

УДК 539.3.01

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОСЫ С ОДНИМ ИЛИ ДВУМЯ
 УПРУГОПОДКРЕПЛЕННЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

МИРОНЕНКО Н. И.

Полоса с одним, двумя или бесконечным рядом круговых свободных или жестко подкреплённых отверстий исследовалась в [1-3] и других работах¹, где условия по краям полосы (за исключением [2]) выполняются в некотором числе точек.

В данной работе при помощи методики, развитой в [4, 5], исследуется напряжённое состояние полосы с одним или двумя круговыми отверстиями, подкреплёнными упругими кольцами. Дан численный анализ для двух случаев, когда подкрепляющие кольца более «жесткие» или «мягкие», чем полоса.

1. Исследуем напряжённое состояние полосы, испытывающей равномерное растяжение N_x, N_y (см. фигуру, на которой указаны необходимые размеры и обозначения). Функцию, описывающую силовое взаимодействие полосы и колец, разложим на $L_j^{(1)}$ ($j=1, 2$) в ряд Фурье. Тогда, используя потенциалы Колосова — Мусхелишвили

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= \Gamma z + \varphi_{01}(z), \quad \psi_0(z) = \Gamma' z + \psi_{01}(z) \\ \Gamma &= 1/4(N_x + N_y), \quad \Gamma' = -1/2(N_x - N_y) \end{aligned} \quad (1.1)$$

граничные условия можно представить в виде

$$\varphi_{01}'(t) + \overline{\varphi_{01}'(t)} + t\overline{\varphi_{01}''(t)} + \overline{\psi_{01}'(t)} = 0 \text{ при } t = x \pm ia \quad (1.2)$$

$$\varphi_0(t) + \overline{t\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \sigma_{hj} \left(\frac{t-b_j}{R} \right)^h \text{ на } L_j^{(1)} \quad (j=1, 2)$$

Здесь неизвестные коэффициенты Фурье σ_{hj} — действительные величины, удовлетворяющие условию $\sigma_{h2} = (-1)^{h+1} \sigma_{h1}$, $b_1 = -b_2 = b$.

Подставим (1.1) во второе из условий (1.2)

$$\varphi_{01}(t) + \overline{t\varphi_{01}'(t)} + \overline{\psi_{01}(t)} = 2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} \delta_{hj}^* \left(\frac{t-b_j}{R} \right)^h \text{ на } L_j^{(1)} \quad (j=1, 2) \quad (1.3)$$

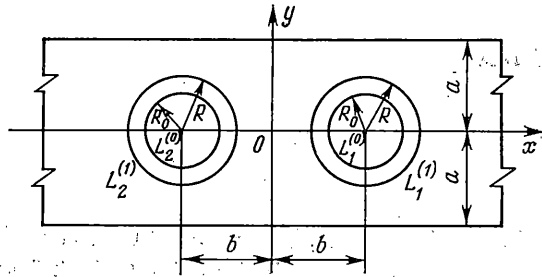
$$2\delta_{1j}^* = \sigma_{1j} - 2\Gamma R, \quad 2\delta_{hj}^* = \sigma_{hj} \quad (h=0, h \geq 2); \quad 2\delta_{-1,j}^* = \sigma_{-1,j} - \Gamma' R, \quad 2\delta_{-h,j}^* = \sigma_{-h,j} \quad (h \geq 2)$$

Используя далее метод [6], введем на $L_j^{(1)}$ ($j=1, 2$) новую неизвестную функцию

$$2\omega(t) = \varphi_{01}(t) - \overline{t\varphi_{01}'(t)} - \overline{\psi_{01}(t)}$$

¹ См. также Гулик В. И., Космодамианский А. С. Действие сосредоточенных сил на бесконечную полосу с круговым отверстием. Донецк: Донецкий ун-т, 1974. — 22 с. Деп. в ВИНТИ 27.02.74; № 423-74.

Упругое равновесие бесконечного ряда круговых отверстий рассматривал, например, Колоеров С. А. (Растяжение полосы с бесконечным рядом круговых колец. Донецк: Донецкий ун-т, 1973. — 17 с. Деп. в ВИНТИ 16.01.74; № 69-74.)



что дает возможность [4-6] построить функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в сплошной полосе

$$\varphi(z) = \varphi_{01}(z) - \sum_{j=1}^2 \left\{ \varphi_j^*(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \delta_{-h,j}^* \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^h \right\} \quad (1.4)$$

$$\psi(z) = \psi_{01}(z) - \sum_{j=1}^2 \left\{ \psi_j^*(z) + \sum_{h=1}^{\infty} \nu_{-h,j} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^h \right\} \quad (z \in S_0)$$

$$\varphi(z) = - \sum_{j=1}^2 \varphi_j^*(z) + \sum_{h=0}^{\infty} \delta_{hn}^* \left(\frac{z-b_n}{R} \right)^h - \sum_{h=1}^{\infty} \delta_{-h,n+1}^* \left(\frac{R}{z-b_{n+1}} \right)^h \quad (1.5)$$

$$\psi(z) = - \sum_{j=1}^2 \psi_j(z) + \sum_{h=0}^{\infty} \nu_{hn} \left(\frac{z-b_n}{R} \right)^h - \sum_{h=1}^{\infty} \nu_{-h,n+1} \left(\frac{R}{z-b_{n+1}} \right)^h \quad (z \in S_n)$$

$$\nu_{kj} = \delta_{-k,j}^* - (k+1) (b_j/R) \delta_{h+1,j}^* - (k+2) \delta_{h+2,j}^* \quad (k \geq 0)$$

$$\nu_{-k,j} = \delta_{h,j}^* + (k-1) (b_j/R) \delta_{-(k-1),j}^* + (k-2) \delta_{-(k-2),j}^* \quad (k \geq 2)$$

$$\nu_{-1,j} = 0, \quad \nu_{k2} = (-1)^{k+1} \nu_{k1}, \quad b_3 = b_1, \quad \delta_{-k,3}^* = \delta_{-k,1}^*, \quad \nu_{-k,3} = \nu_{-k,1}, \quad (n=1,2)$$

Здесь S_0 — трехсвязная область полосы, S_1, S_2 — области внутри правой ($L_1^{(1)}$) и левой ($L_2^{(1)}$) окружностей соответственно, ν_{kj} — действительные коэффициенты.

Потенциалы $\varphi_j^*(z)$ и $\psi_j^*(z)$ выражаются интегралами

$$\varphi_j^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{\omega(t) dt}{t-z}, \quad \psi_j^*(z) = - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \frac{\overline{\omega(t)} - \bar{t}\omega'(t)}{t-z} dt$$

В этих и других интегралах по окружностям обход контуров совершается в направлении движения часовой стрелки. Используя разложение на $L_j^{(1)}$ функции $\omega(t)$ в ряд Фурье, из этих формул получим

$$\varphi_j^*(z) = - \sum_{h=0}^{\infty} \alpha_{hj} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{h+1}, \quad \psi_j^*(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_{hj}^{(1)} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{h+1} \quad (z \in S_0) \quad (1.6)$$

$$\varphi_j^*(z) = - \sum_{h=0}^{\infty} \beta_{hj} \left(\frac{z-b_j}{R} \right)^{h+1} + \alpha_{-1,j}, \quad \psi_j^*(z) = \sum_{h=-1}^{\infty} \gamma_{hj}^{(2)} \left(\frac{z-b_j}{R} \right)^{h+1} \quad (z \in S_j)$$

где α_{hj} и β_{hj} — коэффициенты Фурье для функции $\omega(t)$:

$$\alpha_{k,j} = \frac{R^{-k-1}}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \omega(t) (t-b_j)^k dt, \quad \beta_{kj} = \frac{R^{-k-1}}{2\pi i} \int_{L_j^{(1)}} \overline{\omega(t)} (t-b_j)^k dt, \quad \gamma_{0j}^{(1)} = -2\beta_{0j}$$

$$\gamma_{kj}^{(1)} = -\beta_{kj} - k \frac{b_j}{R} \alpha_{k-1,j} - (k-1) \alpha_{k-2,j} \quad (k \geq 1)$$

$$\gamma_{kj}^{(2)} = -\alpha_{kj} + (k+2) \frac{b_j}{R} \beta_{k+1,j} + (k+3) \beta_{k+2,j} \quad (k \geq -1)$$

Подставим теперь соотношения (1.6) в (1.4)

$$\varphi_{01}(z) = \varphi(z) - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{kj}^* \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{k+1} \quad (1.7)$$

$$\psi_{01}(z) = \psi(z) - \sum_{j=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{kj}^{(1)} \left(\frac{R}{z-b_j} \right)^{k+1} \quad (z \in S_0)$$

$$\alpha_{kj}^* = \alpha_{kj} - \delta_{-(k+1),j}^*, \quad \beta_{0j}^* = 2\beta_{0j}, \quad \beta_{kj}^* = \beta_{kj} - \delta_{k+1,j}^* \quad (k \geq 1), \quad \beta_{0j}^{(1)} = \beta_{0j}^*$$

$$\beta_{kj}^{(1)} = \beta_{kj}^* + k(B_j/R) \alpha_{k-1,j} + (k-1) \alpha_{k-2,j} \quad (k \geq 1)$$

$$\alpha_{k2}^* = (-1)^k \alpha_{k1}^*, \quad \beta_{k2}^* = (-1)^k \beta_{k1}^*, \quad \overline{\alpha_{kj}^*} = \alpha_{kj}^*, \quad \overline{\beta_{kj}^*} = \beta_{kj}^*$$

Тем самым получено выражение для искомых потенциалов $\varphi_{01}(z)$ и $\psi_{01}(z)$ через функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, аналитические в сплошной полосе. Для определения последних необходимо подставить (1.7) в первое из условий (1.2); решая полученную граничную задачу (для сплошной полосы), находим [5]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) \\ \psi(z) \end{aligned} \right\} = \mp j \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} H_1(\lambda) \\ (1-i\lambda z) H_1(\lambda) + 2H_2(\lambda) \end{aligned} \right\} e^{-i\lambda z} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (1.8)$$

$$H_1(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\mu) \{ \alpha_j^* [a_j(\mu) + 2\gamma(\mu)] - \beta_j^* \}$$

$$H_2(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(\mu) \{ \alpha_j^* [2\mu^2 - a_j(\mu) q(\mu)] + \beta_j^* q(\mu) \}$$

$$T_j(\mu) = \frac{1}{j!} \frac{(\varepsilon_1 \mu)^{j+1}}{2\mu + \operatorname{sh} 2\mu} \cos \left(j \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2 \mu \right), \quad a_j(\mu) = j + \frac{\varepsilon_1^2 \mu^2}{j+2}$$

$$2\gamma(\mu) = 1 - 2\mu + e^{-2\mu}, \quad q(\mu) = 1 - \gamma(\mu)$$

$$\varepsilon_1 = R/a, \quad \varepsilon_2 = b/a, \quad \alpha_j^* = \alpha_{j1}^*, \quad \beta_j^* = \beta_{j1}^*$$

Заметим, что $H_j(\lambda)$ — четные функции, поэтому здесь указаны их выражения только для $\mu = \lambda a > 0$.

Для определения коэффициентов α_j^* и β_j^* построим [5] бесконечную систему линейных алгебраических уравнений. Вычисляя производные m -го порядка (в точке $z = b_1$) от выражений (1.5) и используя формулы (1.8), получим систему, которая в окончательном виде выглядит так:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^* x_j = s_k \quad (k=1,2,3,\dots), \quad s_k = -2\delta_{-1/2(k+1)}^* \quad (k=1,3,5,\dots), \quad (1.9)$$

$$s_k = -2\tau_{k/2} \delta_{k/2}^* \quad (k=2,4,6,\dots)$$

$$x_{2n+1} = \alpha_n^*, \quad x_{2n+2} = \beta_n^*, \quad \delta_{\pm n}^* = \delta_{\pm n,1}^*, \quad \tau_1 = 1/2, \quad \tau_{n \geq 2} = 1$$

Коэффициенты a_{kj}^* этой системы имеют вид (δ_{mn} — символ Кронекера):

$$a_{2m+1,2n+1}^* = \delta_{mn} - J_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(1)}, \quad a_{2m+2,2n+2}^* = \tau_{n+1} \delta_{mn} - J_{mn}^{(2)} \quad (1.10)$$

$$a_{2m+1,2n+2}^* = J_{mn}^{(3)} + A_{mn}^{(2)}, \quad a_{2m+2,2n+1}^* = J_{mn}^{(4)} + A_{mn}^{(2)}$$

$$J_{mn}^{(1)} = \int_0^\infty T_{mn}(\mu) \{4\mu^2 + 2\gamma(\mu) [2 + a_m(\mu) + a_n(\mu)] + a_m(\mu)a_n(\mu)\} d\mu$$

$$J_{mn}^{(2)} = \int_0^\infty T_{mn}(\mu) d\mu, \quad J_{mn}^{(3)} = \int_0^\infty T_{mn}(\mu) f_m(\mu) d\mu \quad (m, n=0, 1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

$$J_{mn}^{(4)} = \int_0^\infty T_{mn}(\mu) f_n(\mu) d\mu, \quad f_i(\mu) = a_i(\mu) + 2\gamma(\mu)$$

$$A_{mn}^{(1)} = (n+1) e_{mn} \left[\left(\frac{\varepsilon_3}{2} \right)^2 C_{r+3}^{m+2} - C_{r+1}^{m+1} \right], \quad C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}$$

$$A_{mn}^{(2)} = e_{mn} C_r^{m+1}, \quad e_{mn} = (\varepsilon_3/2)^{r+1} \cos r\pi \quad (r=m+n+1), \quad \varepsilon_3=R/b$$

$$T_{mn}(\mu) = \frac{2\varepsilon_1^{r+1}}{(m+1)!n!} \frac{\mu^r}{2\mu + \text{sh } 2\mu} \cos \left(m \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\mu \right) \cos \left(n \frac{\pi}{2} + \varepsilon_2\mu \right)$$

2. Правые части в полученной системе (1.9) неизвестны. Для их определения необходимо рассмотреть напряженно-деформированное состояние подкрепляющих колец и их взаимодействие с полосой. В силу симметрии достаточно рассмотреть правое кольцо.

Потенциалы Колосова — Мухелишвили для колец примем в виде

$$\varphi_{1j}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(j)} \left(\frac{z-b_j}{R} \right)^k, \quad \psi_{1j}(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(j)} \left(\frac{z-b_j}{R} \right)^k \quad (2.1)$$

где $a_k^{(j)}$ и $b_k^{(j)}$ — действительные величины, связанные для правого ($j=1$) и левого ($j=2$) колец зависимостями $a_k^{(2)} = (-1)^k a_k^{(1)}$, $b_k^{(2)} = (-1)^k b_k^{(1)}$.

Выпишем граничные условия для правого кольца, предполагая, что по внутренним окружностям $L_j^{(0)}$ оба кольца нагружены равномерным растяжением P . На окружности $L_1^{(1)}$:

$$\varphi_{11}(t) + t\overline{\varphi_{11}'(t)} + \overline{\psi_{11}(t)} = P(t-b) \quad (2.2)$$

На окружности $L_1^{(1)}$ имем два условия

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \varphi_{11}(t) + t\overline{\varphi_{11}'(t)} + \overline{\psi_{11}(t)} \quad (2.3)$$

$$\kappa_0\varphi_0(t) - t\overline{\varphi_0'(t)} - \overline{\psi_0(t)} = \frac{\mu_0}{\mu_1} (\kappa_1\varphi_{11}(t) - t\overline{\varphi_{11}'(t)} - \overline{\psi_{11}(t)}) \quad (2.4)$$

$$\kappa_j = (3 - \sigma_j) / (1 + \sigma_j)$$

где μ_0 , σ_0 и μ_1 , σ_1 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона для полосы и кольца соответственно. Заметим, что условия (2.2) и (2.3) написаны с точностью до постоянных слагаемых.

Подставляя (2.1) в (2.2), выразим $b_k^{(1)}$ через $a_k^{(1)}$:

$$b_k^{(1)} = \delta_{-k,1} V - \varepsilon_4^{-2k} a_{-k}^{(1)} - (k+1) \varepsilon_3^{-1} a_{k+1}^{(1)} - (k+2) \varepsilon_4^2 a_{k+2}^{(1)} \quad (2.5)$$

$$V = \varepsilon_4 P R_0, \quad \varepsilon_4 = R_0/R \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Далее, используя второе из условий (1.2), формулы (2.1), (2.5) и граничное условие (2.3), получим

$$\sigma_{k1} = q_k a_k^{(1)} - (k-2) q_1 a_{-k+2}^{(1)} + \delta_{k1} V, \quad q_k = 1 - \varepsilon_4^{2k} \quad (2.6)$$

На основании формул (2.4), (2.1), (1.1), (1.7) и (1.8) будем иметь

$$e_k a_k^{(1)} + (k-2) q_1 a_{-k+2}^{(1)} = \eta_0 A_k^* + \delta_{k1} V \quad (2.7)$$

$$e_k = \varkappa_1 + \varepsilon_4^{2k}, \quad \eta_0 = \mu_1 / \mu_0$$

Заменив в (2.7) k на $(-k+2)$, получим второе уравнение, рассмотрев которое совместно с (2.7), находим

$$a_k^{(1)} = f_k^{(1)} A_k^* - f_k^{(2)} A_{-k+2}^* + \delta_{k1} V / (e_1 - q_1) \quad (2.8)$$

$$f_k^{(1)} = \eta_0 e_{-k+2} / D_k, \quad f_k^{(2)} = (k-2) \eta_0 q_1 / D_k \quad (2.9)$$

$$D_k = k(k-2) q_1^2 + e_k e_{-k+2}$$

$$A_k^* = H_k^{(0)} + \sum_{j=0}^{\infty} (H_{kj}^{(1)} \alpha_j^* + H_{kj}^{(2)} \beta_j^*)$$

$$H_{-1}^{(0)} = -\Gamma' R, \quad H_0^{(0)} = b[(\varkappa_0 - 1)\Gamma - \Gamma']$$

$$H_1^{(0)} = (\varkappa_0 - 1)\Gamma R, \quad H_k^{(0)} = 0 \quad (k = \pm 2, \pm 3, \dots)$$

Матрицы $H_{kj}^{(1)}$, $H_{kj}^{(2)}$ имеют вид

$$H_{-(m+1),n}^{(1)} = -\varkappa_0 \delta_{mn} - J_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(1)}, \quad H_{m+1,n}^{(1)} = -p_{m+1} (J_{mn}^{(1)} + A_{mn}^{(2)}) \quad (2.10)$$

$$H_{-(m+1),n}^{(2)} = J_{mn}^{(3)} + A_{mn}^{(2)}, \quad p_1 = \varkappa_0 - 1, \quad p_{k \geq 2} = \varkappa_0,$$

$$H_{m+1,n}^{(2)} = \delta_{mn} + p_{m+1} J_{mn}^{(2)} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$H_{0,n}^{(1)} = -J_{-1,n}^{(1)} + A_{-1,n}^{(1)} - \varkappa_0 (J_{-1,n}^{(2)} + A_{-1,n}^{(2)})$$

$$H_{0,n}^{(2)} = \varkappa_0 J_{-1,n}^{(2)} + J_{-1,n}^{(3)} + A_{-1,n}^{(2)}$$

Правые части здесь определяются формулами (1.11). Подставляя (2.8)–(2.10), (1.11) в (2.6), выразим $\sigma_k^* \equiv \sigma_{k1}$ через α_j^* и β_j^*

$$\sigma_k^* = F_k + \sum_{j=0}^{\infty} (F_{kj}^{(1)} \alpha_j^* + F_{kj}^{(2)} \beta_j^*) + \delta_{k1} L \quad (2.11)$$

$$F_k = \Phi_k^{(1)} H_k^{(0)} + \Phi_k^{(2)} H_{-k+2}^{(0)}, \quad L = \frac{1 + \varkappa_1}{e_1 - q_1} V$$

$$F_{kj}^{(1)} = \Phi_k^{(1)} H_{kj}^{(1)} + \Phi_k^{(2)} H_{-k+2,j}^{(1)}, \quad F_{kj}^{(2)} = \Phi_k^{(1)} H_{kj}^{(2)} + \Phi_k^{(2)} H_{-k+2,j}^{(2)}$$

$$\Phi_k^{(1)} = q_k f_k^{(1)} + (k-2) q_1 f_{-k+2}^{(2)}, \quad \Phi_k^{(2)} = -(k-2) f_{-k+2}^{(1)} - q_k f_k^{(2)}$$

Рассмотрим систему (1.9). Правые части ее выражены через δ_j^* , а последние, в свою очередь, — через σ_j^* согласно (1.3). Поэтому подставим (2.11) в (1.3), а результат — в выражения для правых частей (1.9). Это приводит к следующему:

$$s_k = g_k - \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^{**} x_j \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (2.12)$$

$$g_1 = \Gamma' R - F_{-1}, \quad g_2 = \Gamma R - 1/2(L + F_1), \quad g_3 = -F_3, \quad g_{h \neq 1, 2, 6} = 0$$

$$a_{2m+1, 2n+1}^{**} = \Phi_{-(m+1)}^{(1)} H_{-(m+1), n}^{(1)} + \Phi_{-(m+1)}^{(2)} H_{m+3, n}^{(1)}$$

$$a_{2m+2, 2n+2}^{**} = \tau_{m+1} (\Phi_{m+1}^{(1)} H_{m+1, n}^{(2)} + \Phi_{m+1}^{(2)} H_{-m+1, n}^{(2)})$$

(2.13)

$$a_{2m+2, 2n+1}^{**} = \tau_{m+1} (\Phi_{m+1}^{(1)} H_{m+1, n}^{(1)} + \Phi_{m+1}^{(2)} H_{-m+1, n}^{(1)})$$

$$a_{2m+1, 2n+2}^{**} = \Phi_{-(m+1)}^{(1)} H_{-(m+1), n}^{(2)} + \Phi_{-(m+1)}^{(2)} H_{m+3, n}^{(2)} \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots)$$

Окончательная система уравнений для определения α_j^* и β_j^* получается подстановкой (2.12) в (1.9)

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} x_j = g_k, \quad a_{kj} = a_{kj}^* + a_{kj}^{**} \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

Решением этой системы, очевидно, заканчивается решение задачи, ибо, зная потенциалы Колосова — Мусхелишвили, можно определить и напряжения.

Используя формулы (1.10), (2.13) и (1.11), нетрудно показать что полученная система является как минимум квазирегулярной. Поэтому к ее решению можно применять методы, разработанные для таких систем. В данном случае система просто «усекалась» до требуемого числа неизвестных в зависимости от параметра $\varepsilon_1 = R/a$.

Из полученных выше формул для потенциалов Колосова — Мусхелишвили (случай двух подкрепленных отверстий) можно получить соответствующие потенциалы в случае одного отверстия. Для этого достаточно начало координат перенести в центр правого отверстия, учесть требования, которые налагаются при этом на потенциалы, провести предельный переход, устремляя левое отверстие в бесконечность ($b \rightarrow \infty$). Следует отметить, что в этом случае $\alpha_j^* = \beta_j^* = 0$ при $j=1, 3, 5, \dots$

3. Как уже отмечалось, численный анализ проводился для двух случаев подкрепления. В первом — для полосы были взяты следующие значения упругих характеристик: $\mu_0 = 2,56 \cdot 10^4$ МПа; $\sigma_0 = 0,35$; $\kappa_0 = 1,963$; для подкрепляющих колец: $\mu_1 = 8 \cdot 10^4$ МПа; $\sigma_1 = 0,25$; $\kappa_1 = 2,2$. Поэтому $\eta_0 = \mu_1/\mu_0 = 3,125$.

Во втором — значения соответствующих упругих характеристик менялись местами, и, следовательно: $\eta_0 = 1/3,125 = 0,32$. Во всех случаях $\varepsilon_1 = R/a = 0,5; 0,7; 0,9$; $\varepsilon_2 = R_0/R = 0,6$. Для двух отверстий $\varepsilon_2 = b/a = 1$ (в случае одного отверстия этот параметр отсутствует).

Нагрузка для всех вариантов принималась следующей: внутренние контуры колец свободны ($P=0$), полоса испытывает растяжение по двум направлениям ($N_x = \text{const}, N_y = \text{const}$). Часть полученных результатов сведена в таблицы.

Табл. 1 содержит значения напряжений X_x в перемычке (т. е. в случае двух отверстий в сечении $x=b$; для одного отверстия перемычка принадлежит сечению $x=0$) при $N_x \neq 0, N_y = 0$.

Левая часть таблицы относится к случаю двух отверстий, правая — для случая одного отверстия. Каждой точке l соответствуют две строки: верхняя — для случая $\eta_0 = 3,125$ (подкрепляющие кольца более «жесткие», чем полоса), нижняя — $\eta_0 = 0,32$ (подкрепляющие кольца более «мягкие», чем полоса).

Первые три точки относятся к кольцу, точки $l=3-7$ — к полосе. Ординаты точек следующие: $y_1 = R_0, y_2 = (R_0 + R)/2, y_3 = R$; остальные точки идут с шагом $(a-R)/4$. Значения напряжений даны с точностью до множителя N_x . Из таблицы следует, что максимальные напряжения в полосе при подкреплении последней более «жесткими» кольцами повышаются во много раз (даже в десятки раз), а в случае $\varepsilon_1 = 0,9$ при данном конкретном подкреплении ($\varepsilon_2 = 0,6$; $\eta_0 = 3,125$) полоса в перемычке и некоторой ее окрестности практически не нагружена.

Таблица 1

l	$\varepsilon_1=0,5$	0,7	0,9	$\varepsilon_1=0,5$	0,7	0,9
1	5,416 1,694	5,640 2,121	6,211 3,020	5,439 1,760	5,709 2,245	6,432 3,183
2	2,596 1,059	2,601 1,273	2,482 1,707	2,602 1,090	2,612 1,323	2,487 1,742
3	1,417 0,938	1,301 1,122	0,550 1,397	1,413 0,958	1,279 1,140	0,416 1,359
3	0,605 2,591	0,540 3,184	0,214 4,088	0,604 2,645	0,534 3,225	0,168 3,966
4	0,838 1,800	0,665 2,489	0,182 3,684	0,836 1,811	0,655 2,478	0,128 3,534
5	0,910 1,470	0,706 2,007	0,132 3,311	0,907 1,451	0,692 1,949	0,070 1,131
6	0,919 1,231	0,682 1,580	0,062 2,956	0,916 1,187	0,664 1,475	-0,009 2,746
7	0,876 0,915	0,588 1,097	-0,032 2,612	0,872 0,846	0,566 0,944	-0,111 2,370

Таблица 2

l	$\varepsilon_1=0,5$	0,7	0,9	$\varepsilon_1=0,5$	0,7	0,9
1	0,934	0,769	0,614	1,263	1,945	3,736
2	0,927	0,762	0,617	1,336	1,987	3,750
3	0,901	0,738	0,627	1,452	2,118	3,793
4	0,830	0,694	0,645	1,768	2,348	3,866
5	0,620	0,620	0,673	2,472	2,694	3,973
5	1,426	1,359	1,238	0,929	1,047	1,533
6	2,601	2,581	2,445	1,095	1,279	1,724
7	5,384	5,373	5,004	1,708	1,961	2,507
8	5,428	5,584	5,811	1,809	2,221	2,825
9	2,618	2,659	2,686	1,135	1,355	1,654
10	1,436	1,409	1,315	0,968	1,090	1,206
10	0,621	0,618	0,599	2,615	2,890	3,083
11	0,955	0,904	0,835	1,217	1,278	1,276
12	0,981	0,954	0,917	0,983	0,930	0,853

В табл. 2 даны значения напряжений Y_y в сечении $y=0$ при нагрузке $N_x=0$, $N_y \neq 0$ (случай двух отверстий). Левая часть таблицы соответствует случаю более «жесткого» подкрепления ($\eta_0=3,125$), правая — более «мягкого» подкрепления (по сравнению с полосой, $\eta_0=0,32$). Точки 1–5, 10–12 относятся к полосе, точки 5–10 принадлежат правому подкрепляющему кольцу. Абсциссы этих точек таковы: $x_1=0$, $x_5=a-R$; точки 2, 3, 4 расположены между точками 1 и 5 с шагом $(a-R)/4$; $x_7=a-R_0$, $x_8=a+R_0$, $x_{10}=a+R$; точки 6 и 9 делят толщину кольца пополам; $x_{11}=1,4a+R$, $x_{12}=1,8a+R$.

Значения напряжений в этой таблице даны с точностью до множителя N_y . Напряжения Y_y для случая одного отверстия здесь не приводятся. Но необходимо отметить, что они отличаются от соответствующих значений в табл. 2 не более чем на 5,5%.

Напряжения σ_θ на внутренних контурах колец (в качественном отношении) такие же, как в случае задачи Кирша, т. е. при одноосном нагружении имеются точки, в которых σ_θ растягивающие, а также точки, в которых они сжимающие. На окружности радиуса R (т. е. на линии скрепления) эти напряжения (как в полосе, так и в кольцах) точно такие же в случае более «мягкого» подкрепления; в случае же более «жесткого» подкрепления они при $N_x \neq 0$ ($N_y \neq 0$) и $\varepsilon_1 < 0,9$ во всех точках упомянутой окружности растягивающие.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колоеров С. О., Космодамианський О. С. Наближений метод визначення напруженого стану полоси з круговим отвором.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1972, № 1, с. 65–69.
2. Колоеров С. А., Михайлова Л. Е., Петренко Т. П. Напряженное состояние полосы с двумя круговыми отверстиями.— Теоретическая и прикладная механика: Сб. статей. Киев—Донецк: Вища школа, 1976, вып. 7, с. 88–96.
3. Колоеров С. А., Гуревич З. Л. Напряженное состояние полосы с бесконечным рядом круговых отверстий.— Сопротивление материалов и теория сооружений: Респ. межв. сб. Киев: Будівельник, 1975, вып. 26, с. 48–54.
4. МIRONENKO Н. И. О напряженном состоянии полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными в поперечном направлении.— ПММ, 1978, т. 42, вып. 5, с. 930–935.
5. МIRONENKO Н. И. О напряженном состоянии полосы, ослабленной двумя одинаковыми круговыми отверстиями, расположенными в продольном направлении.— Прикл. механ., 1980, т. 16, № 4, с. 95–100.
6. ШЕРМАН Д. И. О напряженных в весоной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями.— ПММ, 1951, т. 15, вып. 3, с. 297–316.

Алма-Ата

Поступила в редакцию
8.IV.1981