МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 · 1982

УДК 534.015

ДИСКРЕТНАЯ ЗАДАЧА СИНТЕЗА СИСТЕМЫ СТРУН

ДОЛЬБЕРГ М. Д., ЧУДИНОВИЧ И. Ю.

Как известно, в последние десятилетия появилось множество работ, посвященных так называемой обратной задаче для струны. Отметим здесь лишь работу М. Г. Крейна [1], в которой, в частности, решена задача синтеза струны с бусинками по спектру ее частот. Постановки задач и изложение основных результатов можно найти также в [2, 3]. Естественно поставить задачу синтеза по частотам колебаний более сложных механических систем, которые описываются дифференциальными уравнениями высших порядков или системами дифференциальных уравнений, например балки с сосредоточенными массами, либо системы связанных между собой струн. При этом совершенно не обязательно задавать спектр частот в явном виде, а можно лишь указать матрицу, по собственным значениям которой нужно синтезировать механическую систему. Иначе говоря, заданной матрице A нужно поставить в соответствие матрицу A^* с тем же спектром, обладающую характерными для выбранной механической системы свойствами. Отметим, что в задаче о синтезе струны это означает, что матрица A^* есть матрица Якоби. Переход от матрицы A к матрице A^* осуществляется ортогональным преобразованием, и задача, следовательно, как раз и состоит в его отыскании.

Но даже после того, как вид механической системы выбран, задача синтеза не является однозначной. Как известно, можно построить n-параметрическое семейство струн, несущих n бусинок и обладающих заданным спектром. В качестве независимых параметров, определяющих это семейство, в [1] выбраны частоты колебаний струны при измененных граничных условиях и показано, как по двум спектрам однозначно вычисляются массы и координаты бусинок. В более сложных задачах естественным и удобным представляется другой способ выбора параметров, описанный ниже.

В данной работе решается задача о синтезе системы связанных между собой струн с сосредоточенными массами, квадраты частот колебаний которых совпадают с собственными значениями заданной положительно-определенной матрицы. Дается параметризация этих систем, позволяющая вычислить в явном виде длины пролетов и массы. Принятая параметризация удобна для решения ряда обратных задач, в частности задачи о восстановлении системы связанных струн по нескольким спектрам частот колебаний, отвечающим различным типам закрепления концов струн.

1. Рассмотрим поперечные колебания системы l струн длины $b-a$, расположенных в плоскости XOZ параллельно отрезку $[a, b]$ оси OX. Перемещение точки k-й струны с координатой x описывается функцией $y_k(x, t)$ $(1\leqslant k\leqslant l)$. Правые концы всех струн закреплены, левые — свободны. Для простоты считаем все струны растянутыми единичной силой, хотя предлагаемый метод допускает решение задачи и в общем случае. Потенциальная энергия такой системы

$$\Pi(y_1,\ldots,y_l)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\int_a^b\left(\frac{\partial y_k(x,t)}{\partial x}\right)^2dx$$

Пусть кинетическая энергия системы имеет вид

$$T(y_1,\ldots,y_l)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{s,k=1}^{l}m_{i,sk}\frac{\partial y_s(x_i^*,t)}{\partial t}\frac{\partial y_k(x_i^*,t)}{\partial t}$$

где $a=x_1^*<x_2^*<\ldots<x_N^*<o$, матрицы $M_i=\|m_{i,\,sk}\|_{s,k=1}^{l}$ $(1\leqslant i\leqslant N)$ неотрицательны. Отметим, что в континуальном случае суммирование по индексу i заменяется интегрированием по переменной x^* и задача об определении частот колебаний приводит к спектральной задаче для системы дифференциальных уравнений с матричным весом.

Поясним, как может быть построена механическая система с кинетической энергией указанного вида. В случае $l=2$ достаточно соединить точки двух безмассовых струн с одинаковыми координатами x_i^* $(1\leqslant i\leqslant N)$ безмассовыми абсолютно жесткими перемычками, на каждой из которых расположены одна либо две массы. Легко понять, как с помощью различных комбинаций перемычек получить систему с требуемой кинетической энергией в общем случае. Подчеркнем, что в рассматриваемой линейной задаче введение перемычек не ограничивает перемещений точек струн.

Пусть ранг матрицы M_i равен p_i, тогда она представляется суммой p_i матриц ранга 1 вида $\mathbf{m}_j\mathbf{m}_j^T$, где $\mathbf{m}_j^T=(m_{j,\,1},\ldots,m_{j,\,l})$, символ T означает транспонирование. Конечно, такое представление неоднозначно.

Учитывая эти разложения, перепишем кинетическую энергию системы в виде

$$T(y_1,\ldots,y_l)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{l}m_{j,k}\frac{\partial y_k(x_j,t)}{\partial t}\right)^2$$

где среди точек $a=x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n<b$ могут уже быть совпадающие.

Стандартным способом, отделяя время, придем к задаче об определении частот колебаний. Приведем ее математическую формулировку.

Введем вещественное гильбертово пространство H, элементами которого являются вектор-столбцы $\mathbf{Y}(x)=(y_1(x),\ldots,y_l(x))^T$, где $y_k(x)$, $(1\leqslant k\leqslant l)$ абсолютно непрерывны на $[a,\ b]$ с производными из $L^2(a,\ b)$, $\mathbf{Y}(b)=0$. Скалярное произведение векторов $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}\in H$ определим формулой

$$L(\mathbf{Y},\mathbf{Z})=\sum_{k=1}^{l}\int_a^b y_k'(x)z_k'(x)\,dx$$

Разыскивается $\mathbf{Y}\in H$, такой, что $\forall\mathbf{Z}\in H$

$$L(\mathbf{Y},\mathbf{Z})=\lambda\sum_{j=1}(\mathbf{m}_j^T\mathbf{Y}(x_j))(\mathbf{m}_j^T\mathbf{Z}(x_j))$$

Перейдя к соответствующему интегральному уравнению, получим

$$\mathbf{Y}(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}G(x,x_j)\mathbf{m}_j\mathbf{m}_j^T\mathbf{Y}(x_j) \tag{1.1}$$

где $G(x,\ s)=g(x,\ s)l$ — кратная единичной матрица Грина, $g(x,\ s)=b-s$, $x\leqslant s$; $b-x$, $x\geqslant s$.

Разумеется, функциональное уравнение (1.1) сводится к матричному, имеющему после симметризации вид

$$u_i=\lambda\sum_{j=1}^{n}K_{ij}^*u_j,\qquad u_i=\mathbf{m}_i^T\mathbf{Y}(x_i) \tag{1.2}$$

$$K_{ij}^*=\mathbf{m}_i^TG(x_i,x_j)\mathbf{m}_j=\sum_{k=1}^{l}m_{i,k}m_{j,k}g_{ij},\qquad g_{ij}=g(x_i,x_j)$$

Отметим равенство

$$K_{ij}^*=\sum_{k=1}^{l} m_{i,k}m_{j,k}g_{jj} \qquad (i\leqslant j)$$

являющееся характерным для рассматриваемой механической системы и, следовательно, имеющее важное значение для дальнейших построений.

Поставим следующую задачу. Найти все системы струн из описанного выше класса, имеющие тот же спектр, что и заданная положительно-определенная $n\times n$ матрица A. При этом система струн считается найденной, если известны точки x_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и векторы $\mathbf{m}_i$. Ниже будет разыскиваться ортонормированный базис пространства R^n, в котором заданная матрица K имеет ту же структуру, что и K^*.

2. Приведем формальную схему решения поставленной задачи. Пусть A — матрица некоторого оператора в ортонормированном базисе $\mathbf{e}_i$ $(1\leqslant i\leqslant \leqslant n)$. Задача будет решена, если будет указан ортонормированный базис $\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_n$ пространства R^n, в котором матрица обратного оператора имеет ту же структуру, что и матрица K^*, входящая в (1.2).

Приведем рекуррентную схему построения таких базисов. Выберем l произвольных векторов $\mathbf{q}_1,\ldots,\mathbf{q}_l\in R^n$, не равных нулю одновременно. Построим

$$\mathbf{p}_1=\Delta_1\sum_{k=1}^{l}\mu_{1,k}\mathbf{q}_k$$

$$\mathbf{p}_i=\Delta_i\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{l}\mu_{i,k}\mathbf{q}_k & A\mathbf{p}_1\ldots A\mathbf{p}_{i-1} \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{l}\mu_{i,k}\mathbf{q}_k,\mathbf{p}_1\right) & (A\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\ldots(A\mathbf{p}_{i-1},\mathbf{p}_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \left(\sum\limits_{k=1}^{l}\mu_{i,k}\mathbf{q}_k,\mathbf{p}_{i-1}\right) & (A\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_{i-1})\ldots(A\mathbf{p}_{i-1},\mathbf{p}_{i-1}) \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

В этих формулах $\Delta_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ — нормирующие множители, $\mu_{i,k}$ — коэффициенты, способ нахождения которых указан ниже, $(\mathbf{p},\mathbf{q})$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ в R^n, определитель следует понимать как вектор, полученный после формального разложения по элементам первой строки. Ортогональность базисных векторов очевидна.

Процесс построения $\mathbf{p}_i$ оборвется, если при некотором $i>1$ все векторы

$$\mathbf{a}_{ik}=\begin{vmatrix} \mathbf{q}_k & A\mathbf{p}_1\ldots A\mathbf{p}_{i-1} \\ (\mathbf{q}_k,\mathbf{p}_1) & (A\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_1)\ldots(A\mathbf{p}_{i-1},\mathbf{p}_1) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{q}_k,\mathbf{p}_{i-1}) & (A\mathbf{p}_1,\mathbf{p}_{i-1})\ldots(A\mathbf{p}_{i-1},\mathbf{p}_{i-1}) \end{vmatrix}$$

$(k=1,2,\ldots,l)$ равны нулю. Предположим сначала, что процесс не обрывается ни при каком $i\leqslant n$. Положим $R_1=1$, $R_i=\det\|(A\mathbf{p}_r,\mathbf{p}_s)\|_{r,s=1}^{i-1}$ $(i=2,\ldots,n)$. В силу положительной определенности A все $R_i>0$. Легко видеть, что для матрицы $K=A^{-1}$ справедливы соотношения

$$(K\mathbf{p}_i,\mathbf{p}_j)=\sum_{k=1}^{l}\Delta_iR_i\mu_{i,k}(K\mathbf{p}_j,\mathbf{q}_k)$$

при $i \leqslant j$. Предполагая $\mu_{1,s}, \ldots, \mu_{i-1,s}$ $(s=1, 2, \ldots, l)$ уже известными, найдем коэффициенты $\mu_{i,k}$. Из вида матричных элементов K_{ij}^* следует необходимость системы равенств

$$\mathbf{m}_i=\Delta_i R_i \boldsymbol{\mu}_i, \quad g_{ii}\mathbf{m}_i=((K\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_1), \ldots, (K\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_l))^T, \tag{2.2}$$
$$\boldsymbol{\mu}_i=(\mu_{i,1}, \ldots, \mu_{i,l})^T$$

Равенства (2.2) образуют систему уравнений для определения вектора $\boldsymbol{\mu}_i$. Преобразуем эту систему, вычислив

$$(K\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_s) = \Delta_i \sum_{k=1}^{l} \mu_{i,k} \begin{vmatrix} (K\mathbf{q}_k, \mathbf{q}_s) & (\mathbf{p}_1, \mathbf{q}_s) \ldots (\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{q}_s) \\ (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_1) & (A\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) \ldots (A\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_1) \\ \ldots & \ldots \\ (\mathbf{q}_k, \mathbf{p}_{i-1}) & (A\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{i-1}) \ldots (A\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_i \sum_{k=1}^{l} \mu_{i,k} b_{i,ks} = \Delta_i \langle \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{b}_{i,s} \rangle, \quad \mathbf{b}_{i,s} = (b_{i,1s}, \ldots, b_{i,ls})^T$$

где $\langle \boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \rangle$ – скалярное произведение в R^l.

Система (2.2) преобразуется в $g_{ii}R_i\boldsymbol{\mu}_i=(\langle\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{b}_{i,1}\rangle, \ldots, \langle\boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{b}_{i,l}\rangle)^T$.

Введя симметрическую матрицу $B=\|b_{i,ks}\|_{k,s=1}^{l}$, получим $B_i\boldsymbol{\mu}_i=g_{ii}R_i\boldsymbol{\mu}_i$. Итак, g_{ii} и $\boldsymbol{\mu}_i$ являются собственным значением и собственным вектором матрицы $R_i^{-1}B_i$ соответственно. Так как координаты x_i сосредоточенных масс вычисляются из уравнения $g_{ii}=b-x_i$, необходимо доказать неравенства $g_{ii}>0$, $g_{i+1,i+1} \leqslant g_{ii}$.

Лемма 1. Матрицы B_i неотрицательны.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\mu}_i$ – произвольный вектор из R^l, $\mathbf{p}_i$ определяется формулой (2.1):

$$(K\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_i)=\Delta_i^2 R_i \sum_{k,s=1}^{l} b_{i,ks}\mu_{i,k}\mu_{i,s}=\Delta_i^2 R_i \langle B_i\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}_i\rangle \tag{2.3}$$

Из положительной определенности K следует утверждение леммы.

Из предположения о том, что процесс построения $\mathbf{p}_i$ не обрывается, следует неравенство $B_i \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Примем, что g_{ii} – максимальное собственное значение матрицы $R_i^{-1}B_i$, необходимость этого будет ясна из дальнейших рассмотрений.

Лемма 2. При всех $i \leqslant n-1$ имеем $g_{i+1,i+1} \leqslant g_{ii}$.

Доказательство. Установим связь между матрицами B_i и B_{i+1}. Для этого рассмотрим элемент $b_{i+1,ks}$, записанный в виде определителя. Применив к этому определителю тождество Сильвестра, придем к соотношению

$$R_i b_{i+1,ks}=R_{i+1}b_{i,ks}-\pi_{i,s}\pi_{i,k}$$

$$\pi_{i,s} = \begin{vmatrix} (A\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) & \ldots & (A\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_1) & (\mathbf{q}_s, \mathbf{p}_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (A\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{i-1}) & \ldots & (A\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_{i-1}) & (\mathbf{q}_s, \mathbf{p}_{i-1}) \\ (A\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_i) & \ldots & (A\mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{p}_i) & (\mathbf{q}_s, \mathbf{p}_i) \end{vmatrix} \quad (1 \leqslant k, s \leqslant l) \tag{2.4}$$

Окончательно получим

$$R_{i+1}^{-1}B_{i+1}=R_i^{-1}B_i-(R_iR_{i+1})^{-1}\boldsymbol{\pi}_i\boldsymbol{\pi}_i^T, \quad \boldsymbol{\pi}_i^T=(\pi_{i,1}, \ldots, \pi_{i,l}) \tag{2.5}$$

Из (2.5) следует требуемое неравенство.

Объединив результаты двух лемм, сформулируем теорему.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l$ – произвольный набор векторов из R^n, такой, что рекуррентная процедура (2.1) не обрывается. Тогда существует система струн, закрепленных в точке $x=b$, набор квадратов частот колебаний которой совпадает со спектром матрицы A. Масса этой системы сосредоточена в точках $x_i=b-g_{ii}$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\mathbf{m}_i=\Delta_i R_i \boldsymbol{\mu}_i$. Доказательство теоремы следует из приведенных выше рассмотрений.

Рассмотрим случай обрыва процесса построения базисных векторов. Пусть при некотором i все векторы $\mathbf{a}_{ik}=0$ $(k=1,\dots,l)$. Обозначим подпространство, построенное на векторах $\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{i-1}$ как на базисных, через $L[\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{i-1}]$. В этом случае следует выбрать новые векторы $\mathbf{q}_1^*,\dots,\mathbf{q}_l^*$ из ортогонального дополнения $L[\mathbf{p}_1,\dots,\mathbf{p}_{i-1}]$ в R^n и провести процедуру, описанную выше. Механическая интерпретация этого случая изложена ниже.

3. Представляет интерес ситуация, при которой некоторые из координат x_i совпадают. Перейдем к ее рассмотрению.

Прежде всего заметим, что ранг матрицы B_i равен рангу системы векторов $\mathbf{a}_{ik}$ $(k=1,\dots,l)$. Справедливость этого утверждения следует из (2.3).

Пусть максимальное собственное значение ε_i матрицы B_i имеет кратность $s>1$. Возьмем любой ненулевой вектор $\boldsymbol{\mu}_i$ из соответствующего собственного подпространства и построим $\boldsymbol{\pi}_i$ по формулам (2.4). Несложно проверить равенство

$$\langle \boldsymbol{\pi}_i,\ \boldsymbol{\mu}_i\rangle=\Delta_i^{-1}>0 \qquad (3.1)$$

Очевидно, можно построить $s-1$ линейно-независимых векторов $\boldsymbol{\mu}_i^{(1)},\dots,\boldsymbol{\mu}_i^{(s-1)}$, ортогональных $\boldsymbol{\pi}_i$. Но тогда из (2.5) следуют равенства $R_{i+1}^{-1}B_{i+1}\boldsymbol{\mu}_i^{(k)}=\varepsilon_i\boldsymbol{\mu}_i^{(k)}$ $(k=1,\dots,s-1)$, т. е. ε_i — максимальное собственное значение матрицы R_{i+1}^{-1} B_{i+1} кратности не ниже $s-1$.

С другой стороны, если $\boldsymbol{\mu}$ — собственный вектор матрицы R_{i+1}^{-1} B_{i+1}, отвечающий собственному значению ε_i, то

$$\varepsilon_i\boldsymbol{\mu}=R_i^{-1}B_i\boldsymbol{\mu}-(R_iR_{i+1})^{-1}\langle\boldsymbol{\pi}_i,\ \boldsymbol{\mu}\rangle\boldsymbol{\pi}_i$$

и

$$\varepsilon_i=\langle\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\mu}\rangle^{-1}[\langle R_i^{-1}B_i\boldsymbol{\mu},\ \boldsymbol{\mu}\rangle-(R_iR_{i+1})^{-1}\langle\boldsymbol{\pi}_i,\ \boldsymbol{\mu}\rangle^2]$$

Равенство возможно лишь при $R_i^{-1}B_i\boldsymbol{\mu}=\varepsilon_i\boldsymbol{\mu}$, $\langle\boldsymbol{\pi}_i,\ \boldsymbol{\mu}\rangle=0$. Отсюда кратность ε_i как собственного значения матрицы R_{i+1}^{-1} B_{i+1} в точности равна $s-1$. Сформулируем полученный результат в виде леммы.

Лемма 3. Кратность максимального собственного значения матриц $R_i^{-1}B_i$ понижается на единицу при каждом шаге.

Пусть $\varepsilon_{i-1}>\varepsilon_i$ и ε_i имеет кратность s. Из леммы 3 следует совпадение точек $x_i, x_{i+1},\dots,x_{i+s-1}$. Матрица M_i, входящая в выражение для кинетической энергии системы, представляется в виде $M_i=\Sigma\mathbf{m}_j\mathbf{m}_j^T$, где индекс суммирования j изменяется от i до $i+s-1$, при этом каждое слагаемое зависит от выбора $\boldsymbol{\mu}_j$. Для корректности механической интерпретации процедуры следует показать, что сумма M_i не зависит от выбора этих векторов. Напомним, что система $\boldsymbol{\mu}_i,\dots,\boldsymbol{\mu}_{i+s-1}$ образует базис собственного подпространства матрицы $R_i^{-1}B_i$, отвечающего ε_i.

Теорема 2. Матрица M_i не зависит от выбора собственных векторов $\boldsymbol{\mu}_i,\dots,\boldsymbol{\mu}_{i+s-1}$.

Доказательство. Запишем цепочку равенств, следующих из (2.2)

$$\sum_{j=i}^{i+s-1} m_{j,k}m_{j,r}=\sum_{j=i}^{i+s-1}\Delta_j^2R_j^2\mu_{j,k}\mu_{j,r}=g_{ii}^{-2}\sum_{j=i}^{i+s-1}(K\mathbf{p}_j,\mathbf{q}_k)(K\mathbf{p}_j,\mathbf{q}_r) \qquad (3.2)$$

Если P_i — ортогональный проектор на подпространство $L[\mathbf{p}_i,\dots,\mathbf{p}_{i+s-1}]$, то правая часть (3.2) равна $\varepsilon_i^{-2}(P_iK\mathbf{q}_k,\ K\mathbf{q}_r)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что $L[\mathbf{p}_i,\dots,\mathbf{p}_{i+s-1}]=L[\mathbf{p}_i',\dots,\mathbf{p}_{i+s-1}']$, где векторы $\mathbf{p}_j'$ $(j=i,\dots,i+s-1)$ построены по любой другой системе $\mu_i', \ldots, \mu_{i+s-1}'$. Эта часть доказательства несложна, но весьма громоздка, поэтому ее здесь опускаем. Теорему 2 считаем доказанной.

Назовем систему струн распадающейся на независимые подсистемы, если матрица K^* имеет блочно-диагональную форму. Механически это означает, что усилия, приложенные к какой-либо подсистеме, не вызывают перемещений других подсистем. Именно такая ситуация возникает при обрыве рассматриваемого процесса. Способ его продолжения описан в конце предыдущего раздела.

Как видно из (2.1), достаточным условием наличия независимых подсистем является существование собственного вектора матрицы A, ортогонального всем $\mathbf{q}_k$ $(k=1, \ldots, l)$. В частности, это имеет место, если у матрицы A есть собственное значение кратности не менее $l+1$.

Теорема 3. Любая система струн, принадлежащая описанному выше классу, набор квадратов частот колебаний которой совпадает со спектром A, может быть получена при помощи рекуррентной процедуры (2.1).

Доказательство. Можно, очевидно, ограничиться рассмотрением систем, не распадающихся на независимые подсистемы. Кроме того, без ограничения общности можем считать $K^*=K$, где $K=A^{-1}$. Определим векторы $\mathbf{q}_k$ $(k=1, \ldots, l)$ равенствами $K\mathbf{q}_k=(g_{11}m_{1,k}, \ldots, g_{nn}m_{n,k})^T$. При помощи процедуры (2.1) построим матрицы B_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Непосредственная проверка показывает, что g_{ii} и $\mathbf{m}_i$ $(i=1, \ldots, n)$ являются собственными значениями и соответствующими собственными векторами матрицы B_i. Остается лишь проверить, что g_{ii} — максимальное собственное значение B_i. Заметим, что $\operatorname{rang} B_n=1$. Отсюда g_{nn} — максимальное собственное значение B_n. Дальнейший анализ основан на использовании равенства (2.5), из которого следует перемежаемость собственных значений матриц B_i и B_{i+1}, а также неравенства (3.1). Поскольку техника, применяемая при этом, вполне традиционна, этот анализ опускаем. Теорема доказана.

Отметим, что в частном случае $\mathbf{q}_2=\ldots=\mathbf{q}_l=0$ масса всей системы сосредоточена в точках первой струны. Для того, чтобы такая система не распалась на независимые подсистемы, необходима простота спектра матрицы A.

Приведем пример построения системы с помощью предложенного алгоритма. Пусть $A=\operatorname{diag}\{1, 6, 16\}$. Рассмотрим случай двух струн. Выбрав $\mathbf{q}_1=(-1, 2, 0)$, $\mathbf{q}_2=(0, 4, 1)$ и положив $b=5$, получим координаты трех перемычек $a=x_1=1{,}366816$, $x_2=4{,}020794$, $x_3=4{,}236341$. Соответствующие массовые матрицы

$$M_1=\begin{pmatrix} 0{,}015249 & 0{,}0224906 \\ 0{,}0224906 & 0{,}033171 \end{pmatrix}, \quad M_2=\begin{pmatrix} 0{,}549271 & -0{,}0126152 \\ -0{,}0126152 & 0{,}000289735 \end{pmatrix}$$

$$M_3=\begin{pmatrix} 0{,}657022 & -0{,}107267 \\ -0{,}107267 & 0{,}0175126 \end{pmatrix}$$

Полагая расстояние между струнами равным единице, укажем положения масс на перемычках и их величины. Все три массы $\rho_1=0{,}0934011$, $\rho_2=0{,}52433$, $\rho_3=0{,}460001$ расположены по одну сторону от второй струны на расстояниях от нее, соответственно равных $\xi_1=0{,}404059$, $\xi_2=1{,}023507$, $\xi_3=1{,}195117$, причем первая масса лежит между струнами.

Приведем некоторые обобщения задачи. Без существенных изменений схема переносится на случай системы струн, в выражение для потенциальной энергии которой входит дополнительно сумма интегралов от $q_k(x)y_k(x, t)^2$, где $q_k(x) \geqslant 0$ суммируемы на (a, b). Можно также рассматривать другие граничные условия.

Усложнив схему, можно исследовать случай, когда конечная масса системы сосредоточена в счетном числе точек, сгущающихся к правому концу.

Изложенный метод позволяет решать обратные задачи для дискретных систем, описываемых дифференциальными операторами высших порядков.

Для того, чтобы выделить из построенной совокупности систем с заданным спектром какую-нибудь одну, на систему нужно наложить дополнительные ограничения. Можно, например, задать еще l спектров, отвечающих поочередному закреплению левых концов струн. По этим спектрам определяются векторы $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_l$ и затем при помощи рассмотренной процедуры строится система струн.

Перечисленные выше задачи будут обсуждаться в последующих публикациях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* О некоторых новых задачах теории колебаний штурмовых систем.— ПММ, 1952, т. 16, вып. 5, с. 555–568.
2. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.– Л.: Гостехтеориздат, 1950. 360 с.
3. *Аткинсон Ф. В.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968. 749 с.

Харьков

Поступила в редакцию
5.V.1980