории упругости.

Для решения задачи пластичности следует добавить условие пластичности

$$\tau_x^2+\tau_y^2-\sigma^2\leqslant 0 \tag{2.3}$$

Экстремальная задача $U(\boldsymbol{\tau})\to\inf$ при условиях (2.1) и (2.2) приводит к совместной реализации экстремального принципа Лагранжа в теории упругости и экстремального принципа для поля самонапряжений [2], что вместе фактически является принципом Хаара — Кармана [3].

Реализация такой экстремальной задачи, с одной стороны,— достаточно сложная и трудоемкая проблема, а с другой — позволяет получить решение только для напряжений.

Полное решение может быть получено при помощи двойственной экстремальной задачи. Составим функционал Лагранжа для целевой функции (2.1) и ограничений (2.2) и (2.3):

$$L=U(\boldsymbol{\tau})+\int\limits_S w(\tau_{x,x}+\tau_{y,y})\,dS-\int\limits_\Gamma v(\tau_x n_x+\tau_y n_y)\,d\Gamma+u\int\limits_S(\tau_x y-\tau_y x)\,dS-$$

$$-uM_0+\int\limits_S \lambda(\tau_x^2+\tau_y^2-\sigma^2)\,dS \tag{2.4}$$

Здесь w и λ определены в S $(\lambda\geqslant 0)$, v — в Γ, u — простая переменная. Исходной задаче соответствует седловая точка $L^*=\inf\limits_{\tau}\ \sup\limits_{u,\lambda\geqslant 0} L$.

При достаточно общих условиях этой же седловой точке соответствуют переставленные процедуры $L^*=\sup\inf L$ [4]. Отметим, что здесь u и τ — свободные переменные без каких-либо ограничений. Поэтому можно приравнять нулю вариацию L по τ_x и τ_y, предварительно совершив изменение второго слагаемого в (2.4)

$$\int\limits_S w(\tau_{x,x}+\tau_{y,y})\,dS=\int\limits_\Gamma w(\tau_x n_x+\tau_y n_y)\,d\Gamma-\int\limits_S(\tau_x w_{,x}+\tau_y w_{,y})\,dS \tag{2.5}$$

В итоге получим следующие выражения:

$$\begin{gathered}\tau_x=\mu(w_{,\,x}-uy-2\lambda\tau_x)\\ \tau_y=\mu(w_{,\,y}+ux-2\lambda\tau_y)\end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь вполне очевидным образом проявляется связь с ассоциированным законом течения. Решения (2.6) относительно τ_x и τ_y существуют при любых $\lambda \geqslant 0$

$$\tau_x = \frac{\mu}{1+2\mu\lambda}(w_{,x}-uy), \quad \tau_y = \frac{\mu}{1+2\mu\lambda}(w_{,y}+ux) \tag{2.7}$$

Одновременно с этим устанавливаем, что v — след w на Г. Теперь можно подставить (2.7) в (2.4) и получить функционал $L(w, \lambda, u)$, зависящий только от двойственных переменных: u — угла закручивания, w — перемещений депланации и λ — пластических множителей.

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид функционала

$$L = -\frac{\mu}{2}\int_S \frac{(w_{,x}-uy)^2+(w_{,y}+ux)^2}{1+2\mu\lambda}\,dS - (\lambda, \sigma^2) + uM_0 \tag{2.8}$$

В итоге получен функционал, строго вогнутый и имеющий единственное экстремальное решение при $\lambda \geqslant 0$. По своей структуре он напоминает функционал Лагранжа для закручиваемого стержня из неоднородного материала, неоднородность которого вызвана неоднородным модулем сдвига $\mu' = \mu/(1+2\lambda\mu)$ из-за переменного значения λ.

3. Численный эксперимент с использованием функционала (2.8) привел бы к многократным решениям задачи теории упругости с переменным модулем сдвига. Это — трудоемкий процесс, поэтому был выбран другой способ. Пусть имеется многошаговый процесс, например итерационный, и на шаге k получены значения τ_x^k и τ_y^k. Далее выражения (2.6) принимаются в виде

$$\tau_x = \mu(w_{,x}-uy-2\lambda\tau_x^k), \quad \tau_y = \mu(w_{,y}+ux-2\lambda\tau_y^k) \tag{3.1}$$

Подставляя эти выражения в (2.4), будем иметь

$$L = -\frac{\mu}{2}\int_S [(w_{,x}-uy+2\lambda\tau_x^k)^2 + (w_{,y}+ux+2\lambda\tau_y^k)^2]\,dS +$$

$$+\int_S \lambda(\tau_x^{k^2}+\tau^{yk^2}-\sigma^2)\,dS + uM_0 \tag{3.2}$$

Для такого функционала существуют достаточно хорошо разработанные методы определения экстремума, например метод конечных элементов.

Функционал (3.2) с измененным знаком является строго выпуклым и при определенных значениях M_0 имеет единственное решение.

Технически применение метода конечных элементов сводится к повторным решениям системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{b}(\lambda^k) \tag{3.3}$$

и решению серии экстремальных квадратичных задач для определения λ^{k+1}:

$$\psi_\alpha(\lambda_\alpha, \mathbf{w}^{k+1}) \to \min_{\lambda_\alpha \geqslant 0} \quad (\alpha=1,\ldots,m) \quad (\mathbf{w} \in R_{n+1}) \tag{3.4}$$

где n — число узлов, m — число конечных элементов, $\mathbf{K}$ — матрица жесткости ансамбля конечных элементов.

Решению системы (3.3) предшествовала факторизация — разложение $\mathbf{K}$ на треугольные множители по Холесскому, поэтому неоднократные решения такой системы оказались нетрудоемкими. Задачи (3.4) — одномерные, решаемые только для элементов, в которых накапливаются пластические деформации. В итоге трудоемкость решения задачи пластичности примерно в два раза превышает трудоемкость аналогичной задачи теории упругости. Например, для решения задачи со 190 конечными элементами потребовалось всего 40 с при скорости ЭВМ около 10^5 операций в 1 с.

Отметим основные результаты численного эксперимента. Разбиение нагрузки M_0 на отдельные этапы и однократное решение задачи на полную нагрузку приводят к полному совпадению результатов – совпадают не менее четырех значащих цифр при точности вычислений 6–7 знаков. Решение возможно практически во всем диапазоне допустимых значений M_0 вплоть до предельного значения.

При достаточно малых нагрузках в элементах, примыкающих к сингулярной точке, наблюдаются деформации пластичности. При любой нагрузке в окрестности сингулярной точки наблюдаются деформации пластичности, а при снятии всей нагрузки имеет место пластическая деформация обратного знака. Подобного эффекта нет в регулярных системах. Причем, повторное приложение той же нагрузки приводит к увеличению пластической деформации таким образом, что за каждый цикл нагружения – разгрузки происходит приращение работы напряжений на пластических деформациях – рассеивание энергии и эта величина не зависит от числа предшествовавших циклов.

Таким образом, за цикл по нагрузке в точки рассеивается энергия $\Delta\lambda\sigma^2$. Если энергоемкость на пластическое разрушение составляет A, то разрушение вследствие малоцикловой усталости произойдет за $A/(\Delta\lambda\sigma^2)$ циклов. Величина $\Delta\lambda$ может быть оценена численным решением, так как все решения строятся без учета сингулярности и, тем самым, могут быть получены простыми средствами. Повторные расчеты с измельчением сетки конечных элементов подтверждают этот результат.

Наиболее точные результаты получаются на сетке из треугольных элементов с линейными между узлами распределениями депланации и постоянными по элементам напряжениями. При этом сам элемент может находиться в одном из двух состояний – упругом или пластическом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963. 686 с.
2. *Проценко А. М.* Теория упруго-идеальнопластических систем. М.: Наука, 1982. 287 с.
3. *Хаар А., Карман Т.* К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах.– В кн.: Теория пластичности. М.: Физматгиз, 1948, с. 41–56.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 479 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.III.1982