**МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**
**№ 6 · 1982**

УДК 539.3

# СТАЦИОНАРНОЕ ДОЗВУКОВОЕ ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЗА В УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

**СИМОНОВ И. В.**

Изучаются особенности волнового поля в упругой полосе с полубесконечным разрезом. Рассматриваются случаи движения края разреза в двух направлениях, соответствующих задаче о косом соударении пластин и задаче о распространении трещины под действием стационарной нагрузки. При использовании преобразования Фурье задача сводится к обобщенной задаче Римана. Методом факторизации получено решение, содержащее произвольные константы, которые определяются из условий в особых точках (принцип излучения Мандельштама [1, 2], условие неотрицательности потока энергии в окрестность края разреза). Обсуждаются расхождения с результатами работ [3–5], которые отвечают вариантам постановки этой же задачи, но с источниками энергии в особых точках. Рассматривается возможность распространения трещины со сверхрелеевской скоростью при знакопеременной нагрузке. Дана оценка величины растягивающих напряжений на продолжении разреза в задаче о соударении.

**1.** Рассмотрим упругую полосу постоянной толщины $2h$ с полубесконечным симметричным разрезом, край которого распространяется с постоянной скоростью. В системе координат $xy$, связанной с краем разреза $x>0$, движение будем предполагать установившимся.

Задача определения волнового поля в полосе сводится к решению системы уравнений для продольного $\varphi$ и поперечного $\psi$ потенциалов скоростей в области $|x|<\infty$, $0<y<1$ (в силу симметрии рассмотрим только верхнюю половину полосы):

$$\beta_1^2\varphi_{xx}+\varphi_{yy}=0,\quad \beta_2^2\psi_{xx}+\psi_{yy}=0,\quad \beta_j^2=1-c^2/c_j^2 \quad (j=1,2) \tag{1.1}$$

Скорости и напряжения выражаются через $\varphi$, $\psi$ при помощи соотношений плоской задачи теории упругости

$$\begin{gathered} u=\varphi_x+\psi_y,\quad v=\varphi_y-\psi_x,\quad c\sigma_x^{(x)}=\varphi_{yy}-\psi_{xy}-{}^1/_2\, c_1^2\,\Delta\varphi \\ c\sigma_x=\varphi_{xx}+\psi_{xy}-{}^1/_2 c_1^2\Delta\varphi,\quad c\tau_x={}^1/_2(\psi_{xx}-\psi_{yy})-\varphi_{xy} \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь за единицы измерения выбраны полутолщина $h$, скорость распространения поперечных волн $c_2^{\circ}$ и $2\mu$, где $\mu$ — модуль сдвига, $c_1$, $c_2\equiv1$, $c$ — скорости продольных и поперечных волн и края разреза соответственно, $(u, v)$ — вектор массовой скорости, $\sigma^{(x)}$, $\sigma$ и $\tau$ — нормальные и касательная компоненты тензора напряжений; буквенные индексы внизу означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Ограничимся рассмотрением случая дозвукового движения края разреза ($|c|<1$). Тогда (1.1) будут уравнениями эллиптического типа.

Краевые условия задачи можно разделить на однородные (или нулевые), неоднородные и условия в особых точках. Однородные условия — общие для всего изучаемого диапазона скоростей $c$:

$$\sigma=\tau=0 \quad (y=1,\ |x|<\infty,\quad \tau=0 \quad (y=0,\ |x|<\infty) \tag{1.3}$$

$$v=0 \quad (y=0,\ x<0) \tag{1.4}$$

Неоднородные условия предопределяют стационарное движение края разреза и различны для $c>0$ и $c<0$. В первом варианте (разрез закрывается) они отвечают задаче о косом соударении пластин. Раскрытие разреза поддерживается действием стационарной нагрузки на берега разреза

$$v_\infty = \lim_{x_1, x_2, x_2/x_1} \int_{x_1}^{x_2} \frac{v(x,0)}{x_2 - x_1} dx = -v_0 \qquad (0<c<1) \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} \sigma=0 \quad (y=0,\ x>0) \\ \sigma=p(x), \quad x\in(l_1, l_2), \quad y=0 \quad (-1<c<0) \\ \sigma=0, \quad x\notin(l_1, l_2), \quad x>0 \quad (0<l_1<l_2) \end{gathered} \tag{1.6}$$

где $p(x)$ — ограниченная, измеримая функция.

Первое из условий (1.5) выделяет постоянную составляющую функции $v(x, 0)$ при $x\to\infty$, поскольку решение может содержать собственные волны полуполосы — осциллирующие функции.

Кроме того, решение не должно противоречить предположению об отсутствии взаимодействия между берегами разреза, т. е. должно выполняться условие

$$y(x) = -\frac{1}{c}\int_0^x v(z, 0)\,dz \geqslant 0 \tag{1.7}$$

где $y=y(x)$ — уравнение смещения берега разреза.

Условие (1.7), в частности, накладывает ограничение на выбор вида нагрузки $p(x)$.

Как известно, в особых точках (в данном случае точки $x=y=0$ и $x=\pm\infty$) следует ставить дополнительные условия, которые имеют физическую природу и обеспечивают единственность решения. В физическом аспекте особые точки выделены, так как в них могут находиться источники или стоки энергии. Естественное требование — ограниченность мощности источника или стока. Далее, как правило, необходимо определенно обозначить — является данная точка источником или стоком. С математической точки зрения в особых точках искомые функции теряют свои классические свойства.

По смыслу данной задачи особые точки могут являться только стоками энергии. Если обозначить через $w_0$ поток энергии за единицу времени и приходящийся на единицу длины края разреза в окрестность точки $x=y=0$, то требуемой математической формулировкой условия в этой точке является неотрицательность и конечность $w_0$ [1] (формула связи $w_0$ с коэффициентами концентрации напряжений и параметрами задачи будет приведена в п. 3) $0\leqslant w_0<\infty$.

Вообще говоря, при соударении имеется вид энергии, который мог бы служить источником при $x=y=0$. Это — обратимая поверхностная энергия (по смыслу поставленных условий при $x<0$, $y=0$ предполагается спайка). Однако, согласно оценкам, проведенным для случая $c<0$, энергия, расходуемая в окрестности края на нелинейные эффекты, превосходит поверхностную энергию (для металлов — на несколько порядков [6]). Сильные нелинейные эффекты (такие, как, например, образование обратной струи) наблюдаются и при соударении пластин. Поэтому данное условие оставим в силе и в случае $c>0$.

На бесконечности целесообразно учесть требование, вытекающее из энергетического принципа излучения Мандельштама [1, 2]: энергия распространяется от источника возбуждения на бесконечность (применительно к обсуждаемой задаче оно будет сформулировано ниже, п. 2).

[1] *Костров Б. В.* Некоторые динамические задачи математической теории упругости: Дис. на соискание уч. ст. канд. физ.-матем. наук. М., МГУ, 1964. 165 с.

2. Выполним преобразование Фурье в представлении Коши [7] всех функций по $x$ с параметром $k$. Связь между преобразованными скоростями, напряжениями и потенциалами выразится из (1.2) с учетом (1.1) формулами

$$U=-ik\Phi+\Psi_y,\quad V=\Phi_y+ik\Psi$$
$$\Sigma^{(x)}=ik(\beta_1-\beta)\Phi-\Psi_y,\quad \Sigma^{(y)}=-ik\beta\Phi+\Psi_y \tag{2.1}$$
$$\mathrm{T}=-\Phi_y-ik\beta\Psi\quad (\beta=(1+\beta_2^2)/2)$$

Введем обозначения

$$\Sigma^-=\int\limits_{-\infty}^{0}\sigma(x,0)e^{ikx}dx,\quad V^+=\int\limits_{0}^{\infty}v(x,0)e^{ikx}dx$$

$$\Sigma^+=\int\limits_{0}^{\infty}\sigma(x,0)e^{ikx}dx=\int\limits_{l_1}^{l_2}p(x)e^{ikx}dx\quad (c<0)$$

$$\Sigma^+=0\quad (c>0),\quad \Sigma(k)=\Sigma^-(k)+\Sigma^+(k)$$

Индексом плюс или минус здесь и далее будем отмечать функции регулярные в верхней или нижней полуплоскости $\zeta=k+im$.

Решая преобразованные уравнения (1.1) с учетом (1.3), (2.1), а также условия $\Sigma^{(y)}=\Sigma(k)$ при $y=0$, получим следующие соотношения между изображениями потенциалов и $\Sigma(k)$:

$$\Phi=\frac{ic\Sigma(k)}{\beta k\Delta_0(k)}\{\operatorname{sh}\lambda_2\operatorname{sh}(\lambda_1(1-y))-(R+1)[\operatorname{ch}\lambda_2\operatorname{ch}(\lambda_1(1-y))-\operatorname{ch}(\lambda_1 y)]\}$$
$$\Psi=\frac{c\beta_1\Sigma(k)}{\beta^2k\Delta_0(k)}\{\operatorname{ch}\lambda_1\operatorname{sh}(\lambda_2(1-y))-(R+1)\operatorname{sh}\lambda_1\operatorname{ch}(\lambda_2(1-y))+\operatorname{sh}(\lambda_2 y)\} \tag{2.2}$$
$$\lambda_j=k\beta_j\quad (j=1,\,2),\quad R(c,\,c_1)=\beta_1\beta_2/\beta^2-1$$
$$\Delta_0=4\operatorname{ch}^2(1/2\lambda_1)\operatorname{ch}^2(1/2\lambda_2)\Delta_1(k)\Delta_2(k)$$
$$\Delta_1=(R+1)\operatorname{th}(1/2\lambda_2)-\operatorname{th}(1/2\lambda_1),\quad \Delta_2=(R+1)\operatorname{th}(1/2\lambda_1)-\operatorname{th}(1/2\lambda_2)$$

Удовлетворяя условию $V(k,\,0)=V^+(k)$, приходим к задаче Римана

$$V^+(k)=H(k)[\Sigma^-(k)+\Sigma^+(k)]$$
$$H(k)=-i\beta_1c^3\operatorname{ch}\lambda_1\operatorname{ch}\lambda_2\Delta_3(k)/(2\beta^2\Delta_0(k)) \tag{2.3}$$
$$\Delta_3(k)=(R+1)\operatorname{th}\lambda_1-\operatorname{th}\lambda_2$$

Заметим, что с точностью до нужного множителя уравнение (2.3) совпадает с аналогичным уравнением [3—5].

Наличие нулей и особенностей коэффициента $H(k)$ обусловливает обобщенный характер задачи (2.3). При факторизации, как обычно, следует выделить эти нули и особенности, предварительно изучив их расположение и характер. При $k\to\pm\infty$ и $k\to 0$ можно получить $H=\mp i\beta_1c^3/(2\beta^2R)$ и $H\sim 2i/(ck)$.

Ненулевые действительные решения уравнений $\Delta_j=0$ $(j=1,\,2,\,3)$ определяют остальные нули и полюса функции $H(k)$. Эти уравнения совпадают с дисперсионными уравнениями собственных колебаний полуполосы $(j=1,\,2)$ и полосы $(j=3)$ [8, 9]. Здесь следует различать случаи $|c|<c_R$ и $|c|>c_R$, где $c_R$ — единственный положительный корень уравнения Релея. При $|c|<c_R$ уравнение $\Delta_1(k)=0$ имеет два действительных регулярных [2] и симметричных относительно нуля корня $k=\pm k_1$, в то время как остальные уравнения ненулевых действительных корней не имеют. В случае $|c|>0$ положение обратное: $k=\pm k_j$, аналогичные корни $\Delta_j(k)=0$

($j=2, 3$), а уравнение $\Delta_1(k)=0$ имеет среди действительных только нулевой корень.

Корням $k=\pm k_1$ отвечают собственные волны (антисимметричные колебания) полуполосы, для которых выполнено неравенство $|c_*|>|c|$ ($|c|>0$), где $c_*$ — групповая скорость, а корням $k=\pm k_2$ и $k=\pm k_3$ — симметричные колебания полуполосы и полосы соответственно со сверхрелеевской фазовой скоростью (она равна $c$) и групповой скоростью, меньшей фазовой по абсолютной величине [8, 9] $|c_*|<|c|$. Данные неравенства будут служить для проверки выполнения условия излучения. Именно энергетически уходящими от края разреза будут, очевидно, волны, для которых справедливы неравенства

$$\begin{gathered} 0<c<c_* \quad \text{или} \quad c<c_*<0 \quad \text{при} \quad x\to\infty \\ 0<c_*<c \quad \text{или} \quad c_*<c<0 \quad \text{при} \quad x\to-\infty \end{gathered} \tag{2.4}$$

Следуя [3, 4, 10, 11], положим $H(k)=H_0(k)G(k)$ и выберем функцию $H_0(k)$ в таком (явном) виде, чтобы ее поведение в точках $k=\pm\infty$, $k=0$ полностью совпадало с поведением $H(k)$, а в точках $k=\pm k_j$ она имела простые полюса

$$\begin{gathered} H_0(k)=A\sqrt{k^6+a^6}\,/\,[k(k^2-k_1^2)] \quad (|c|<c_R) \\ H_0(k)=A\sqrt{k^2+b^2}\,(k^2-k_3^2)\,/\,[k(k^2-k_2^2)] \quad (|c|>c_R) \\ A=-i\beta_1c^3\,/\,(2\beta^2R), \quad a^3=4\beta^2Rk_1^2\,/\,(\beta_1c^4), \quad b=-16\beta^2R\,/\,(\beta_1c^4) \end{gathered} \tag{2.5}$$

При таком выборе $H_0(k)$ функция $G(k)=H(k)\,/\,H_0(k)$ будет обладать следующими свойствами: $G(k)>0$ ($|k|<\infty$), $G(k)=1$ ($k=0, \pm\infty$). Индекс $G(k)$ равен нулю, она удовлетворяет условию Гёльдера, и поэтому ее можно факторизовать с использованием интегралов типа Коши по формулам [10]:

$$G(k)=G^+(k)\,/\,G^-(k), \quad G^\pm(\zeta)=\exp\{\Gamma(\zeta)\} \tag{2.6}$$

$$\Gamma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau, \quad G^\pm(\pm\infty)=1, \quad G^\pm(0)=1,$$

$$G^\pm(k)=G^{\pm 1/2}(k)\exp\{\Gamma_0(k)\}, \quad \Gamma_0(k)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-k}d\tau$$

Особые интегралы здесь и далее понимаются в смысле главного значения.

Заметим, что согласно [12] $\Gamma(\zeta)$ и $\Gamma_0(k)$ можно было бы выразить через интегралы Фурье. Однако, по мнению автора публикуемой работы, в вычислительном отношении представление (2.6) предпочтительнее.

Осуществим факторизацию функции

$$\begin{gathered} Q=Q^+Q^-=\sqrt{k^6+a^6} \quad (|c|<c_R), \quad Q=\sqrt{k^2+b^2} \quad (|c|>c_R] \\ Q^\pm=[(\zeta\pm ae^{\pi i/6})(\zeta\pm ae^{\pi i/2})(\zeta\pm ae^{5\pi i/6})]^{1/2} \quad (|c|<c_R) \\ Q^\pm=\sqrt{\zeta\pm ib} \quad (|c|>c_R) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Ветви корней фиксируем условием $\sqrt{1}=1$, а разрезы проведем из точек ветвления в бесконечность по лучам, продолжение которых проходит через точку $\zeta=0$.

Также понадобится разложение функции $E=Q^-\Sigma^+/G^-$ на два слагаемых, каждое из которых является сужением аналитической в полуплоскости функции на действительную ось

$$E(k)=E^+(k)-E^-(k) \tag{2.8}$$

В силу определенности поведения $Q^-(k)$ и $G^-(k)$ нетрудно показать, что для функций $p(x)$, кусочно-гладких при $|c|>c_R$, гладких и исчезающих на концах интервала $(l_1, l_2)$ при $|c|<c_R$ функция $E(k)\sim k^{-1/2}$ при $k\to\infty$. Тогда задача о скачке (2.8) имеет решение в форме [10]:

$$E^{\pm}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}$$

$$E^{\pm}(k)=\pm\frac{1}{2}E(k)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(\tau)\,d\tau}{\tau-k}$$

При расширении класса рассматриваемых функций $p(x)$ следует предварительно выделить особенность на бесконечности у функции $E(k)$.

Принимая во внимание (2.5) – (2.8), перепишем (2.3) в виде

$$\frac{k(k^2-k_1^2)V^+}{AG^+Q^+}=\frac{Q^-\Sigma^-}{G^-}=C_0+C_1k\qquad (0<c<c_R)\tag{2.9}$$

$$\frac{k(k^2-k_1^2)V^+}{AG^+Q^+}-E^+=\frac{Q^-\Sigma^-}{G^-}-E^-=C_2+C_3k\qquad (-c_R<c<0)$$

$$\frac{kV^+}{AG^+Q^+}=\frac{k^2-k_3^2}{k^2-k_2^2}\frac{Q^-\Sigma^-}{G^-}=C_4\qquad (c_R<c<1)$$

$$\frac{k(k^2-k_2^2)V^+}{A(k^2-k_3^2)G^+Q^+}-E^+=\frac{Q^-\Sigma^-}{G^-}-E^-=C_5\qquad (-1<c<-c_R)$$

Согласно обобщенной теореме Лиувилля, левая и правая части каждого уравнения (2.9) представляют собой краевые значения единых целых функций ограниченного роста на бесконечности, т. е. являются полиномами. Из конечности потока $w_0$ следует, что $\Sigma^-(\zeta)$ и $V^+(\zeta)$ должны убывать при $\zeta\to\infty$ не медленнее, чем $\zeta^{-1/2}$. Тогда нетрудно заключить, что каждая часть в первых двух уравнениях (2.9) есть полином первой степени, а в двух других — константа.

Можно показать, что общее решение, даваемое формулами (2.1), (2.2), (2.9), при правильном выборе контура интегрирования в процессе обратной трансформации (имеется в виду правило обхода полюсов, лежащих на действительной оси) удовлетворяет краевым условиям (1.3), (1.4), (1.6) и условию ограниченности потока мощности в особых точках. Остается проверить, либо удовлетворить ограничению на знак потока, принципу излучения (2.4) и условию (1.5). Исходя из этих требований будут однозначно определены входящие в общее решение константы $C_j$ ($j=0, 1, \ldots, 5$).

3. Проверим условие $w_0\geqslant 0$. Из (2.9) следует: $\Sigma^-\sim C_n\zeta^{-1/2}$, $V^+\sim AC_n\zeta^{-1/2}$, $\zeta\to\infty$ $_{(n=1,\,3,\,4,\,5)}$. Тогда асимптотика соответствующих оригиналов при $x\to\mp 0$ имеет вид [13]:

$$\sigma(x,0)\sim K_n/\sqrt{-\pi x},\quad v(x,0)\sim M_n/\sqrt{\pi x}\quad K_n=C_ne^{\pi i/4},\quad M_n=AC_ne^{-\pi i/4}\tag{3.1}$$

Асимптотике вида (3.1) соответствует сингулярное решение в малой окрестности $x=y=0$, которому отвечает поток мощности [2]

$$w_0=-c^3\beta_1K_n^2/(\beta^2R)\tag{3.2}$$

где величина $w_0$ нормирована на $c_2{}^\circ\mu h$. Отметим, что вывод этой формулы инвариантен относительно знака $c$.

Знак $w_0$ зависит от знака $c$ и знака функции Релея $R$, причем $R>0$ при $|c|<c_R$ и $R<0$ при $|c|>c_R$. Тогда из (3.1), (3.2) и требования $w_0\geqslant 0$ сразу

[2] Эта формула, по-видимому, впервые получена в цитируемой ранее диссертации Б. В. Кострова (см. также [14, 15]).

следует $C_1=C_5=0$. Константы $C_0$ и $C_4$ вычислим исходя из условия (1.5). Из (2.9) получим

$$V^+(\zeta)=AC_0G^+(\zeta)Q^+(\zeta)/[\zeta(\zeta^2-k_1^2)], \quad \Sigma^-(\zeta)=C_0G^-(\zeta)/Q^-(\zeta) \qquad (3.3)$$

Заметим, что простой полюс изображения $F^\pm(\zeta)$, лежащий на действительной оси, $(\zeta=\alpha)$ дает вклад в оригинал вида $\mp\eta(\pm x)e^{-i\alpha x}$ ($\eta(x)$ — ступенчатая функция).

Полюса $V^+(\zeta)$ определяют следующее поведение оригинала $v(x,0)$. Он представлен в виде суммы локальной волны (исчезающая на бесконечности функция), осциллирующего слагаемого — собственной волны полуполосы (вклад полюсов $\zeta=\pm k_1$) и постоянного слагаемого (вычет в точке $\zeta=0$). В данном случае собственная волна удовлетворяет условию излучения (2.4).

Приравняем вычет $V^+(\zeta)$ в нуле согласно условию (1.5) величине $-v_0$. В результате получим $C_0=v_0k_1\beta C^{-1}(R/\beta_1)^{1/2}e^{\pi i/4}$. Решение исчезает при $x\to-\infty$.

При $\zeta\to\infty$ имеем $V^+\sim AC_0\zeta^{-3/2}$, $\Sigma^-\sim C_0\zeta^{-3/2}$, что соответствует следующему поведению оригиналов в окрестности нуля $(x\to\mp0,\ y=0)$:

$$\sigma\sim-\frac{2v_0k_1\beta}{c}\sqrt{\frac{-Rx}{\pi\beta_1}} \qquad v\sim-\frac{v_0k_1c^2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta_1x}{\pi R}}\equiv-B_0x^{1/2} \qquad (3.4)$$

$$y(x)\sim 2B_0c^{-1}x^{3/2}>0$$

Таким образом, напряжения и скорости в случае $0<c<c_R$ непрерывны в точке $x=y=0$, расход мощности $w_0=0$, а кинетическая энергия поступательного движения пластин превращается в энергию собственной волны и излучается на бесконечность. Правило обхода при обращении диктуется условием регулярности функций $V^+$ и $\Sigma^-$ в областях, расположенных соответственно выше и ниже контура интегрирования: полюса $\zeta=0$, $\pm k_1$ обходятся сверху.

В интервале скоростей $c_R<c<1$ из (2.9) имеем

$$V^+=AC_4Q^+G^+/\zeta, \quad \Sigma^-=C_4(\zeta^2-k_2^2)G^-/[(\zeta^2-k_3^2)Q^-]$$

Функция $V^+(\zeta)$ имеет единственную особенность на действительной оси — простой полюс в нуле. Константу $C_4$ аналогично предыдущему случаю вычислим из условия (1.5) $C_4=-{}^1/{}_2\beta v_0c^{-1}(-R/\beta_1)^{1/2}e^{-\pi i/4}$.

Асимптотическое поведение оригиналов $\sigma(x,0)$ и $v(x,0)$ при $x\to\pm0$ определяются формулами (3.1), в которых коэффициенты интенсивности равны

$$K_4=-{}^1/{}_2(v_0\beta/c)\sqrt{-R/\beta_1}, \quad M_4=-{}^1/{}_4(v_0c^2/\beta)\sqrt{-\beta_1/R}$$

Видно, что при $c\to c_R+0$ коэффициенты $K_4\to0$, $M_4\to\infty$.

Расходуемая мощность поступательного движения пластин, которая равна $W=cv_0^2$, перераспределяется на мощность, выделяющуюся в точке, и мощность, излучаемую на бесконечность с собственной волной. Подстановка выражения для $K_4$ в (3.2) дает $w_0={}^1/{}_4cv_0^2$.

Таким образом, одна четверть энергии соударения при $c_2<c<1$ выделяется в точке $x=y=0$ и три четверти — излучается. Из формул теории кумуляции [16] следует, что в старшем члене мощность $W$ равна мощности обратной струи (т. е. $W=w_0$). В акустическом варианте задачи [17] также можно подсчитать, что мощность, выделяющаяся в точке контакта, равна затрачиваемой мощности. В двух упомянутых случаях отсутствуют собственные волны, чем они принципиально отличаются от задачи в упругой постановке.

При $x\to-\infty$ решение ограничено и осциллирует. Представляет интерес вычисление асимптотики $\sigma(x,0)$ при $x\to-\infty$ для оценки величины растягивающих напряжений, которая важна для приложений, поскольку при соударении металлических пластин часто наблюдается разрыв только что образовавшегося сварного шва. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательную формулу

$$\sigma(x,0)=-\frac{3}{2}\frac{\beta v_0 k_3}{c}\sqrt{\frac{-R}{\beta_1}}\operatorname{Im}\left\{\frac{G^-(k_3)}{Q^-(k_3)}\exp\left(-ik_3x-\frac{\pi i}{4}\right)\right\}+o(1)$$

В интервале $c_R<c<1$ $k_3\gg1$ [9] и в последней формуле можно провести разложение по большому параметру

$$\sigma\sim\frac{9}{2}\frac{\beta\beta_2 k_3^{3/2}v_0}{c}\sqrt{\frac{-R}{\beta_1}}e^{-2\beta_2 k_3}\sin\left(k_3x+\frac{\pi}{4}\right)\qquad(\beta_2k_3\gg1,\ x\to-\infty)$$

Контур интегрирования при возвращении к оригиналам обходит полюс $\zeta=0$ сверху, а полюса $\zeta=\pm k_3$ — снизу. На этом заканчивается построение решения задачи о соударении.

Полученное решение при $0<c<c_R$ расходится с результатами [5], где напряжения и скорости имеют интегрируемую особенность в нуле с неопределенной константой, а мощность $w_0$ отрицательна. Оно же качественно согласуется с решением задачи о вдавливании клина в упругое полупространство [18], имеющее в окрестности края контакта особенность вида (3.4). При $c_R<c<1$ решение совпадает с результатами [5].

По-видимому, можно качественно объяснить наблюдаемый экспериментально факт отсутствия струи и волнообразования при малых скоростях точки контакта [19]: при дорелеевских скоростях нет потока упругой энергии в окрестность точки контакта, следовательно, отсутствуют и сильные нелинейные эффекты.

Из асимптотик функций в нуле следует, что при $h\to\infty$ напряжения и скорости в фиксированной частице убывают как $h^{-1/2}$ в интервале скоростей $0<c<c_R$ и растут как $h^{1/2}$ $(c_R<c<1)$, что показывает вырождение решения при таком предельном переходе.

**4.** Перейдем к задаче о раскрывающейся трещине. При $-c_R<c<0$ выражения для $V^+(\zeta)$ и $\Sigma^-(\zeta)$ принимают вид

$$V^+=\frac{A[C_2+C_3\zeta+E^+(\zeta)]G^+(\zeta)Q^+(\zeta)}{\zeta(\zeta^2-k_1^2)},\qquad \Sigma^-=\frac{[C_2+C_3\zeta+E^-(\zeta)]G^-(\zeta)}{Q^-(\zeta)}$$

Константы $C_2$ и $C_3$ определим из условия равенства нулю вычетов функции $V^+(\zeta)$ в полюсах $\zeta=\pm k_1$. Вклад этих полюсов дает собственную волну, излучаемую из бесконечности, и его следует погасить. В результате приходим к системе $C_2+C_3k_1+E^+(k_1)=0$, $C_2-C_3k_1+E^+(-k_1)=0$ решение которой имеет вид $C_2=-{}^1/{}_2(E^+(k_1)+E^+(-k_1))$, $C_3={}^1/{}_2(E^+(-k_1)-E^+(k_1))/k_1$. В пределе при $c\to0$ $(k_1\to0)$ получим $C_2=-E^+(0)$, $C_3=-E_k^+(0)$ и решение динамической задачи переходит в решение статического аналога этой задачи [20].

Вычет $V^+(\zeta)$ в точке $\zeta=0$ определяет постоянную скорость пластины при $x\to\infty$. Напряжения затухают при $x\to\pm\infty$. В окрестности нуля поведение решения описывается формулами (3.1). Можно показать, что при $c\to c_R$ $(k_1\to\infty)$ будем иметь $K_3\to0$, $M_3\to\infty$, $w_0\to\infty$.

В сверхрелеевском режиме $(-1<c<-c_R)$, как выяснилось, константу $C_5$ необходимо положить равной нулю. Тогда

$$V^+=\frac{AG^+(\zeta)Q^+(\zeta)E^+(\zeta)(\zeta^2-k_3^2)}{\zeta(\zeta^2-k_2^2)},\qquad \Sigma^-=\frac{E^-(\zeta)G^-(\zeta)}{Q^-(\zeta)}$$

Проведем анализ решения в окрестности края разреза, принимая для простоты, что $p(x)$ — гладкая функция, исчезающая на концах. Тогда при $\zeta\to\infty$ можно показать, что

$$E^\pm(\zeta)=\frac{B}{\zeta}+o\left(\frac{1}{\zeta}\right),\qquad B=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}E(k)\,dk$$

и поскольку $G^\pm\sim1$, $Q^\pm\sim\zeta^{1/2}$ $(\zeta\to\infty)$, то $V^+\sim AB\zeta^{-3/2}$, $\Sigma^-\sim B\zeta^{-3/2}$ $(\zeta\to\infty)$.

Для проверки условия «невзаимодействия» $y(x)>0$ оценим $\arg B$. Представим согласно выбору ветви корня функцию $Q^-(k)$ в виде: $\sqrt{k-ib}=$ $=\rho(k)\exp(i\theta(k)+i\pi/4)$, $\rho=\sqrt[4]{k^2+b^2}$, $\theta={}^1/_2\operatorname{Arctg}(-b/k)+\pi i/4$, $(-\pi/2<\theta<$ $<\pi/2,\ -\infty<k<\infty)$, а множитель $e^{\pi i/4}$ вынесем за знак интеграла. Тогда можно показать, что каждый сомножитель подынтегральной функции (а значит, и все произведение) представляет собой функцию, действительная и мнимая части которой обладают свойством четности и нечетности соответственно. Следовательно

$$B=-e^{\pi i/4}B_1,\quad B_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sqrt{G(k)}\rho(k)\operatorname{Re}\{\Sigma^+(k)e^{i\theta(k)-\Gamma_0(k)}\}dk$$

$$\sigma(x,0)\sim 2B_1\sqrt{\frac{-x}{\pi}}\quad(x\to-0),\quad v(x,0)\sim\frac{\beta_1c^3B_1}{\beta^2R}\sqrt{\frac{x}{\pi}}\quad(x\to+0)$$

$$y(x)\sim-{}^2/_3xc^{-1}v(x,0)\quad(x\to+0)$$

где $B_1$ — действительная константа. Аналогичная асимптотика имела место при $0<c<c_R$. Подынтегральная функция в последнем выражении имеет максимум при $k=0$, по обе стороны от которого убывает и осциллирует так, что знак $B_1$ определяется знаком этой функции в окрестности $k=0$, где $G(k)\sim1$. Поэтому для качественной оценки влияния вида нагрузки $p(x)$ на знак $B_1$ следует записать

$$B_1\approx\frac{g_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho e^{i\theta}G_1^+\Sigma^+dk,\qquad G_1^+=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau\right\}$$

где совершена замена $G(k)$ на некоторую константу $g_0>0$. Деформируя, далее, путь интегрирования в верхней полуплоскости $\zeta$ до разреза $(ib,\ i\infty)$, получим

$$B_1\approx\frac{g_0}{\pi}\int\limits_{b}^{\infty}\sqrt{m-b}\,G_1^+(im)\Sigma^+(im)dm$$

Поскольку $m-b$ и $G_1^+(im)>0$ при $m>b$, то знак $B_1$ зависит от знака

$$\Sigma^+(im)=\int\limits_{l_1}^{l_2}p(x)e^{-mx}dx$$

Если $p(x)$ — разрывающая нагрузка, то $B_1<0$ и $y(x\to0)<0$, т. е. берега пересекаются. В случае $p(x)>0$ напряжения под нагрузкой растягивающие, $B_1>0$ и $y(x\to0)>0$. При этом $\sigma(x,0)>0$ при $x\to-0$. Аналогичный аномальный эффект имеет место при движении локальной нагрузки по поверхности упругого полупространства со сверхрелеевской скоростью, когда знак смещений и скоростей под нагрузкой меняется на обратный [21, 22].

Аналогично можно выяснить, что знак вертикальной составляющей поступательной скорости при $x\to\infty$ $(v_\infty)$ определяется знаком интеграла от $p(x)$. При $p(x)>0$ скорость $v_\infty<0$ и, следовательно, $y(x\to\infty)<0$, т. е. в этом случае берега пересекутся в окрестности $x=\infty$. В связи с этим представляет интерес решение задачи о стационарном движении разреза конечной длины со сверхрелеевской скоростью.

Условию $y(x)>0$ при $0<x<\infty$ можно удовлетворить выбирая подходящим образом знакопеременную нагрузку. В рамках грубого предположения о возможности замены $G(k)$ на константу достаточные условия для этого таковы

$$\int_{l_1}^{l_2} p(x)\, e^{-bx}\, dx > 0, \quad \int_{l_1}^{l_2} p(x)\, dx < 0$$

Более точное высказывание можно сделать на основании численных расчетов.

Скорость $v(x, y)$ при $x>0$ раскладывается на три слагаемых: локальную волну, осциллирующую функцию (вклад полюсов $\zeta=\pm k_2$ определяет симметричные колебания полуполосы при $x\to\infty$; принцип излучения удовлетворяется) и постоянную величину. При $x\to-\infty$ имеем исчезающее решение. Контур интегрирования при обратной трансформации должен обходить полюса $\zeta=0$, $\pm k_2$ сверху.

Таким образом, решение построено во всем изучаемом диапазоне скоростей $c$. Единственность решения можно показать конструктивным способом, рассматривая соответствующую однородную задачу.

В случае сверхрелеевской скорости движения края раскрывающегося разреза мощность, выделяющаяся в точке, и коэффициент концентрации напряжений равны нулю. При условии идеально хрупкого разрушения обобщенный критерий Ирвина требует, чтобы $w_0=2\gamma c>0$ ($\gamma$ – энергия, расходуемая на образование единицы площади поверхности) и, следовательно, решения, удовлетворяющего данному критерию, не существует. Для неидеально хрупкого тела напряжения могут оставаться конечными при разрушении, а энергетическому критерию Гриффитса можно удовлетворить, если, например, принять дополнительно следующие гипотезы: существует интервал $(-d, 0)$ на продолжении разреза, где имеется скачок нормальных смещений $\langle l\rangle\neq 0$ и действуют силы сцепления $g$ между берегами, причем $\langle l\rangle$ и $g$ связаны между собой непрерывной зависимостью $\langle l\rangle=f(g)$ [14]; скачок $\langle l\rangle$ выше по порядку малости величины скачка смещений при $x>0$.

Тогда полученное решение будет являться приближенным решением задачи с учетом сил сцепления. При этом $g(x)\approx\sigma(x, 0)$ $\langle l\rangle\approx f[g(x)]$, а энергетическому критерию Гриффитса, принимающему вид [14]:

$$2\gamma=-\int_{-d}^{0} g(x)\, d\langle l\rangle$$

можно удовлетворить, например, выбирая подходящим образом величину и расположение нагрузки $p(x)$ при заданной скорости $c$ (из решения видно, что это возможно, однако полного доказательства нет). Отметим также, что сверхрелеевское движение трещин рассматривалось в [23, 24].

Полученное решение расходится с [3, 4] в выборе условий для определения констант в общем решении, где они находятся из требования погашения вклада полюса в точке $\zeta=0$ в выражениях для $V^+(\zeta)$, что соответствует принятию некоего физического условия на бесконечности для вертикального смещения. При $-c_R<c<0$ это требование означает обращение в нуль смещения при $x\to\infty$; при $c<-c_R$ – соответственно скорости. В результате выражения для $C_2$, $C_3$ и $C_5$ в [3, 4] и в публикуемой работе оказываются различными. Как следствие этого различным является поведение решения. При $x\to\infty\,(0>c>-c_R)$ в [3, 4] оно содержит собственную волну, не удовлетворяющую принципу излучения, и соответствует задаче с источником энергии на бесконечности. В случае $c<-c_R$ в [4] константа $C_5\neq 0$ и, следовательно, имеется концентрация напряжений, источник энергии и пересечение берегов в вершине трещины, что послужило причиной признать это решение физически нереальным.

Формулы для сингулярного динамического поля в окрестности края разреза приведены, например, в [6, 15].

При $h\to\infty$ аналогично [4] формула для коэффициента интенсивности $K_3(0<-c<c_R)$ переходит в известный результат задачи для безграничного тела, например [15]; тот же предельный переход при $1<-c<c_R$ дает для напряжения $\sigma$ асимптотику (штрихом отмечены размерные величины) при $x'\to-0$:

$$\sigma\sim\frac{\sqrt{-x'}}{\pi}\int_{x_1'}^{x_2'}\frac{p(x')}{x'^{3/2}}\,dx'\to\frac{P\sqrt{-x'}}{\pi l'^{3/2}}, \qquad p\to P\delta(x'-l')$$

Данное рассмотрение не исключает возможности физически обоснованных постановок задач с источниками энергии в особых точках.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Мандельштам Л. И.* Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972. 439 с.
2. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 349 с.
3. *Гольдштейн Р. В., Матчинский М.* О стационарном движении трещины в полосе.— Инж. ж. МТТ, 1967, № 4, с. 98—107.
4. *Гольдштейн Р. В.* Стационарное движение трещины в полосе. Предельная скорость трещины.— Инж. ж. МТТ, 1968, № 2, с. 76—87.
5. *Ефремов В. В.* Исследование косых соударений металлических пластин в упругой постановке.— ПМТФ, 1975, № 1, с. 171—179.
6. *Качанов Л. М.* Основы механики разрушения. М.: Наука, 1974. 311 с.
7. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968. 276 с.
8. *Гоголадзе В. Г.* Дисперсия волн Релея в слое.— Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, 1947, вып. 119, с. 27—38.
9. *Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F.* Elastic waves in layerd media. New York: McGrow-Hill, 1957. 380 p.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
11. *Койтер В. Т.* Бесконечный ряд параллельных трещин в неограниченной упругой пластинке.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М.: Изд-во АН СССР, 1961, с. 202—214.
12. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.
13. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
14. *Костров Б. В., Никитин Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 3, с. 112—125.
15. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
16. *Birkhoff G., McDougal D., Pugh E., Tailor G.* Explosives with lined cavities.— J. Appl. Phys., 1948, v. 19, No. 6, p. 563—582.
17. *Дерибас А. А.* Физика упрочнения и сварки взрывом. Новосибирск: Наука, 1972. 188 с.
18. *Костров Б. В.* Автомодельные динамические задачи о вдавливании жесткого штампа в упругое полупространство.— Изв. АН СССР. Механ. и машиностр., 1964, № 4, с. 54—62.
19. *Дерибас А. А., Захаренко И. Д.* О поверхностных эффектах при косых соударениях металлических пластин.— Физика горения и взрыва, 1974, № 3, с. 409—421.
20. *Ентов В. М., Салганик Р. Л.* О балочном приближении в теории трещин.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, с. 95—102.
21. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. М.: Гостехиздат, 1953. 264 с.
22. *Гольдштейн Р. В.* Волны Рэлея и резонансные явления в упругих телах.— ПММ, 1965, т. 29, вып. 3, с. 516—525.
23. *Костров Б. В.* Динамическое распространение трещин с переменной скоростью.— In.: Mechanica zniszczenia. Teoria i zastosowania. Warszawa: Wydawn. Polskiej Akad. Nauk. 1976, s. 89—122.
24. *Слепян Л. И., Фишков А. Л.* Смешанная плоская задача при неравномерно движущейся точке раздела граничных условий.— Актуальные проблемы механики сплошной среды. Исследования по упругости и пластичности: Сб. статей. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980, вып. 13, с. 172—181.


Москва


Поступила в редакцию
4.III.1981