МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 539.375:678.506

О КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В НАПРЯЖЕНИЯХ

ПОБЕДРЯ Б. Е., ХОЛМАТОВ Т.

Дается новая, в том числе вариационная постановка квазистатической задачи нелинейной механики деформируемого твердого тела в напряжениях, которая заключается в решении шести уравнений относительно шести независимых компонент симметричного тензора напряжений при удовлетворении шести граничным условиям. Для изотропной упругой среды установлена положительная определенность «функционала энергии». Доказана эллиптичность поставленной задачи.

1. Уравнения совместности для симметричного тензора малых деформаций ε [1]:

$$\eta_{ij}\equiv\epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}\varepsilon_{kn,\,lm}=0 \tag{1.1}$$

могут быть записаны в виде [2]:

$$H_{ij}\equiv\Delta\varepsilon_{ij}+\theta_{,ij}-\varepsilon_{ik,\,kj}-\varepsilon_{jk,\,ki}+\xi_{ij}(\varepsilon_{kl,\,kl}-\Delta\theta)=0 \tag{1.2}$$

где ξ_{ij} — произвольный симметричный тензор-константа при $\xi=\xi_{ii}\neq2$, а $\theta\equiv\varepsilon_{ii}$.

Уравнения равновесия среды имеют вид

$$S_i=0,\quad S_i\equiv q_i+X_i,\quad q_i\equiv\sigma_{ij,\,j} \tag{1.3}$$

где $\mathbf{X}$ — заданные объемные силы, σ — симметричный тензор напряжений. Пусть связь между напряжениями и деформациями задается в операторном виде $\varepsilon_{ij}=G_{ij}(\sigma)$ и пусть задан линейный вектор-оператор $R_i(\mathbf{S})$, такой, что $R_i(\mathbf{S})\equiv0$ в том и только в том случае, если $\mathbf{S}=0$. Примеры таких операторов предложены А. А. Ильюшиным в [3]. Обозначим

$$R_{ij}(\mathbf{S})\equiv R_{i,\,j}(\mathbf{S})+R_{j,\,i}(\mathbf{S})-\xi_{ij}R_{k,\,k}(\mathbf{S})$$

Квазистатическая задача механики деформируемого твердого тела заключается в решении шести уравнений относительно шести компонент тензора напряжений

$$H_{ij}(\sigma)+R_{ij}(\mathbf{q})+Y_{ij}=0,\qquad Y_{ij}\equiv R_{ij}(\mathbf{X}) \tag{1.4}$$

При этом на границе Σ, ограничивающей объем V, занимаемый телом, заданы граничные условия

$$\sigma_{ij}u_j|_\Sigma=S_i^\circ,\qquad S_i|_\Sigma=0 \tag{1.5}$$

Уравнения (1.4) можно записать в дивергентном виде

$$\begin{gathered}E_{ijk,\,k}(\sigma)+Y_{ij}=0,\\ E_{ijk}\equiv\varepsilon_{ij,\,k}+\delta_{ki}(^1/_2\theta_j-e_j)+\delta_{kj}(^1/_2\theta_i-e_i)+\xi_{ij}(e_k-\theta_k)+\\ +R_i(\mathbf{q})\delta_{jk}+R_j(\mathbf{q})\delta_{ik}-\xi_{ij}R_k(\mathbf{q}),\\ \theta_i\equiv\varepsilon_{kk,\,i},\quad e_i\equiv\varepsilon_{ij,\,j}\end{gathered} \tag{1.6}$$

Тензор градиентов деформаций $\varepsilon_{ij,k}$ можно выразить через тензор E_{ijk}:

$$\varepsilon_{ij,k}=E_{ijk}+\frac{1}{2}\delta_{ki}\left(\frac{\delta_{jm}-\xi_{jm}}{2-\xi}\Theta_m-E_j\right)+\frac{1}{2}\delta_{kj}\left(\frac{\delta_{im}-\xi_{im}}{2-\xi}\Theta_m-E_i\right)+$$

$$+\xi_{ij}\frac{\Theta_k}{2-\xi}+\frac{1}{2}R_i(\mathbf{S})\delta_{kj}+\frac{1}{2}R_j(\mathbf{q})\delta_{ki},\qquad E_i\equiv E_{ikk},\qquad \Theta_i\equiv E_{kki}$$

Предположим, что тензор $E_{ijk}(\sigma)$ является потенциальным [1], т. е. существует такой скалярный оператор Φ, что $E_{ijk}=\partial\Phi/\sigma_{ij,k}$. Тогда можно дать вариационную постановку задачи (1.4), (1.5), варьируя по напряжениям функционал [4]:

$$I=\int\limits_V(\Phi-Y_{ij}\sigma_{ij})\,dV-\int\limits_\Sigma\chi_{ij}\sigma_{ij}\,d\Sigma+$$

$$+\int\limits_\Sigma\left[\frac{1}{2}Aq_iq_i+B\sigma_{ij}n_j\sigma_{ik}n_k+AX_iq_i-BS_i{}^\circ\sigma_{ij}n_j\right]d\Sigma$$

$$\chi_{ij}=E_{ijk}(\sigma)\,n_k$$

где χ_{ij} — тензор «потоков», заданный на поверхности Σ, не варьируется, а считается «замороженным», A и B — постоянные.

Для конкретных сред можно рассмотреть в явном виде виде оператор Φ и установить условия его положительной определенности.

Для изотропной упругой среды уравнения (1.4) принимают вид

$$L_{ijkl}\sigma_{kl}+Y_{ij}=0,\qquad L_{ijkl}\equiv\left[\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}-e\delta_{ij}\delta_{kl})\right]\partial_m\partial_m+$$

$$+\omega\delta_{kl}\partial_i\partial_j+a\frac{1-\omega}{2\omega-1}\delta_{ij}\partial_k\partial_l+\frac{a}{4}(\delta_{ik}\partial_j\partial_l+\delta_{jl}\partial_i\partial_k+\tag{1.7}$$

$$+\delta_{il}\partial_j\partial_k+\delta_{jk}\partial_i\partial_l),\qquad l_{ijkl}\equiv\delta_{ijk}\partial_l+\gamma_{ijk}n_l$$

а граничные условия (1.5) могут быть записаны в виде

$$l_{ijkl}\sigma_{kl}|_\Sigma=N_{ij}\tag{1.8}$$

Символы $\delta_{ijk}=1$, если все индексы одинаковы, иначе они равны нулю; $\gamma_{ijk}=1$, если все индексы различны и равны нулю, если хотя бы два индекса одинаковы. Правые части уравнений (1.7) и (1.8) являются величинами, зависящими от вектора объемных и поверхностных сил

$$Y_{ij}\equiv(1+a)\left[X_{i,j}+X_{j,i}+\frac{\omega+e-1}{1-2\omega}X_{k,k}\delta_{ij}\right]$$

$$N_{ij}\equiv-\delta_{ijk}X_k+\gamma_{ijk}S_k{}^\circ,\qquad \omega\equiv1/(1+\nu)$$

где ν — коэффициент Пуассона, e и a — два произвольных числовых параметра. Заметим, что они получаются из общих уравнений (1.4) или (1.6) конкретизацией операторов R_i и тензора ξ_{ij} (μ — модуль сдвига):

$$R_i(q)=\frac{1+a}{2\mu}q_i,\qquad \xi_{ij}=\frac{\omega+e-1}{2\omega-1}\delta_{ij}$$

Решение задачи (1.4), (1.5) не зависит от выбора операторов R_i и тензора ξ_{ij}. Так, если $\sigma^*(x)$ — решение задачи (1.4), (1.5), то для $\sigma^*(u)$ выполняются уравнения равновесия (1.3) и уравнения совместности (1.1) [2]. Поэтому обращается тождественно в нуль тензор несовместности η, а следовательно, и его девиатор и шаровая часть. Отсюда следует, что при любом тензоре ξ_{ij} из (1.2) имеем $H_{ij}\equiv0$. Кроме того, из (1.4) и (1.3) следует, что $R_i(\sigma^*)\equiv0$ для любого оператора R_i, удовлетворяющего условиям, наложенным на него при его определении. Следовательно, и решение задачи линейной теории упругости (1.7), (1.8) не зависит от выбора постоянных e и a. В частности, при $e=a=0$ уравнения (1.7) превращаются в уравнения Бельтрами — Мичелла.

2. В [4] установлены ограничения, накладываемые на постоянные ν, a, e с тем, чтобы краевая задача (1.7), (1.8) была эллиптической (или коэрцитивной) в смысле работы [5] [1]. В частности, при $e=0$ эти ограничения таковы

$$a\neq-1,\quad \omega\neq{}^1/_2,\quad \omega\neq-1,\quad a\omega/(2\omega-1)>-4 \tag{2.1}$$

Заметим, что оператор-тензор L_{ijkl} является симметричным по паре индексов ij и kl, если

$$a=\omega(1-2\omega)/(\omega+e-1) \tag{2.2}$$

Тогда для исследования положительной определенности выражения $\Phi={}^1/_2E_{ijk}\sigma_{ij,\,k}$ нужно установить условия, при которых будет выполняться неравенство

$$\sigma_{ij,\,k}\sigma_{ij,\,k}+2\omega p_iq_i-ep_ip_i+2aq_iq_i\geqslant0$$

Известно [1], что всякий тензор третьего ранга, симметричный по первым двум индексам, может быть представлен в виде

$$\sigma_{ij,\,k}={}^2/_5p_k\delta_{ij}-{}^1/_{10}(p_i\delta_{kj}+p_j\delta_{ki})-{}^1/_5q_k\delta_{ij}+$$
$$+{}^3/_{10}(q_i\delta_{jk}+q_j\delta_{ik})+{}^1/_3(\epsilon_{hmi}\omega_{jm}+\epsilon_{hmj}\omega_{im})+s_{ijk}$$
$$\omega_{in}=\epsilon_{jkn}\sigma_{ij,\,k}+{}^1/_2\epsilon_{ikn}(q_k-p_k)$$

где ω_{ij} — некоторый девиатор, а s_{ijk} — септор, для которого выполняются условия $s_{ijk}\delta_{ij}=0$, $s_{ijk}\delta_{jk}=0$, $\epsilon_{nkj}s_{ink}=0$.

Тогда достаточно найти условия, при которых

$$({}^2/_5-e)p_ip_i+2(\omega-{}^1/_5)p_iq_i+(2a+{}^3/_5)q_iq_i\geqslant0 \tag{2.3}$$

Неравенства (2.3) будут выполнены, если

$$1-e+2a\geqslant0 \tag{2.4}$$

$$(2-5e)(10a+3)\geqslant(5\omega-1)^2 \tag{2.5}$$

Условия (2.4) при выполнении (2.2) будут удовлетворены в следующих интервалах изменения параметра e:

$$\left.\begin{array}{l}\omega\leqslant\omega_1,\quad \omega_2\leqslant\omega\leqslant1-e,\quad {}^1/_3\leqslant e\leqslant{}^1/_2\\ 1-e\leqslant\omega\leqslant\omega_2\equiv{}^1/_8(3-e)+{}^1/_8\sqrt{(1-3e)(5e-7)}\\ \omega\leqslant\omega_1\equiv{}^1/_8(3-e)-{}^1/_8\sqrt{(1-3e)(5e-7)}\quad ({}^1/_2\leqslant e\leqslant1)\\ \omega_1\leqslant\omega\leqslant\omega_2,\quad \omega\leqslant1-e\quad (1\leqslant e\leqslant{}^7/_5)\\ \omega\leqslant1-e\quad (e\leqslant{}^1/_3,\ e\geqslant{}^7/_5)\end{array}\right. \tag{2.6}$$

Условия (2.5) будут выполнены (при выполнении (2.2)) при следующих значениях e:

$$\left.\begin{array}{l}3e-1\leqslant\omega\leqslant1-e,\quad e\leqslant{}^1/_5\\ 3e-1\leqslant\omega<\omega'\equiv{}^2/_5(2-\sqrt{5e-1})\quad ({}^1/_5\leqslant e\leqslant{}^2/_5)\\ \omega''\equiv{}^2/_5(2+\sqrt{5e-1})\leqslant\omega<1-e\\ \omega'\leqslant\omega\leqslant3e-1,\quad 1-e\leqslant\omega\leqslant\omega''\quad ({}^2/_5\leqslant e\leqslant{}^1/_5)\\ \omega'\leqslant\omega<1-e\quad ({}^1/_2\leqslant e\leqslant1),\\ 3e-1\leqslant\omega\leqslant\omega''\quad ({}^1/_2\leqslant e\leqslant{}^5/_9)\\ \omega''\leqslant\omega\leqslant3e-1\quad (e\geqslant{}^5/_9),\\ 1-e\leqslant\omega\leqslant\omega'\quad (e\geqslant1)\end{array}\right. \tag{2.7}$$

---

[1] См. также [6].

Объединяя (2.6) и (2.7), получим

$$3e-1 \leqslant \omega < 1-e \quad (e \leqslant {}^1/_5)$$
$$3e-1 \leqslant \omega \leqslant \omega', \quad \omega'' \leqslant \omega < 1-e \quad ({}^1/_5 \leqslant e \leqslant {}^2/_5) \tag{2.8}$$

Из (2.8) видно, что при $e=0$ величина Φ будет положительно-определенной при $-1 \leqslant \omega < 1$. Кроме того, в случае выполнения условий (2.2) при $e=0$, как следует из (2.1), задача (1.7), (1.8) будет эллиптической, если $\omega < 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Победря Б. Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1979. 223 с.
2. *Победря Б. Е.* Некоторые общие теоремы механики деформируемого твердого тела.– ПММ, 1979, т. 43, вып. 3, с. 531–541.
3. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
4. *Победря Б. Е.* Новая постановка задачи механики деформируемого твердого тела в напряжениях.– Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 2, с. 295–297.
5. *Agmon S., Douglis A., Nierenberg L.* Estimates near the boundary for solution of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II.– Communs Pura and Appl., Math., 1964, 17, No. 1, p. 35–92.
6. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. М.: Наука, 1968. 575 с.

Москва

Поступила в редакцию
13.II.1981