

УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ
В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ УПРУГОМ ЦИЛИНДРЕ
(краевой резонанс)

ГРИНЧЕНКО В. Т., МЕЛЕШКО В. В.

Процесс возбуждения и особенности распространения гармонических волн в упругих волноводах различной конфигурации уже давно составляют предмет многочисленных теоретических и экспериментальных исследований [1-3]. В частности, накоплены и систематизированы обширные данные о специфике волнового поля в бесконечном сплошном цилиндре. Несмотря на то что эти исследования имеют более чем столетнюю историю [4], полное понимание основных свойств нормальных мод такого волновода достигнуто лишь в последние годы [2, 5-7]. Однако при рассмотрении вынужденных волновых движений в бесконечном и, в особенности, в полубесконечном волноводе возникает ряд вопросов, на которые еще нет достаточно полных и ясных ответов. В работе приводятся результаты, показывающие необычный характер реакции полубесконечного упругого цилиндра на неосесимметричную внешнюю нагрузку на торце.

1. Строится решение задач о распространении гармонических волн в бесконечном изотропном упругом круговом цилиндре $0 \leq r_1 \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|z_1| < \infty$ со свободной от усилий боковой поверхностью и суммируются сведения о дисперсионных свойствах такой системы. Это служит основой для последующего конструирования общего представления волнового поля и понимания его особенностей в полубесконечном цилиндре.

Обычное представление вектора смещений u частиц цилиндра

$$u = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi \quad (1.1)$$

где скалярный φ и векторный ψ потенциалы удовлетворяют волновым уравнениям

$$c_1^2 \nabla^2 \varphi = \partial^2 \varphi / \partial t^2, \quad c_2^2 \nabla^2 \psi = \partial^2 \psi / \partial t^2 \quad (1.2)$$

(∇^2 — оператор Лапласа, c_1 и c_2 — скорости волн расширения и сдвига соответственно), позволяет значительно упростить процедуру поиска частных решений векторного уравнения Ламе.

Геометрия объекта, характер разыскиваемого волнового движения вдоль оси z_1 и стандартная техника разделения переменных в уравнениях (1.2) [2] позволяют записать выражения для потенциалов в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= F I_n(q_1 r) \cos n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ \psi_r &= i \left[H_1 \frac{dI_n(q_2 r)}{dr} + H_2 n \frac{I_n(q_2 r)}{r} \right] \sin n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ \psi_\theta &= i \left[H_1 n \frac{I_n(q_2 r)}{r} + H_2 \frac{dI_n(q_2 r)}{dr} \right] \cos n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ \psi_z &= H_3 I_n(q_2 r) \sin n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ r &= r_1/a, \quad z = z_1/a, \quad \Omega_\alpha = \omega a/c_\alpha, \quad q_\alpha^2 = \gamma^2 - \Omega_\alpha^2 \quad (\alpha=1, 2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где γ — безразмерная постоянная распространения, ω — круговая частота, $I_n(x)$ — модифицированная функция Бесселя n -го порядка.

Выражения (1.3) содержат четыре произвольные постоянные F, H_1, H_2, H_3 , т. е. обладают определенной избыточностью для представления трех компонентов вектора смещений. Обычно при рассмотрении общих вопросов динамики упругого тела в качестве дополнительного условия в представлении (1.1) используют соотношение $\operatorname{div} \psi = 0$. Это условие является достаточным (но не необходимым) для представления любого волнового процесса в упругом теле в виде (1.1), что составляет содержание теоремы о полноте [8]. Однако следует обратить внимание, что в данной задаче выражения для безразмерных (отнесенных к радиусу) компонент вектора смещений согласно (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} u_r &= \left[A \frac{I_n'(q_1 r)}{I_n'(q_1)} + B \frac{I_n'(q_2 r)}{I_n'(q_2)} + C n \frac{I_n(q_2 r)}{r I_n(q_2)} \right] \cos n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ u_\theta &= - \left[A n \frac{I_n'(q_1 r)}{q_1 r I_n'(q_1)} + B n \frac{I_n(q_2 r)}{q_2 r I_n'(q_2)} + C q_2 \frac{I_n'(q_2 r)}{I_n(q_2)} \right] \sin n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \\ u_z &= i \left[A \gamma \frac{I_n(q_1 r)}{q_1 I_n'(q_1)} + B \frac{q_2 I_n(q_2 r)}{\gamma I_n'(q_2)} \right] \cos n\theta \exp[i(\gamma z - \omega t)] \end{aligned} \quad (1.4)$$

$A = F q_1 I_n'(q_1)$, $B = H_2 \gamma q_2 I_n'(q_2)$, $C = (H_1 \gamma + H_3) I_n(q_2)$, где штрих означает дифференцирование по всему аргументу. Выражения (1.4) содержат три произвольные постоянные A, B, C независимо от способа исключения какой-либо из величин H_1, H_2, H_3 .

Выполнение нулевых граничных условий по напряжениям $\sigma_r, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}$ на поверхности $r=1$ приводит соответственно к однородной системе уравнений относительно постоянных A, B, C :

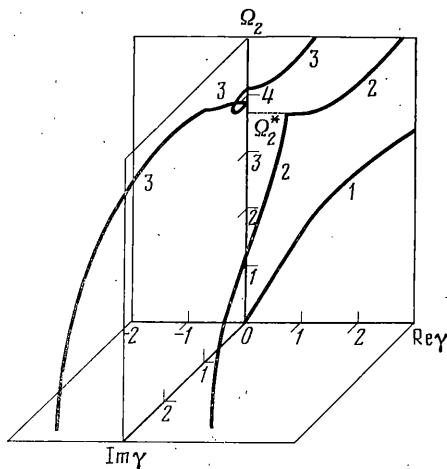
$$\begin{aligned} A \left[\frac{\gamma^2 + q_2^2 + 2n^2}{2I(q_1)} - 1 \right] + B \left[\frac{q_2^2 + n^2}{I(q_2)} - 1 \right] + C n [I(q_2) - 1] &= 0 \\ A \left[\frac{n}{I(q_1)} - n \right] + B \left[\frac{n}{I(q_2)} - n \right] + C \left[I(q_2) - \frac{q_2^2 + 2n^2}{2} \right] &= 0 \\ A + B \frac{\gamma^2 + q_2^2}{2\gamma^2} + C \frac{n}{12} &= 0 \\ I(q) &= q I_n'(q) / I_n(q) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Равенство нулю определителя этой системы дает дисперсионное уравнение, связывающее частоту и постоянную распространения. Необходимо отметить важный для дальнейшего факт. Непосредственно из выражений для коэффициентов в системе (1.5) вытекает, что при $q_2=0$, $I(0)=n$ ее определитель обращается в нуль. На первый взгляд, это можно трактовать [9] как указание на существование бездисперсионной нормальной волны, распространяющейся в цилиндре со скоростью c_2 . Однако все становится ясным после более подробного рассмотрения кинематики соответствующей «нормальной волны». Учитывая, что в данном случае $A=0$, $B=-Cn$, и выполняя предельный переход $q_2 \rightarrow 0$ в выражениях (1.4) для смещений, находим $u_r = u_\theta = u_z = 0$, т. е. волновое поле в цилиндре отсутствует.

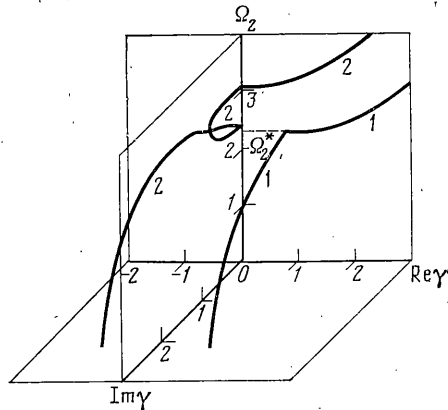
Для построения компонентов вектора смещений, свободных от указанного недостатка (ложного корня), следует ввести две (вместо трех) новые постоянные X и Z :

$$A = X \frac{q_2^2 + \gamma^2}{2\gamma^2} + Z \frac{n}{2}, \quad B = -X - Z \frac{n\gamma^2}{q_2^2}, \quad C = Z \frac{\gamma^2}{q_2^2} \quad (1.6)$$

Физически переход от трех к двум произвольным постоянным в решении связан с предварительным удовлетворением однородного граничного



Фиг. 1



Фиг. 2

условия по τ_{rz} . При этом первые два уравнения в (1.5) переходят в систему

$$-XP + ZnM = 0, \quad XnN + ZQ = 0 \quad (1.7)$$

$$P = \frac{q_2^2 + n^2}{I(q_2)} - \frac{(q_2^2 + \gamma^2 + 2n^2)(q_2^2 + \gamma^2)}{4\gamma^2 I(q_1)} - \frac{\Omega_2^2}{2\gamma^2} \quad (1.8)$$

$$M = \frac{q_2^2 + \gamma^2 + 2n^2}{4I(q_1)} + \gamma^2 R(q_2) - \frac{\gamma^2}{I(q_2)} - \frac{1}{2}$$

$$N = \frac{q_2^2 + \gamma^2}{2\gamma^2 I(q_1)} - \frac{1}{I(q_2)} + \frac{\Omega_2^2}{2\gamma^2}$$

$$Q = \frac{n^2}{2I(q_1)} + \gamma^2 R(q_2) - \frac{\gamma^2 + n^2}{2}$$

$$R(q_2) = [I(q_2) - n^2/I(q_2)]/q_2^2$$

Предельным переходом устанавливается, что $R(q_2) \rightarrow n/2$ (при $q_2 \rightarrow 0$), и поэтому выражения M и Q не имеют особенностей при $q_2 = 0$. Непосредственная проверка показывает, что определитель системы (1.7)

$$D = PQ + n^2 MN \quad (1.9)$$

уже не обращается в нуль при $q_2 = 0$ и, следовательно, ложный корень здесь исключен.

Результаты решения дисперсионного уравнения (1.9), определяющие допустимые значения γ для любой частоты ω , обычно представляют в виде дисперсионных ветвей в прямоугольной системе координат ($\text{Re } \gamma, \text{Im } \gamma, \Omega_2$). Первые несколько ветвей по данным расчетов [6] для коэффициента Пуассона $\nu = 0,3317$ и $n = 0,2$ воспроизведены на фиг. 1 и 2 соответственно. Цифры здесь указывают порядковый номер ветви, объединяющей действительные, мнимые и комплексные участки и простирающейся непрерывно от нулевой до бесконечной частоты. При этом на фигурах приведены лишь те ветви, действительные участки которых отвечают бегущим (однородным) волнам, переносящим энергию в положительном направлении оси z . Чисто мнимые значения γ_i определяют неоднородные волны, экспоненциально убывающие с ростом z . Хотя поведение нормальных мод, отвечающих вещественным и чисто мнимым корням дисперсионного уравнения, в упругом волноводе достаточно своеобразно, они имеют определенную аналогию с волнами в акустических или электромагнитных волноводах той же конфигурации.

Интерпретация волновых движений, соответствующих комплексным корням дисперсионного уравнения, оказалась более трудным делом — ведь каждый такой корень γ_c определяет распространяющуюся волну с пространственным затуханием амплитуды. Поскольку в идеально упругой среде нет диссипации энергии, то такая взятая в отдельности волна не является согласованным с физической сущностью задачи элементом волнового поля. Для построения такого элемента, отвечающего комплексным корням, необходимо учесть следующее обстоятельство. В силу структуры дисперсионного уравнения (величина γ входит только в четной степени, а само уравнение имеет вещественные коэффициенты) наряду с комплексным корнем γ_c его корнями являются также: $-\gamma_c$, $\bar{\gamma}_c$, $-\bar{\gamma}_c$ (черта означает комплексное сопряжение). Пары корней γ_c и $-\bar{\gamma}_c$ при $\text{Im } \gamma_c > 0$ отвечают смещения, в совокупности образующие две стоячие волны с пространственным затуханием амплитуды с ростом z . Поскольку в стоячей волне нет переноса энергии, то именно такое объединение отражает физическое существо задачи. Отметим, что корни γ_c и $-\bar{\gamma}_c$, необходимые для образования нераспространяющихся стоячих волн, всегда принадлежат соседним по номеру дисперсионным ветвям. Бесконечный набор именно таких волн наряду с конечным числом однородных и неоднородных волн позволяет, в принципе, полностью решить краевую задачу о вынужденных движениях полубесконечного цилиндра при нагружении с торца.

Значение нераспространяющихся волн, соответствующих комплексным корням, при формировании волнового поля особенно ярко проявилось в трактовке интересного типа осесимметричных собственных колебаний конечного цилиндра — краевого резонанса, экспериментально обнаруженного в [10]. Собственная форма такого резонанса характеризуется резкой локализацией зоны больших смещений вблизи торцов цилиндра, а собственная частота $\Omega_2^{(e)}$ практически не зависит от его длины. Последующие экспериментальные [6, 11, 12] и теоретические [13–15] исследования позволили раскрыть дополнительные аспекты указанного явления. Независимость частоты краевого резонанса от длины цилиндра в значительной мере предопределила интерес к волновому полю в полубесконечном цилиндре в районе соответствующей частоты [6, 16–18]. При этом особый интерес представляла задача о вынужденных колебаниях, возбуждаемых внешней нагрузкой на торце.

Если явление краевого резонанса связывать с эффективным возбуждением нераспространяющихся стоячих волн, то в случае отсутствия вязких потерь можно было бы ожидать неограниченный рост амплитуды колебаний при приближении частоты внешней нагрузки к частоте $\Omega_2^{(e)}$. Однако наличие в осесимметричном случае на любой частоте однородной волны (фиг. 1) и связанный с этим унос энергии (радиационное демпфирование) делает невозможным существование резонанса в обычном понимании. Расчеты показали, что при возбуждении торца в узком частотном диапазоне вблизи $\Omega_2^{(e)}$ амплитуда первых двух стоячих нераспространяющихся волн в десятки раз превосходит амплитуду бегущей волны и, следовательно, интенсивное волновое движение локализовано вблизи торца.

Более глубокий анализ зависимости осесимметричного типа движения в упругом цилиндре [19] от физических характеристик материала показал важное значение коэффициента Пуассона ν . В частности, при $\nu=0$ единственная в диапазоне $0 < \Omega_2 < \Omega_2^* = 2,48$ бегущая волна имеет равномерное по радиусу распределение смещений u_z и не возбуждается самоуравновешенной нормальной нагрузкой на торце. Поскольку стоячие нераспространяющиеся волны при такой нагрузке возникают, то при ее приложении к торцу цилиндра возможно проявление резонанса в обычном смысле. Это предположение было подтверждено соответствующими расчетами [20], что явилось первым указанием на факт существования резонанса в неограниченном упругом теле, который нельзя трактовать в виде суммы двух бегущих навстречу волн.

Обращаясь к случаю неосесимметричных волновых движений в цилиндре при произвольном значении ν , отметим, что при $n=1$ на каждой частоте Ω_2 существует бегущая волна [2], возбуждаемая любой нагрузкой. Дисперсионные спектры при произвольном $n \geq 2$ не имеют значительных качественных различий между собой и обладают очень важным свойством — критическая частота первой однородной волны Ω_2^* (фиг. 2) всегда отлична от нуля и превосходит частоту краевого резонанса для конечного цилиндра [12]. Именно это является основным для поиска резонанса в полубесконечном цилиндре при $n \geq 2$ для любого значения ν .

2. Исследуем задачу об установившихся неосесимметричных ($n \geq 2$) колебаниях полубесконечного цилиндра при силовой нагрузке на торце $z=0$. Для простоты рассмотрим лишь нормальное нагружение; тогда граничные условия примут вид

$$\sigma_z = 2Gf(r) \cos n\theta, \quad \tau_{zr} = \tau_{z\theta} = 0, \quad z=0 \quad (2.1)$$

$$\sigma_r = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0, \quad r=1$$

При этом $f(0)=0$, а гармонический множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен. Целью работы является исследование вынужденных движений цилиндра в диапазоне частот $\Omega_2 < \Omega_2^*$. Такое ограничение частотного диапазона открывает возможность двояко использовать выражения (1.4) для построения решения граничной задачи (2.1).

Искомый вектор смещений можно представить в виде бесконечного набора однородных, неоднородных и стоячих нераспространяющихся волн — однородных решений (1.4) с произвольными коэффициентами A, B, C по всем значениям γ , соответствующих дисперсионному уравнению (1.9). Такой подход, в принципе, может быть использован на любой частоте и для любого типа симметрии движений в цилиндре. При этом нулевые граничные условия на боковой поверхности $r=1$ удовлетворены тождественно. Практическая реализация данного метода усложнена необходимостью получать разложение функции $f(r)$ по неортогональной системе однородных решений. При помощи метода однородных решений получены интересные данные об осесимметричном волновом поле в полубесконечном цилиндре [16–18]. Граничные условия на торце при этом выполнялись способом коллокации. (Решений задач для неосесимметричных типов движения в настоящее время нет.)

Второй аналитический подход к построению точного решения граничной задачи (2.1) основывается на ином способе использования решений (1.4). С учетом (1.6), взяв действительную часть от выражений (1.4), находим, что смещения

$$\begin{aligned}
 u_r^{(1)} &= \cos n\theta \left(\int_0^\infty \left\{ X(\gamma) \left[\frac{(\gamma^2 + q_2^2) I_n'(q_1 r)}{2\gamma^2 I_n'(q_1)} - \frac{I_n'(q_2 r)}{I_n'(q_2)} \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Z(\gamma) n \left[\frac{I_n'(q_1 r)}{2I_n'(q_1)} - \frac{\gamma^2 I_n'(q_2 r)}{q_2^2 I_n'(q_2)} + \frac{\gamma^2 I_n(q_2 r)}{q_2^2 r I_n(q_2)} \right] \right\} \cos \gamma z d\gamma \right) \\
 &\quad (2.2) \\
 u_\theta^{(1)} &= -\sin n\theta \left(\int_0^\infty \left\{ X(\gamma) \frac{n}{r} \left[\frac{(\gamma^2 + q_2^2) I_n(q_1 r)}{2\gamma^2 q_1 I_n'(q_1)} - \frac{I_n(q_2 r)}{q_2 I_n'(q_2)} \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Z(\gamma) \left[\frac{n^2 I_n(q_1 r)}{2q_1 r I_n'(q_1)} - \frac{n^2 \gamma^2 I_n(q_2 r)}{q_2^3 r I_n'(q_2)} + \frac{\gamma^2 I_n'(q_2 r)}{q_2 I_n(q_2)} \right] \right\} \cos \gamma z d\gamma \right) \\
 u_z^{(1)} &= \cos n\theta \left(\int_0^\infty \left\{ \frac{X(\gamma)}{\gamma} \left[\frac{q_2 I_n(q_2 r)}{I_n'(q_2)} - \frac{(\gamma^2 + q_2^2) I_n(q_1 r)}{2q_1 I_n'(q_1)} \right] + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + Z(\gamma) n \gamma \left[\frac{I_n(q_2 r)}{q_2 I_n'(q_2)} - \frac{I_n(q_1 r)}{2q_1 I_n'(q_1)} \right] \right\} \sin \gamma z d\gamma \right)
 \end{aligned}$$

удовлетворяют уравнениям движения Ламе. Содержащийся в них произвол в виде плотностей $X(\gamma)$ и $Z(\gamma)$ достаточен для выполнения любых граничных условий по σ_r и τ_{rz} на границе $r=1$, при этом граничное условие для τ_{rz} выполнено тождественно.

Исходя из свойств нормальных мод (фиг. 2) можно заключить, что в рассматриваемом диапазоне $\Omega_2 < \Omega_2^*$ решение в виде (2.2) не представляет бегущих волн и, следовательно, плотности $X(\gamma)$ и $Z(\gamma)$ не имеют особенностей. Важным моментом при применении выражений (2.2) к решению граничной задачи (2.1) является отсутствие в них какого-либо произвола для выполнения граничного условия для нормального напряжения на торце $z=0$ (касательные напряжения при этом тождественно равны нулю). Обеспечить выполнение условия для напряжения σ_z на торце можно добавляя к (2.2) решение уравнений Ламе для неосесимметричного

«периодически» деформированного полупространства $z \geq 0$. Такое решение в общем случае содержит три последовательности произвольных постоянных и строится аналогично работам [21, 22]. В частном случае отсутствия на границе полупространства касательных усилий общее решение упрощается и содержит только одну последовательность постоянных Y_j в рядах Дини по полным системам функций $J_n(\lambda_j r)$ и $J_n'(\lambda_j r)$:

$$\begin{aligned} u_r^{(2)} &= \cos n\theta \sum_{j=1}^{\infty} \pi Y_j \left(p_2 e^{-p_2 z} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} e^{-p_1 z} \right) \frac{J_n'(\lambda_j r)}{\lambda_j J_n(\lambda_j)} \\ u_\theta^{(2)} &= -\sin n\theta \frac{n}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \pi Y_j \left(p_2 e^{-p_2 z} - \frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2p_1} e^{-p_1 z} \right) \frac{J_n(\lambda_j r)}{\lambda_j^2 J_n(\lambda_j)} \\ u_z^{(2)} &= \cos n\theta \sum_{j=1}^{\infty} \pi Y_j \left(\frac{\lambda_j^2 + p_2^2}{2\lambda_j^2} e^{-p_1 z} - e^{-p_2 z} \right) \frac{J_n(\lambda_j r)}{J_n(\lambda_j)} \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $p_\alpha^2 = \lambda_j^2 - \Omega_\alpha^2$, λ_j — ненулевые корни уравнения $J_n'(\lambda) = 0$.

Очевидно, что представление (2.3) справедливо в области частот $\Omega_2 < \lambda_1$ в том же смысле, что и выражения (2.2) для $\Omega_2 < \Omega_2^*$.

В совокупности ограничения, налагаемые на решения (2.2) и (2.3), показывают, что для неосесимметричного деформирования цилиндра вектор смещений $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{u}^{(2)}$ может быть использован для решения граничной задачи (2.1) только в диапазоне $0 < \Omega_2 < \Omega_2^*$, поскольку $\Omega_2^* < \lambda_1$.

Вычисление исходя из (2.2) и (2.3) соответствующих компонентов тензора напряжений и выполнение граничных условий (2.1) приводит к бесконечной системе линейных интегроалгебраических уравнений относительно $X(\gamma)$, $Z(\gamma)$, Y_j :

$$\begin{aligned} -X(\gamma)P + Z(\gamma)nM + \sum_{j=1}^{\infty} Y_j \left[\left(\frac{2\gamma^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} - \frac{2\gamma^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_j^2} \right) - \frac{\Omega_0^2(\Omega_2^2 - 2n^2)}{\lambda_j^2(\lambda_j^2 + q_1^2)} \right] &= 0 \\ X(\gamma)nN + Z(\gamma)Q + 2n \sum_{j=1}^{\infty} \frac{Y_j}{\lambda_j^2} \left(\frac{\gamma^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} - \frac{\gamma^2}{\lambda_j^2 + q_2^2} + \frac{\Omega_0^2 \Omega_1^2}{\lambda_j^2 + q_1^2} \right) &= 0 \\ Y_j \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_j^2} \right) \Delta_j + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ X(\gamma) \left[\frac{2\lambda_j^2}{\gamma^2 + p_1^2} - \frac{2\lambda_j^2}{\gamma^2 + p_2^2} + \frac{\Omega_0^2 \Omega_2^2}{\gamma^2(\gamma^2 + p_1^2)} \right] + \right. \\ \left. + Z(\gamma)n \left[\frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + p_2^2} - \frac{\gamma^2 + \Omega_0^2}{\gamma^2 + p_1^2} \right] \right\} d\gamma = \frac{f_j}{\pi} \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_j^2} \right) & \quad (2.4) \\ \Omega_0^2 = \frac{\nu \Omega_1^2}{1 - 2\nu}, \quad \Delta_j = p_2 - \frac{(\lambda_j^2 + p_2^2)^2}{4\lambda_j^2 p_1} & \end{aligned}$$

$$f(r) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \frac{J_n(\lambda_j r)}{J_n(\lambda_j)}$$

где P , Q , M , N определяются по (1.8). Отметим, что из первых двух уравнений (2.4) и выражений для P и N следует, что $X(\gamma) = O(\gamma^2)$, $Z(\gamma) = O(1)$ при $\gamma \rightarrow 0$ и, следовательно, интеграл в третьем уравнении системы, а также выражения для смещения (2.2) не имеют особенности при $\gamma = 0$.

3. Ниже кратко описан алгоритм решения бесконечной системы (2.4) и проведен анализ волнового поля в полубесконечном цилиндре. Опыт решения подобных систем [21] показывает, что достоверные данные о характере напряженно-деформированного состояния цилиндра, включая и угловую окружность $r=1, z=0$, удается получить, основываясь на знании поведения неизвестных при больших значениях γ и j . Аналогично [21] доказывається, что для неизвестных в бесконечной системе (2.4) справедливы равенства

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} X(\gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} Y_j = a_0 = \text{const}, \quad \lim_{\gamma \rightarrow \infty} Z(\gamma) \gamma^4 = \text{const} \quad (3.1)$$

Соотношения (3.1) существенно используются как при редукции бесконечной системы (2.4), так и при вычислении напряжений на границе. При переходе от (2.4) к конечной системе, с учетом (3.1) полагаем $Y_j = Y_J$ ($j > J$).

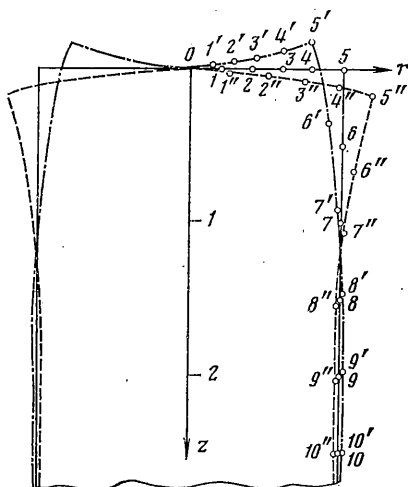
Далее, определим из первых двух уравнений (2.4) плотности $X(\gamma)$ и $Z(\gamma)$ через значения Y_j ($j=1, 2, \dots, J$). Последующая подстановка в третье уравнение приводит к конечной системе уравнений для неизвестных Y_j . Ее коэффициенты представляют интегралы на бесконечном промежутке. Обычная процедура использования асимптотики подынтегральных выражений позволяет свести задачу вычисления таких интегралов к численному интегрированию на конечном интервале $(0, T)$. Критерием для выбора конкретных величин J и T является требуемая точность удовлетворения граничным условиям. Важно, что решение полученной таким образом конечной системы доставляет значения не только первых неизвестных Y_j , но и дает возможность определить значение a_0 , т. е., по существу, всей бесконечной последовательности коэффициентов рядов (2.3). Один из путей использования этой возможности основан на привлечении соотношения (3.1), которое при $j > J$ трактуется как равенство $a_0 = Y_J$.

Более эффективный путь, учитывающий тесную связь между значением a_0 и характеристиками напряженного состояния в окрестности торца, состоит в использовании известной разности напряжений $\sigma_r - \sigma_z$ при $r=1, z=0$, заданной граничными условиями. Непосредственная организация процесса вычислений полностью аналогична изложенной в [19, 21] методике решения родственных задач теории упругости.

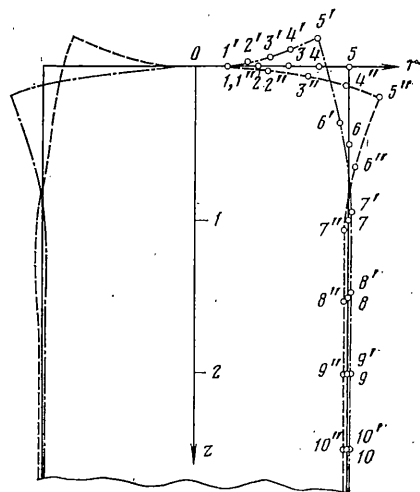
Динамическое поведение полубесконечного цилиндра изучалось для случаев $n=2$ и $n=3$ при $\nu=0,3317, f_j=\delta_{1j}$. При решении конечной системы выбиралось $J=7$, а численное интегрирование проводилось методом Гаусса для $T=50$. При этом интервал $(0,50)$ разбивался на два подынтервала $(0,10)$ и $(10,50)$ и число узлов принималось 24 и 10 соответственно. Это обстоятельство связано с весьма сильной изменчивостью подынтегральных функций при $\gamma < 10$. Увеличение J и T , а также числа узлов интегрирования не приводило к существенным изменениям значений искомых величин Y_j и a_0 . Вычисление интегралов, входящих в выражения для смещений и напряжений, проводилось методом Филона из-за наличия в подынтегральных функциях осциллирующих множителей вида $\cos \gamma z$.

Анализ результатов расчета для $n=2$ ($\Omega_2^* = 2,31$) показывает, что при изменении частоты от $\Omega_2 = 2,13$ до $\Omega_2 = 2,14$ происходит скачкообразное изменение фазы (знака) всех характеристик напряженно-деформированного состояния. Кроме того, при подходе, например, снизу к частоте $\Omega_2 = 2,13$ все величины обнаруживают тенденцию к неограниченному возрастанию. Именно по таким признакам и устанавливается наличие резонанса при рассмотрении вынужденных колебаний идеально упругих тел. В случае $n=3$ ($\Omega_2^* = 3,52$) аналогичное поведение обнаруживается при переходе частоты от $\Omega_2 = 3,26$ до $\Omega_2 = 3,27$.

Полученные результаты показывают, что определитель бесконечной системы (2.4) при $\Omega_2 = \Omega_2^{(e)} < \Omega_2^*$ обращается в нуль и, следовательно, полубесконечный упругий цилиндр при неосесимметричных типах движений имеет собственную частоту. Примечательно, что, как и в осесимметричном случае [10], первое наблюдение соответствующего ей краевого резонанса в конечном цилиндре было выполнено в экспериментальной работе [12]. В ней отмечалось, что частота краевой моды является первой в спектре собственных частот длинного цилиндра при $n=2, 3$. Однако этот факт не сопоставляется с фактом отсутствия на данной частоте бегущих и существованием системы стоячих нераспространяющихся волн в цилиндре.



Фиг. 3



Фиг. 4

Кинематические характеристики краевого резонанса в полубесконечном цилиндре представлены на фиг. 3, 4. На фиг. 3, отвечающей случаю $n=2$, показана при $\Omega_2=2,13$ форма сечений $\theta=0, \pi$ в окрестности торца цилиндра для равновесного состояния (сплошная линия) и для моментов максимального отклонения от положения равновесия (штриховая и штрихпунктирная линии). Для представления о векторе смещений одинаковыми цифрами отмечены положения точек границ в указанные моменты времени. Аналогичная картина для $n=3$ и $\Omega_2=3,26$ показана на фиг. 4. Видно, что движение в цилиндре существенно локализовано вблизи торца, причем при $n=3$ степень локализации несколько выше.

Следует также обратить внимание на слабую зависимость собственной частоты $\Omega_2^{(e)}$ от коэффициента Пуассона. Так, например, для $n=2, \nu=0$ она заключена в интервале 2,08–2,09. В определенной мере это можно объяснить незначительным изменением общего характера поведения дисперсионного спектра бесконечного цилиндра при $n \geq 2$ с изменением ν . В осесимметричном случае, напротив, частота краевого «резонанса» сильно зависит от ν , уменьшаясь от $\Omega_2^{(e)}=3,006$ при $\nu=-0,3317$ [6] до $\Omega_2^{(e)}=2,364$ при $\nu=0$ [20], причем наряду с этим резко уменьшается и критическая частота Ω_2^* .

Большое значение для проявления краевого резонанса в полубесконечном цилиндре имеет тип граничных условий на торце, которые существенно влияют на характер волнового поля. В противоположность рассмотренному выше случаю в напряжениях условия скользящей заделки ($u_z=\tau_{zr}=\tau_{z\theta}=0$ или $\sigma_z=u_r=u_\theta=0$) не порождают столь специфической формы колебаний. Исследование условий жесткой заделки ($u_r=u_\theta=u_z=0$) торца с целью выяснения возможности существования краевого резонанса представляет самостоятельную и достаточно сложную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Оливер А. Волноводы для поверхностных акустических волн: Обзор.— Тр. Ин-та инж. по электротехнике и радиоэлектронике, 1976, т. 64, вып. 5, с. 51–65.
2. Микер Т., Мейтцлер А. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинках.— В кн.: Физическая акустика. Т. 1, ч. А. М.: Мир, 1966, с. 140–203.
3. Викторов И. А. Физические основы применения ультразвуковых волн Рэля и Лэмба в технике. М.: Наука, 1966. 168 с.
4. McNiven H. D., McCoy J. J. Vibrations and waves propagation in rods.— In: R. D. Mindlin and applied mechanics. New York: Pergamon press, 1974, p. 197–225.
5. Thurston R. N. Elastic waves in rods and clad rods.— J. Acoust. Soc. Amer., 1978, v. 64, No. 1, p. 1–37.
6. Zemanek J. An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder.— J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 51, No. 1, pt 2, p. 265–283.
7. Костюченко А. Г., Оразов М. Б. Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней квадратичные пучки.— Тр. семинара им. И. Г. Петровского: Сб. статей. М.: Изд-во МГУ, 1981, вып. 6, с. 97–146.
8. Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн.— Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн: Сб. статей. Л.: Наука, 1978, вып. 18, с. 3–248.

9. *Зарецкий-Феокистов Г. Г.* Об одном случае колебаний плоского слоя и цилиндрического стержня.— Механика стержневых систем и сплошных сред. Сб. статей. Л.: Изд-во Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1979, вып. 12, с. 74—82.
10. *Oliver J.* Elastic wave dispersion in a cylindrical rod by a wide-band, short-duration pulse technique.— J. Acoust. Soc. Amer., 1957, v. 29, No. 2, p. 189—194.
11. *Booker R. E., Sagar F. H.* Velocity dispersion of the lowest-order longitudinal mode in finite rods of circular cross section.— J. Acoust. Soc. Amer., 1971, v. 49, No. 5, pt 2, p. 1491—1498.
12. *McMahon G. W.* Experimental study of vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders.— J. Acoust. Soc. Amer., 1964, v. 36, No. 1, p. 87—94.
13. *McNiven H. D., Perry D. C.* Axially symmetric waves in finite, elastic rods.— J. Acoust. Soc. Amer., 1962, v. 34, No. 4, p. 433—437.
14. *Hutchinson J. R.* Axisymmetric vibrations of free finite — length rod.— J. Acoust. Soc. Amer., 1972, v. 51, No. 1, pt 2, p. 233—240.
15. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Осесимметричные колебания упругого цилиндра конечной длины.— Акуст. ж., 1978, т. 24, вып. 6, с. 861—866.
16. *McNiven H. D.* Extensional waves in a semi-infinite elastic rod.— J. Acoust. Soc. Amer., 1961, v. 33, No. 1, p. 23—27.
17. *Miller G. K.* Axisymmetric stress wave propagation across the common end face between two semi-infinite cylinders, solid to fluid.— J. Acoust. Soc. Amer., 1968, v. 44, No. 4, p. 1040—1051.
18. *Maxwell G. G., Nixon E. L.* Acoustic radiation from a long solid rod into a semiinfinite liquid medium.— J. Acoust. Soc. Amer., 1973, v. 53, No. 1, p. 88—95.
19. *Гринченко В. Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. К.: Наук. думка, 1981. 284 с.
20. *Мелешко В. В.* О краевом резонансе при осесимметричных колебаниях полубесконечного упругого цилиндра.— Докл. АН УССР, 1979, вып. 11, с. 920—924.
21. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. К.: Наук. думка, 1978. 264 с.
22. *Улитко А. Ф.* Метод собственных вектор-функций в пространственных задачах теории упругости. К.: Наук. думка, 1979. 261 с.

Киев

Поступила в редакцию
20.I.1981