МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 534.014

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

КОВАЛЕВА А. С.

При решении задач периодической оптимизации записываются, как правило, дифференциальные уравнения движения системы, а условия периодичности рассматриваются как дополнительные ограничения, связывающие значения обобщенных координат в начале и в конце периода. Решение задач резко усложняется при повышении порядка системы, и эффективные результаты были получены преимущественно для систем с одной степенью свободы.

Движение виброударной системы можно описать одним интегральным уравнением. В настоящей работе для оптимизации периодических движений виброударных систем используются методы, применяемые для систем, описываемых интегральными уравнениями. Рассмотрены примеры.

1. Сформулируем задачу оптимального управления виброударной системой, линейной в промежутке между ударами. Ограничимся рассмотрением T-периодических одноударных движений системы с односторонним ударным взаимодействием. Совместив начало отсчета времени с моментом удара, запишем уравнения управляемого движения в виде

$$P(s)x+\Phi(x, sx)=f(t+\varphi)+u(t) \tag{1.1}$$

Здесь $x(t)$ — относительная координата соударяющихся элементов, $s=d/dt$, $\Phi(x, sx)$ — виброударная нелинейность [1], $f(t)=f(t+T)$ — внешнее возмущение, приведенное к координате x, φ — фаза удара, $u(t)$ — управление от регулируемого источника энергии, $P(s)$ — приведенный оператор динамической жесткости, предполагается $P(s)=O(s^2)$ [2].

В момент удара

$$x(0)=x(T)=\Delta, \quad x_+^{\boldsymbol{\cdot}}=-Rx_-^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.2}$$

где Δ — величина установочного зазора ($\Delta>0$) или натяга ($\Delta<0$), $x_+^{\boldsymbol{\cdot}}$ и $x_-^{\boldsymbol{\cdot}}$ — послеударная и доударная скорости соответственно, $x_-^{\boldsymbol{\cdot}}>0$, R — коэффициент восстановления скорости при ударе, $0<R\leqslant 1$. Ударный импульс

$$I=M(1+R)x_-^{\boldsymbol{\cdot}} \tag{1.3}$$

может рассматриваться как мера интенсивности соударения [1]; M — приведенная масса соударяющихся элементов, в дальнейшем полагаем $M=1$.

Условия (1.2) вместе с условиями периодичности, наложенными на остальные обобщенные координаты системы, можно рассматривать как дополнительные ограничения, связывающие значения обобщенных координат в начале и конце периода.

Запишем уравнение T-периодического движения системы (1.1) [4, 5]:

$$x(t)=-I\chi(t)+\int_0^T \chi(t-s)[f(s+\varphi)+u(s)]ds, \quad 0<t<T \tag{1.4}$$

Здесь $\chi(t)$ — импульсно-частотная характеристика системы [5]:

$$\chi(t)=T^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}P^{-1}(ki\omega)\exp(ki\omega t),\qquad \chi_t(t)=T^{-1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}P^{-1}(ki\omega)ki\omega\exp(ki\omega t)$$

Производная $\chi_t(t)=\chi^{\cdot}(t)$ терпит разрыв $\chi_+^{\cdot}(0)-\chi_-^{\cdot}(0)=1$ при $t=0$ [4, 5].

Исключим I из (1.4). Принимая во внимание (1.3) и используя очевидные замены $\chi_t(t-s)=-\chi_s(t-s)$, $[\chi_t(t-s)]_{t=0_-}=-\chi_s(T-s)$, получим

$$I=-\mu^{-1}\int_0^T\chi_s(T-s)[f(s+\varphi)+u(s)]ds \tag{1.5}$$

$$x(t)=\int_0^T[\chi(t-s)+\mu^{-1}\chi(t)\chi_s(T-s)][f(s+\varphi)+u(s)]ds \tag{1.6}$$

$$\mu=(1+R)^{-1}+\chi_-^{\cdot}(0) \tag{1.7}$$

Условия удара

$$x(0)-\Delta=0 \tag{1.8}$$

и геометрической совместности

$$I\geqslant 0,\quad x(t)\leqslant\Delta \tag{1.9}$$

рассматриваются как дополнительные ограничения. Второе из условий удара (1.2) учтено в записи уравнений движения в виде (1.4)—(1.6).

2. Задача оптимизации может ставиться двояко: если удары в системе нежелательны, то требуется минимизировать ударный импульс при фиксированном внешнем возмущении; если же удар служит основой рабочего процесса, то следует добиваться максимального ударного импульса при ограниченных ресурсах управления и $f(t)=0$.

Рассмотрим вторую задачу: при ограниченном управлении максимизировать ударный импульс I. Эти требования сведем в функционал

$$G=\beta I-\frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt \tag{2.1}$$

Здесь $\alpha>0$, $\beta>0$, T — заданный период между соударениями. Управление $u(t)$ выбирается из условия максимума функционала.

Максимизация функционала (2.1) с ограничениями (1.8) и связями в форме интегральных уравнений проводится при помощи методов, изложенных в [6, 7]. Функционал (2.1) и ограничение (1.8) представим в интегральной форме. При $f=0$ имеем

$$G=\int_0^T f_0(u(s),s)\,ds \tag{2.2}$$

$$f_0=-{}^1/_2\alpha u^2(s)-\beta\mu^{-1}\chi_s(T-s)u(s) \tag{2.3}$$

Введем в рассмотрение расширенную функцию Лагранжа рассматриваемой задачи. Предполагая, что условия (1.9) выполняются как строгие неравенства, и считая $f=0$, имеем [6, 7]:

$$K=-f_0(u(s),s)+p(s)x(s)-$$

$$-u(s)\int_0^T[\chi(t-s)+\mu^{-1}\chi(t)\chi_s(T-s)]p(t)\,dt+\lambda[x(s)-\Delta]\delta(s) \tag{2.4}$$

Здесь $\delta(s)$ — δ-функция Дирака, p — множители Лагранжа, определяемые вместе с прочими неизвестными из условий [7]: на оптимальной траектории функция K достигает максимума по u

$$\partial K/\partial u=0 \tag{2.5}$$

и стационарна по x:

$$\partial K/\partial x=0 \tag{2.6}$$

Постоянный множитель λ определяется с учетом ограничения (1.8). Выпишем систему (2.5), (2.6):

$$p(s)+\lambda\delta(s)=0 \tag{2.7}$$

$$-\alpha u(s)-\beta\mu^{-1}\chi_s(T-s)-\int_0^T[\chi(t-s)+\mu^{-1}\chi(t)\chi_s(T-s)]p(t)\,dt=0 \tag{2.8}$$

Отсюда имеем

$$u(s)=\alpha^{-1}\{\lambda\chi(T-s)+\mu^{-1}\chi_s(T-s)\,[\lambda\chi(0)-\beta]\} \tag{2.9}$$

Управление (2.9) непрерывно при $0<s<T$ и терпит разрыв при $s=0$, $s=T$.

Для определения импульса I и параметра λ служат уравнения (1.5), (1.6) совместно с ограничением (1.8). Подставив (2.9) в (1.5), (1.6) и положив $t=0$, $f=0$, получим

$$x(0)=\alpha^{-1}\lambda k_1-I\chi(0)=\Delta,\quad I=\alpha^{-1}\mu^{-2}[\beta-\lambda\chi(0)]\,k_2 \tag{2.10}$$

$$k_1=\int_0^T\chi^2(s)\,ds,\qquad k_2=\int_0^T[\chi^{\cdot}(s)]^2\,ds$$

$$\begin{gathered}I=I_{\text{opt}}=k_2[\beta\alpha^{-1}k_1-\Delta\chi(0)]\,D^{-1}\\ \lambda=\lambda_{\text{opt}}=[\beta k_2\chi(0)+\alpha\mu^2\Delta]\,D^{-1}\\ \beta-\lambda_{\text{opt}}\chi(0)=\mu^2[\beta k_1-\alpha\Delta\chi(0)]\,D^{-1}\\ D=k_1\mu^2+k_2\chi^2(0),\quad I_{\text{opt}}>I_*=-\Delta\chi^{-1}(0)\end{gathered} \tag{2.11}$$

где I_* — значение импульса при виброударном резонансе [8]. Ограничение $x\leqslant\Delta$ может быть проверено для конкретных значений $\chi(t)$, μ. Легко убедиться, что при $\mu=0$ (диссипация в системе отсутствует) это условие выполняется при любых α, β.

Рассмотрим отдельно слабоуправляемую систему со слабой диссипацией (ε — малый параметр)

$$\alpha=\varepsilon^{-1}\alpha_1,\quad \chi_-^{\cdot}(0)=-{}^1/_2+O(\varepsilon),\quad 1-R=O(\varepsilon) \tag{2.12}$$

Тогда $\mu=\varepsilon\mu_1$ и из (2.11) получим

$$D\approx D^\circ=k_2\chi^2(0) \tag{2.13}$$

Значению D° соответствует управление

$$\begin{gathered}u^\circ(t)=\varepsilon\alpha_1^{-1}D^\circ\{[\beta k_2\chi(0)+\varepsilon\alpha_1\mu_1^2\Delta]\,\chi(T-t)-\mu_1[\varepsilon\beta k_1-\\ -\alpha_1\Delta\chi(0)]\,\chi_t(T-t)\}\end{gathered} \tag{2.14}$$

В u° сохраняем члены $O(\varepsilon^2)$; как будет показано ниже, увеличение импульса по сравнению с I_* вызывается именно этими членами.

Оценим близость управления u° к оптимальному. Введя в систему оптимальное управление u_{opt}, сформируем движение системы в оптимальном режиме

$$x_{\text{opt}}(t)=-I_{\text{opt}}\chi(t)+\int_0^T\chi(t-s)\,u_{\text{opt}}(s)\,ds \tag{2.15}$$

$$I_{\text{opt}}=-\varepsilon^{-1}\mu_1^{-1}\int_0^T\chi_s(T-s)\,u_{\text{opt}}(s)\,ds$$

Соответствующее значение функционала $G(u_{\text{opt}})=G_{\text{opt}}$. Предположим, что управление формируется по закону (2.14); в этом случае

$$x^\circ(t)=-I^\circ\chi(t)+\int_0^T\chi(t-s)\,u^\circ(s)\,ds$$

$$I^\circ=-\varepsilon^{-1}\mu_1^{-1}\int_0^T\chi_s(T-s)\,u^\circ(s)\,ds \tag{2.16}$$

Покажем, что движение близко к оптимальному в смысле близости траектории и функционала, т. е.

$$|I^\circ-I_{\text{opt}}|\leqslant C_1\varepsilon,\quad |x^\circ(t)-x_{\text{opt}}(t)|\leqslant C_2\varepsilon$$

$$|G^\circ-G_{\text{opt}}|\leqslant C_3\varepsilon,\quad G^\circ=G(u^\circ) \tag{2.17}$$

Из (2.9), (2.11)–(2.14) имеем

$$|u^\circ(s)-u_{\text{opt}}(s)|=\varepsilon\alpha^{-1}|\lambda-\lambda_{\text{opt}}|\,|\chi(t-s)-\varepsilon^{-1}\mu_1^{-1}\chi(T-s)|\leqslant c\varepsilon^2 \tag{2.18}$$

$$\lambda^\circ=\lambda_{\text{opt}}D/D^\circ=\lambda_{\text{opt}}+O(\varepsilon^2)$$

Вычтя (2.15) из (2.16) и приняв во внимание (2.18), получим искомые оценки. Оценим предельные возможности управления. Из (2.14), (2.16) следует

$$I^\circ=I_*=\varepsilon\beta[\alpha_1\chi^2(0)]^{-1} \tag{2.19}$$

где $I_*>0$ — значение импульса при виброударном резонансе [8]. Как видно, $I^\circ>I_*$.

Пусть ограничения на ресурсы управления записываются в виде

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt\leqslant\varepsilon^2U_0^2,\quad \mu=0 \tag{2.20}$$

Тогда коэффициент β/α_1 должен выбираться из условия

$$\beta/\alpha_1\leqslant(Tk_1^{-1})^{1/2}|\chi(0)|\,U_0=\beta_1 \tag{2.21}$$

и ударный импульс не может превышать значения

$$I_M=I_*+\varepsilon\beta_1\chi^{-2}(0),\quad I\leqslant I_M \tag{2.22}$$

Если величина Δ не задана и должна определяться из требований оптимальности, то к условиям (2.5), (2.6) добавляется требование (7)

$$\frac{\partial}{\partial\Delta}\int_0^T K\,ds=\int_0^T\frac{\partial K}{\partial\Delta}\,ds \tag{2.23}$$

Последнее равенство совместно с (2.4) дает

$$\int_0^T\lambda\delta(s)\,ds=\lambda=0 \tag{2.24}$$

уравнения (2.7), (2.8) останутся без изменений. Внося $\lambda=0$ в (2.7)–(2.9), получим (при $\beta=1$)

$$u(s)=-\alpha^{-1}\mu^{-1}\chi_s(T-s) \tag{2.25}$$

Подставив (2.25) в (1.4), (1.5), (1.8), найдем оптимальные значения I и Δ

$$I=\alpha^{-1}\mu^{-2}\int_0^T [\chi_s(T-s)]^2\,ds=\alpha^{-1}\mu^{-2}k_2 \tag{2.26}$$

$$x(T)=x(0)=-I\chi(0)=\Delta \tag{2.27}$$

3. Рассмотрим задачу снижения ударного импульса в системе, движение которой вызывается возмущением $f(t)$ (см. (1.1)). Если ограничения на управление сформулированы в виде (2.24), то критерий качества задачи можно записать по-прежнему в виде (2.1), потребовав $\alpha>0$, $\beta<0$.

В уравнении T-периодического движения (1.6) подынтегральное выражение зависит от неизвестной фазы удара

$$x(t)=\int_0^T [\chi(t-s)+\mu^{-1}\chi(t)\chi_s(T-s)][f(s+\varphi)+u(s)]ds \tag{3.1}$$

$$I=-\mu^{-1}\int_0^T \chi_s(T-s)[f(s+\varphi)+u(s)]ds$$

Расширенная функция Лагранжа для задачи (3.1) с функционалом (2.1) и ограничением (1.8) строится по формуле [6, 7]:

$$K=-{}^1/_2u^2(s)-\beta\mu^{-1}\chi_s(T-s)[u(s)+f(s+\varphi)]+p(s)x(s)-$$
$$-\int_0^T [\chi(t-s)+\mu^{-1}\chi_s(T-s)\chi(t)]p(t)\,dt[u(s)+f(s+\varphi)]+\lambda[x(s)-\Delta]\delta(s) \tag{3.2}$$

В силу того что в задаче имеется неизвестный параметр φ, определяемый из требований оптимальности, к уравнениям (2.5), (2.6) добавляется условие [7]:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_0^T K\,ds=\int_0^T K_\varphi(s,\varphi)\,ds=0, \qquad K_\varphi=\frac{\partial K}{\partial\varphi} \tag{3.3}$$

Зависимость K от x, u такова, что соотношения (2.7)—(2.9) сохраняются, т. е. управление $u(s)$ дается формулой (2.9).

Преобразуем условие (3.2). Из (3.1), (2.9) получим

$$K_\varphi=\alpha u(s)f_\varphi(s+\varphi) \tag{3.4}$$

Условие (3.2), следовательно, приводится к виду

$$\int_0^T f_\varphi(s+\varphi)u(s)\,ds=0 \tag{3.5}$$

Уравнения (3.1), (3.5) совместно с соотношениями (1.5), (1.8) служат для определения λ, I, φ. Выпишем необходимые уравнения для случая

$$f(t)=f_0\cos\omega t \tag{3.6}$$

В дальнейшем обозначено

$$L=|P^{-1}(i\omega)|, \quad \psi=\arg P^{-1}(i\omega), \quad \psi_1=\omega(\psi+\varphi) \tag{3.7}$$

Положим в (3.1) $t=0$ и, приняв во внимание (1.8), (2.9), получим

$$f_0L\cos\psi_1-I\chi(0)+\alpha^{-1}k_1\lambda=\Delta \tag{3.8}$$
$$f_0L\sin\psi_1-\mu I+(\alpha\mu)^{-1}k_2[\beta-\lambda\chi(0)]=0$$

Уравнение (3.5) дает

$$-\lambda \sin \psi_1+\omega\mu^{-1}[\beta-\lambda\chi(0)]\cos \psi_1=0 \qquad (3.9)$$

Оценим решение системы трансцендентных уравнений (3.8), (3.9), предполагая малость диссипации и малость возбуждения. При этих условиях уравнения (3.8) вырождаются, и аналогично п. 2 получим

$$u_{\text{opt}}(t)=u^\circ(t)+O(\varepsilon^2) \qquad (3.10)$$

Фазу удара найдем из уравнений (3.9). С точностью до малых $O(\varepsilon^2)$ имеем

$$\operatorname{tg}\psi_1=\varepsilon\omega\mu_1 k_1[k_2\chi(0)]^{-1} \qquad (3.11)$$

Ударный импульс определяется из уравнения (3.8). С погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$I^\circ=I_*+\varepsilon\chi^{-1}(0)\,[f_0 L\cos\psi_1+\beta(\alpha_1\chi(0))^{-1}] \qquad (3.12)$$

Исследуем возможности уменьшения импульса при введении управления (3.10). Границы изменения параметров определены ограничением (2.20) и требованиями существования периодического режима $x\leqslant\Delta$, $I\geqslant 0$, $|\sin\psi_1|\leqslant 1$.

Условие (2.20) при $\beta<0$ дает

$$|\beta/\alpha_1|\leqslant\beta_1 \qquad (3.13)$$

Сопоставив (3.12), (3.13), получим

$$I\geqslant I_m,\quad I_m=I_*+\varepsilon\chi^{-1}(0)\,[f_0 L\cos\psi_1-\beta_1\chi^{-1}(0)] \qquad (3.14)$$

Потребуем $I_m\geqslant 0$, т. е.

$$0\leqslant\varepsilon\beta_1\leqslant\chi(0)\,[-\Delta+\varepsilon f_0 L\cos\psi_1] \qquad (3.15)$$

Дополнительно должно проверяться условие $|\sin\psi_1|\leqslant 1$. При этом из двух решений уравнения (3.11) выбирается то, которое удовлетворяет условию устойчивости [1].

В справедливости неравенства $x\leqslant\Delta$ убеждаемся непосредственной проверкой. Близость управления u° к оптимальному в смысле оценок (2.17) доказывается так же, как в п. 2.

4. Определим оптимальное управление и величину зазора в задаче оптимизации ударного импульса, создаваемого ударником с упругой подвеской.

Уравнение движения имеет вид

$$x^{\cdot\cdot}+\Omega^2x+\Phi(x, x^\cdot)=u(t),\quad u(t)=u(t+T) \qquad (4.1)$$

Сформулированная задача решалась в [9] методами классического вариационного исчисления; условия удара рассматривались как дополнительные требования, связывающие координату и скорость в начале и конце периода.

Сравним максимальные значения импульса и затрат на управление при оптимизации по критерию $|u(t)|\leqslant U_0$ [9] и критерию

$$G=I-\frac{\alpha}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt \qquad (4.2)$$

Импульсно-частотная характеристика рассматриваемой системы записывается в виде [5]

$$\chi(t)=\frac{1}{2\Omega}\frac{\cos\Omega(t-{}^1/_2T)}{\sin\Omega T/2},\qquad \chi_t(t)=-\frac{1}{2}\frac{\sin\Omega(t-{}^1/_2T)}{\sin\Omega T/2} \qquad (4.3)$$

Оптимальное управление находится по формуле (2.25)

$$u(t)=\alpha^{-1}\mu^{-1}\frac{\sin\Omega(t-{}^1/_2T)}{2\sin(\Omega T/2)},\qquad \mu=\frac{1}{2}\frac{1-R}{1+R} \tag{4.4}$$

а импульс — по формуле (2.26)

$$I=\alpha^{-1}\mu^{-2}k_2,\qquad k_2=\frac{T}{8\sin^2(\Omega T/2)}\left[1-\frac{\sin\Omega T}{\Omega T}\right] \tag{4.5}$$

Оптимальное значение координаты соударения дается соотношением (2.27).

Считая $\beta=1$, множитель α выберем из ограничения на энергозатраты

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt\leqslant U_0^2 \tag{4.6}$$

Внеся (4.4) в (4.6), получим

$$\alpha^{-2}\mu^{-2}k_2\leqslant TU_0^2,\qquad \alpha^{-1}\leqslant\mu U_0k^{-1/2}T^{1/2} \tag{4.7}$$

что дает $I\leqslant I_M$:

$$I_M=\mu^{-1}\frac{TU_0}{2\sqrt{2}\sin(\Omega T/2)}\left[1-\frac{\sin\Omega T}{\Omega T}\right]^{1/2} \tag{4.8}$$

Для сравнения предельных возможностей управления введем, как в [9], безразмерные переменные $\sigma=x\Omega^2/U_0$, $\tau=\omega t$, $\zeta=\Omega/\omega$, $u^*(\tau)=u(\tau)/U_0$. Тогда безразмерный импульс $I^*=(1+R)\,(d\sigma/d\tau)_-=\omega\zeta^2IU_0^{-1}$.

Максимальное значение импульса

$$I^*_{\text{opt}}=\frac{\omega}{U_0}\zeta^2I_M=\frac{\pi\mu^{-1}\zeta^2}{\sqrt{2}\sin(\pi\zeta)}\left[1-\frac{\sin 2\pi\zeta}{2\pi\zeta}\right]^{1/2} \tag{4.9}$$

создается управлением

$$u^*_{\text{opt}}=\sqrt{2}\sin\zeta(\tau-\pi)\,[1-\sin 2\pi\zeta/(2\pi\zeta)]^{-1/2} \tag{4.10}$$

удовлетворяющим ограничению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^{*2}(\tau)\,d\tau=1 \tag{4.11}$$

Области $0<\zeta<{}^1/_2$ соответствует система с натягом ($\Delta<0$), а области ${}^1/_2<\zeta<1$ — система с зазором ($\Delta>0$).

В [9] получено при ограничении $|u_1^*|\leqslant1$ оптимальное безразмерное управление

$$u^*_{1\,\text{opt}}(t)=\operatorname{sign}[\cos\zeta\tau-\cos\zeta(2\pi-\tau)],\qquad 0\leqslant\tau\leqslant2\pi \tag{4.12}$$

Максимальное значение импульса, соответствующее (4.12)

$$I^*_{1\,\text{opt}}=\mu^{-1}\zeta\,\mathrm{tg}(\pi\zeta/2) \tag{4.13}$$

Вычисляя величину

$$j=\frac{I^*_{\text{opt}}}{I^*_{1\,\text{opt}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi\zeta/2}{\sin^2(\pi\zeta/2)}\left[1-\frac{\sin 2\pi\zeta}{2\pi\zeta}\right]^{1/2}$$

определим, что $1<j<1{,}2$ при $0<\zeta<1$.

Следовательно, при одинаковых энергозатратах, выраженных условием (4.11), при помощи управления (4.10) можно добиться большего значения импульса. Кроме того, управление (4.10) в отличие от (4.12) не имеет точек разрыва внутри периода, что может оказаться более удобным для реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
2. *Коловский М. З.* Автоматическое управление виброзащитными системами. М.: Наука, 1976. 319 с.
3. *Зевин А. А.* Оптимальный режим в виброударных системах с одной степенью свободы.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 3, с. 35–41.
4. *Бабицкий В. И., Крупенин В. Л.* К анализу моделей виброударных систем.– Изв. АН СССР. МТТ, 1977, № 6, с. 29–37.
5. *Розенвассер Е. Н.* Колебания нелинейных систем. М.: Наука, 1969. 576 с.
6. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
7. *Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудников Е. Г.* Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М.: Энергия, 1976. 448 с.
8. *Бабицкий В. И., Коловский М. З.* К исследованию резонансных режимов в виброударных системах.– Изв. АН СССР. МТТ, 1976, № 4, с. 88–91.
9. *Израилович М. Я.* Оптимальный закон периодического движения одномассовой виброударной системы.– Машиноведение, 1969, № 1, с. 39–44.

Ленинград

Поступила в редакцию 18.III.1981