МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 534.014

К ТЕОРИИ ВИБРАЦИОННОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ НЕГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

БЕСПАЛОВА Л. В., МЕТРИКИН В. С.

В теории вибрационного перемещения, основное внимание в которой уделяется вопросам исследования условий существования устойчивых периодических режимов движения и их динамических характеристик, наиболее изученными являются движения, возникающие в системах под действием гармонических колебаний [1–3]. Однако некоторые экспериментальные [4] и теоретические [3, 5] данные указывают на ряд преимуществ вибрационных механизмов с негармонической формой возбуждения колебаний.

Ниже рассматривается одна из задач теории вибрационного перемещения – вибропогружение (вибровыдергивание) элементов при воздействии периодической кусочно-непрерывной внешней силы. Методом точечных преобразований при использовании решения уравнений, описывающих динамику процесса, в общем виде отыскиваются границы области существования основных устойчивых периодических движений. Полученные в работе общие результаты применяются для исследования динамики системы с импульсной внешней силой с произвольной скважностью σ. При этом изучены все простейшие периодические движения и приведены точные аналитические формулы их границ существования. Это позволило оценить влияние параметров импульсной силы на динамические характеристики процесса, в частности скважности σ, на оптимальную величину погружения.

1. При решении задачи вибрационного перемещения предполагается, что прилегающий сбоку грунт неподвижен; между грунтом и боковой поверхностью шпунта действует сила сухого трения f_1, величина q которой не зависит от скорости скольжения шпунта по грунту; сила лобового сопротивления f_2 грунта продавливанию не зависит от глубины погружения.

Пусть уравнения движения шпунта и грунтовой пробки, как и в [1], имеют вид

$$v^{\cdot}=p+f(\tau)+f_1+f_2 \tag{1.1}$$

$$u^{\cdot}=\begin{cases} v, & (u<0 \vee (u=0 \wedge v<0)) \\ 0, & (u=0 \wedge v>0) \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по безразмерному времени τ, p – безразмерный параметр перегрузки, u и v – безразмерные координаты, характеризующие относительное положение грунтовой пробки и скорость вибрационного погружения шпунта соответственно, $f(\tau)$ – произвольная 2π-периодическая кусочно-непрерывная функция, имеющая нулевую среднюю составляющую. Нелинейные силы f_1 и f_2 задаются

$$f_1=-q \quad (v>0); \quad q \quad (v<0) \tag{1.3}$$

$$f_2=\begin{cases} 0 & (u<0 \vee (u=0 \wedge v<0)) \\ -r & (u=0 \wedge v>0) \end{cases} \tag{1.4}$$

2. Траектории движения системы (1.1)–(1.2) определены в трехмерном (u, v, τ) фазовом пространстве Φ, усеченном по u и цилиндрическом по τ. Пространство Φ может быть представлено в виде объединения двух подпространств: $\Phi_1(u<0)$ и $\Phi_2(u=0)$, каждое из которых в свою очередь плоскостью $v=0$ разбивается на два: $\Phi_i^+(v>0)$ и $\Phi_i^-(v<0)$, $i=1, 2$.

Дифференциальные уравнения в каждом из этих подпространств запишутся:

$$v^{\cdot}=p+f(\tau)-q, \quad u^{\cdot}=v \quad (u<0, \quad v>0) \tag{2.1}$$

$$v^{\cdot}=p+f(\tau)+q, \quad u^{\cdot}=v \quad (u\leqslant 0, \quad v<0) \tag{2.2}$$

$$v^{\cdot}=p+f(\tau)-q-r, \quad u^{\cdot}=0 \quad (u=0, \quad v>0) \tag{2.3}$$

Кроме того, в системе при наличии нелинейных сил f_1 и f_2 возможны скользящие движения [2], определяемые соотношениями $u=0$, $v=0$ и соответствующие остановкам шпунта и грунтовой пробки.

Фазовые траектории в соответствующих подпространствах обозначены Γ_k, $k=1, \ldots, 4$. При этом траекториям Γ_1 и Γ_2 отвечают перемещения шпунта вверх и вниз без продавливания грунтовой пробки, Γ_3 — перемещение вниз с продавливанием последней, Γ_4 — остановкам шпунта.

Из описания структуры фазового пространства следует, что изображающая точка, начиная свое движение с прямой $L(u=v=0)$ в момент $\tau=\tau_{0-}$, перемещаясь затем в подпространствах Φ_1 и Φ_2, вновь пересечет прямую L в момент $\tau=\tau_{3+}$. Следовательно, все возможные колебательные движения с остановками и без них можно исследовать при помощи точечных преобразований прямой L самой в себя.

Пусть A_k^+ и A_k^- $(k=0, \ldots, 3)$ — точки прихода и выхода фазовой траектории на плоскости $v=0$ и $u=0$. Тогда, обозначая преобразования, осуществляемые траекториями Γ_i системы (2.1)—(2.3), точек A_l^+ в A_l^- $(l=0, 1)$ через S_l, а точек A_m^- в A^+_{m+1} $(m=0, 1, 2)$ через T_{ij} $(i=0, 1, 2, j=1, 2, 3)$, исследование движений системы грунт — шпунт можно провести изучая свойства функции последования $T_0=S_0T_{01}S_1T_{12}T_{23}$, уравнения которой в параметрической форме для произвольной периодической функции $f(\tau)$ имеют вид

$$p+q=g(\tau_{0-}), \qquad p-q=g(\tau_{1-}) \tag{2.4}$$

$$(p+q)\Delta\tau_1=\Phi(\tau_{1+})-\Phi(\tau_{1-}) \tag{2.5}$$

$$(p-q)\Delta\tau_2^2+(p+q)\Delta\tau_1^2=$$

$$=2\left[\int\limits_{\tau_{0-}}^{\tau_{1+}}\Phi(t)\,dt+\int\limits_{\tau_{1-}}^{\tau_{2+}}\Phi(t)\,dt-\Delta\tau_1\Phi(\tau_{0-})-\Delta\tau_2\Phi(\tau_{1-})\right] \tag{2.6}$$

$$(p-q-r)\Delta\tau_3+(p-q)\Delta\tau_2=\Phi(\tau_{3+})-\Phi(\tau_{1-}) \tag{2.7}$$

где $g(\tau)$ — переменная составляющая функции $f(\tau)$, $\Phi(t)$ — первообразная функция от $g(\tau)$, $\Delta\tau_i=\tau_{i+}-\tau_{(i-1)-}$. Уравнения (2.4) определяют моменты выхода изображающей точки из остановок, остальные — моменты прихода в точки A_i^+ $(i=0, \ldots, 3)$.

3. Рассмотрим вибрационное перемещение без длительных остановок. Условия отсутствия длительных остановок шпунта в верхнем и нижнем положениях записываются в виде

$$p+q\leqslant g(\tau_0), \qquad p-q\geqslant g(\tau_1) \tag{3.1}$$

где $\tau_0=\tau_{0-}=\tau_{0+}$, $\tau_1=\tau_{1-}=\tau_{1+}$, а точечное преобразование $T_0=\prod\limits_{i=1}^{3}T_{i-1}T_i$ точки $A_0\in L$ в $A_3\in L$ в параметрическом виде

$$\begin{gathered}(p+q)\Delta\tau_1=\Phi(\tau_1)-\Phi(\tau_0)\\(p-q)(\tau_3-\tau_1)-r\Delta\tau_3=\Phi(\tau_3)-\Phi(\tau_1)\end{gathered} \tag{3.2}$$

$$(p-q)\Delta\tau_2^2+(p+q)\Delta\tau_1^2=2\left[\int\limits_{\tau_0}^{\tau_2}\Phi(t)\,dt-\sum_{i=1}^{2}\Delta\tau_i\Phi(\tau_{i-1})\right]$$

Координаты простых неподвижных точек $A_0(\tau_0^*, \tau_1^*)$, соответствующих периодическим движениям системы без длительных остановок преобразования (3.2), с учетом условий периодичности $\tau_3-\tau_0=Tn$ находятся из соотношений

$$\Delta\tau_1^*=\frac{\Phi(\tau_1^*)-\Phi(\tau_0^*)}{p+q}=\frac{(q+r-p)Tn-r\Delta\tau_2^*}{2q+r}$$
$$(p+q)(\tau_2^*-\tau_0^*)^2-2q(\Delta\tau_2^*)^2=2\left[\int\limits_{\tau_0}^{\tau_2^*}\Phi(t)\,dt-(\tau_2^*-\tau_0^*)\Phi(\tau_0^*)\right] \qquad (3.3)$$

Границы области устойчивости определяются, как известно [2], из условия $|d\tau_3/d\tau_0|_*=1$, которое с учетом (3.2), (3.3) представляется в виде

$$\left|\frac{p-q-g(\tau_1^*)(d\tau_1/d\tau_0)-r(d\tau_2/d\tau_0)}{p-q-r-g(\tau_0^*)}\right|_*=1$$
$$\left.\frac{d\tau_1}{d\tau_0}\right|_*=\frac{p+q-g(\tau_0^*)}{p+q-g(\tau_1^*)} \qquad (3.4)$$
$$\left.\frac{d\tau_2}{d\tau_0}\right|_*=\frac{[p-q-g(\tau_1^*)\Delta\tau_2^*(d\tau_1/d\tau_0)]_*-(p+q-g(\tau_0^*))\Delta\tau_1^*}{(p-q)\Delta\tau_2^*-\Phi(\tau_2^*)+\Phi(\tau_1^*)}$$

Для величины вибрационного перемещения Δx за период Tn движения, используя (3.2) и соотношения для координат неподвижной точки (3.3), получаем выражение

$$\Delta x={}^1/_2(q+r-p)(\tau_2^*-\tau_0^*-Tn)^2-$$
$$-(\tau_2^*-\tau_0^*-Tn)\Phi(\tau_0^*)-\int\limits_{\tau_2^*}^{\tau_0^*+Tn}\Phi(t)\,dt \qquad (3.5)$$

Соотношения (3.2), (3.3), (3.5) при конкретно заданной форме внешней силы $f(\tau)$ позволяют определить координату неподвижной точки τ_0^*, а (3.4), (3.5) — построить в пространстве параметров p, q, r области существования устойчивых периодических режимов движения и указать оптимальные по скорости вибрационного перемещения значения параметров.

4. Рассмотрим случай импульсной внешней силы с произвольной скважностью σ.

Пусть $g(\tau)$ на периоде $\tau\in[0, T]$ своего определения задается соотношением

$$g(\tau)=\begin{cases}1, & (0\leqslant\tau<\sigma)\\ -k=-\dfrac{\sigma}{T-\sigma}, & (\sigma<\tau<T)\end{cases} \qquad (4.1)$$

В случае колебательного режима без длительных остановок область существования в пространстве параметров, при которых процесс вибрационного перемещения наиболее эффективен и не содержит участков с длительными остановками, находится из условий τ_0, $\tau_3\in[0, \sigma)$, τ_1, $\tau_2\in(\sigma, T)$ и определяется неравенствами

$$p+q\leqslant1,\quad p-q\geqslant r-k,\quad r\geqslant p-q \qquad (4.2)$$

Используя общие формулы (3.3), определяющие координаты неподвижной точки, и вид переменной составляющей функции $f(\tau)$ (4.1), получим

$$
\begin{gathered}
(p+q+1)\Delta\tau_1^*=(\sigma-\tau_1^*)[T/(T-\sigma)] \\
(2q+r)\Delta\tau_1^*=(q+r-p)T-r\Delta\tau_2^* \\
(p+q)(\Delta\tau_2^*+\Delta\tau_1^*)^2-2q(\Delta\tau_2^*)^2+\frac{T}{T-\sigma}(\Delta\tau_2^*+\tau_1^*-\sigma)^2=0
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

Из системы (4.3) достаточно просто можно определить координаты неподвижной точки, соответствующей периодическому режиму движения, при конкретных значениях параметров. Так, при $\sigma=\pi$ находим

$$
\tau_0^*=\frac{1}{2}\,\frac{2(p+q)(1+p-r-q)+rA}{2(r+2q)+rA}\,T \tag{4.4}
$$

$$
A=(2(1-p-q)/((p+1)^2+q^2))^{1/2}
$$

Границы существования устойчивых периодических режимов движения в пространстве параметров системы определяются из соотношений (3.4), (4.3), которые, как нетрудно убедиться, не сужают области существования и записываются в виде

$$
p+q=1,\quad p-q=r-k,\quad r=p-q \tag{4.5}
$$

Величина вибрационного перемещения Δx_1 за период T движения для процесса вибровыдергивания ($r=0$) после подстановки (4.1) в (3.5) является линейной функцией параметра скважности σ и определяется формулой

$$
\Delta x_1=T[(p^2-q^2)(^1/_2T-\sigma)+\sigma p]/2q \tag{4.6}
$$

Из (4.6) следует, что процесс вибровыдергивания без длительных остановок возможен лишь при выполнении условия

$$
\sigma>\sigma_0={}^1/_2T(q^2-p^2)/(p+q^2-p^2) \tag{4.7}
$$

Скорость вибрационного процесса погружения увеличивается с ростом σ и достигает своего наибольшего значения при $\sigma=T$. Сравнение величины и скорости перемещения даже при $\sigma=\pi$ со случаем гармонической внешней силы, приведенным в работе [1], позволяет установить большую эффективность процесса для случая с симметричной импульсной внешней силой.

Величина вибрационного перемещения Δx_2 за период T движения при отсутствии сил бокового трения ($q=0$), описывающая начало процесса виброперемещения, определяется согласно (3.5), (4.3) формулой

$$
\Delta x_2=\frac{T^2}{2}\left[\frac{T}{T-\sigma}\left(\frac{p\sigma}{r^2T}-\left(\frac{\sigma}{T}-\frac{r-p}{r}\right)^2-\frac{r-p}{r^2}(p+r(1-p)+A)\right]\right. \tag{4.8}
$$

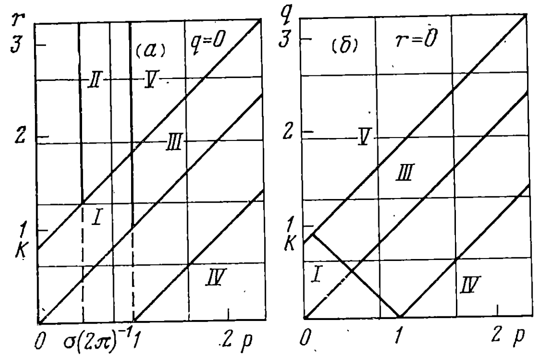
$$
A=(r-p)r^{-1}[(T-\sigma)T^{-1}(1-p)]^{1/2}
$$

из которой непосредственно следует, что Δx_2 растет с увеличением σ и достигает своего наибольшего значения при $\sigma=T$. Начальная фаза при этом задается соотношением $\tau_0^*=\sigma-TA$.

Для значений параметров $p>q+r+1$ колебательный периодический режим переходит, очевидно, в режим ускоренного погружения.

Рассматривая процесс вибрационного перемещения с длительными остановками только в верхнем положении и учитывая (4.1), получим, что такой тип движения возможен лишь при совместном выполнении неравенств

$$
p+q-1<0,\qquad p-q+k<0 \tag{4.9}
$$



Из (4.9) следует, что движений рассмотренного типа не существует.

Рассматривая процесс вибрационного перемещения с подъемами вверх и с длительными остановками только в нижнем положении, можно установить, что при $r=0$ такое движение невозможно, так как неравенства $p-q+k\geqslant 0$, $p+q-1>0$, $p-q-1<0$, $p+q+k>0$, определяющие в пространстве параметров область существования указанного типа движения, несовместны. При $r\neq 0$ и произвольных значениях q, p области существования задаются неравенствами

$$p+q-1<0, \quad p-q-r+k<0, \quad p-q+k>0 \tag{4.10}$$

Причем длительность остановки определяется из

$$\tau_{0-}=0, \quad \tau_{1,2,3}\in(\sigma, T), \quad \tau_{3-}=T$$
$$\tau_2=\frac{T(T-\sigma)^{-1}+(T(T-\sigma)^{-1}(1-p))^{1/2}}{p+k}k \tag{4.11}$$

Режим вибрационного перемещения без подъемов вверх с длительными остановками возможен, очевидно, лишь при одновременном выполнении условий

$$p+q-1>0, \quad p-q-r+k>0$$
$$p-q-r-1<0, \quad \tau_{1+}\in[0,\sigma), \quad \tau_{1-}=\sigma \tag{4.12}$$

В начальной стадии вибрационного процесса, когда q мало, величина погружения Δx_3 находится из условия

$$\Delta x_3=\frac{T}{2}\left[\sigma-\frac{T(r-p)}{1-p+r}\right]=\frac{T}{2}(\sigma-\sigma_1) \tag{4.13}$$

а в случае отсутствия лобового сопротивления (завершающая стадия процесса)

$$\Delta x_4=\frac{T}{2}\left[\sigma-\frac{T(q-p)}{q-p+1}\right]=\frac{T}{2}(\sigma-\sigma_2) \tag{4.14}$$

Из соотношений (4.13), (4.14) следует, что при выполнении условия $\sigma>\sigma_{1,2}$ в системе будет существовать периодический режим движения без подъемов вверх с длительными остановками.

Для значений параметров, удовлетворяющих неравенствам

$$p+q-1\geqslant 0, \quad p-q-r+k\leqslant 0 \tag{4.15}$$

режим вибрационного перемещения переходит в так называемый режим сплошной остановки.

Проведенное исследование позволило выделить в пространстве параметров системы области существования всех простейших периодических движений (фигура): I — режим без длительных остановок, II — режим с длительной остановкой только в нижнем положении, III — с длительной остановкой без подъемов вверх, IV — режим сплошного погружения без длительных остановок и подъемов вверх, V — режим сплошной остановки, согласно аналитическим формулам (3.1), (3.4), (4.2), (4.5), (4.10), (4.12) для их границ и указать значения параметров с максимальной величиной погружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Неймарк Ю. И.* Теория вибрационного погружения и вибровыдергивания.— Инж. сб., 1953, т. 16, с. 13–49.
2. *Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю.* Вибрационное перемещение. М.: Наука, 1964. 410 с.
3. *Нагаев Р. Ф.* Периодические режимы вибрационного перемещения. М.: Наука, 1978. 160 с.
4. *Сухих Р. Д.* Синтез вибровозбудителей с эллиптическими зубчатыми колесами. Механика машин. Вып. 35, 36. М.: Наука, 1972, с. 3–8.
5. *Беспалова Л. В., Метрикин В. С.* О периодических решениях нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамику вибрационной системы.— Дифференциальные и интегральные уравнения: Сб. статей. Горьковский ун-т, 1979, вып. 3, с. 139–144.

Горький

Поступила в редакцию
26.I.1981