

ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЙЛЕРОВА РАЗВОРОТА НЕЛИНЕЙНОГО УПРУГОГО ОБЪЕКТА

ЗАКРЖЕВСКИЙ А. Е.

Одним из видов программных движений свободного твердого тела, представляющих интерес для технических приложений, является режим переориентации его в инерциальном пространстве. Как для абсолютно жесткого, так и для упругого тела этот режим может быть осуществлен либо тремя последовательными поворотами на определенные углы вокруг осей, жестко связанных с недеформированным телом, либо одним поворотом вокруг оси эквивалентного вращения (оси Эйлера), неподвижной в инерциальном пространстве и связанной с телом.

В публикуемой работе представлено решение задачи оптимизации управления эйлеровым разворотом нелинейного упругого объекта исходя из требования снижения помех ориентации и динамических перегрузок, действующих на упругие элементы.

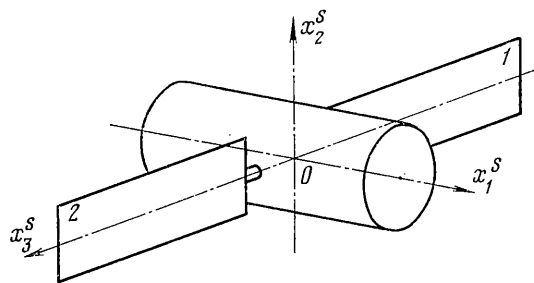
1. Рассмотрим свободное тело (фиг. 1), которое состоит из жесткой несущей части и присоединенных к ней двух симметрично расположенных упругих элементов 1 и 2. Предположим наличие на несущей части датчиков углов ориентации и угловых скоростей, блока обработки информации, способного формировать законы управления в соответствии с заданными алгоритмами, а также исполнительных органов системы управления, в качестве которых примем три одностепенных гироскопа, оси вращения которых направлены вдоль главных осей инерции недеформированного объекта $Ox_1^0x_2^0x_3^0$.

Введем неподвижные в инерциальном пространстве системы координат $Ox_1^0x_2^0x_3^0$ и $Ox_1^fx_2^fx_3^f$, совпадающие с $Ox_1^sx_2^sx_3^s$ соответственно в начале и в конце разворота. Введем также систему осей $O\xi_1\xi_2\xi_3$, связанную с несущим телом и совпадающую в начале разворота с осями $O\xi_1^0\xi_2^0\xi_3^0$, такую, что оси $O\xi_1$ и $O\xi_1^0$ совпадают с осью Эйлера. Введенным системам координат поставим в соответствие системы ортов. Осям Ox_k^s соответствуют орты i_k , $Ox_k^0-i_k^0$, $O\xi_k-e_k$, $O\xi_k^0-e_k^0$, $Ox_k^f-i_k^f$ ($k=1, 2, 3$). Переход из одной системы координат в другую определим в виде

$$i_k = \sum_{j=1}^3 c_{kj} i_j^0, \quad e_k^0 = \sum_{m=1}^3 \gamma_{km} i_m^0, \quad e_k = \sum_{m=1}^3 \gamma_{km} i_m^f = \sum_{m=1}^3 b_{km} e_m^0, \quad i_k^f = \sum_{m=1}^3 a_{km} i_m^0$$

Матрицу $\|a\|$ считаем заданной. Это позволяет в соответствии с теорией линейных ортогональных преобразований определить величину угла конечного поворота Φ вокруг оси $O\xi_1$ и направляющие косинусы γ_{ii} оси $O\xi_1$ в осях Ox_i^0 ($i=1, 2, 3$). Остальные компоненты матрицы $\|\gamma\|$ можно выбрать произвольно, исходя из условия, что e_i ($i=1, 2, 3$) образуют правую тройку взаимно ортогональных векторов. Матрица $\|b\|$ имеет вид

$$\|b\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$



Фиг. 1

где $\varphi(t)$ — угол поворота базиса $O\xi_h$ вокруг оси $O\xi_1$. В результате

$$c_{hl} = \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \gamma_{pk} b_{pq} \gamma_{ql} \quad (h, l = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

т. е. направляющие косинусы связанной системы осей могут быть определены по (1.1) как функции угла $\varphi(t)$. Вектор угловой скорости несущего тела совпадает с осью $O\xi_1$, т. е.

$$\omega_i = \dot{\varphi}(t) \gamma_{1i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

Для описания движения упругих элементов воспользуемся дискретной конечно-мерной моделью. Вопросы, связанные с построением таких моделей для континуальных систем, широко освещены в литературе. Обоснованное усечение получающихся при этом бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений применительно к исследуемому объекту рассмотрено, в частности, в [1]. Не останавливаясь здесь на подробностях перехода к указанной модели, выберем ее достаточно простой для математического описания и в то же время позволяющей продемонстрировать возможности оптимизации управления пространственным разворотом как активной защиты несомых упругих элементов от динамических перегрузок.

В соответствии с этим предположим, что вращение достаточно медленное для выполнения условия $\Omega_1^2 > \omega_2^2 + \omega_3^2$ и вектор смещения точек упругого элемента может быть представлен в виде

$$w = \sum_{\alpha=1}^N q_{\alpha}(t) U^{\alpha}(x_3^s)$$

Здесь $q_{\alpha}(t)$ можно рассматривать как обобщенные координаты, $U^{\alpha}(x_3^s) = \varphi_{\alpha}(x_3^s) i_1$, $\varphi_{\alpha}(x_3^s)$ — собственные функции упругой консоли как парциальной системы.

Предположим геометрию упругомассовых характеристик объекта такой, что при движении его относительно центра масс векторы перемещений точек упругих элементов, симметричных относительно полюса O , равны по модулю и противоположно направлены, т. е. картина деформаций осесимметрична относительно Ox_2^s . При этом мгновенное положение центра масс всей системы совпадает с полюсом O .

Уравнения движения упругих элементов объекта можно записать в виде

$$y_{\alpha}'' + 2n_{\alpha} y_{\alpha}' + (\Omega_{\alpha}^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2) y_{\alpha} = 2R_{\alpha}(\omega_2' + \omega_1 \omega_3) \quad (1.3)$$

$$R_{\alpha} = \int_{\alpha} U^{\alpha} \cdot \rho \, dm \bigg/ \int_m U^{\alpha} \cdot U^{\alpha} \, dm \quad (i = 1, 2, 3)$$

Уравнения движения гироскопов системы управления

$$H_i^* = -I_i \dot{\omega}_i - \tau_i H_i + U_i^0 \quad (i=1, 2, 3) \quad (1.4)$$

Здесь $y_\alpha = -q_{\alpha 1} + q_{\alpha 2}$ — обобщенные координаты, соответствующие осесимметричным перемещениям упругих элементов 1 и 2 (см. фиг. 1), n_α — обобщенный коэффициент демпфирования, Ω_α — парциальная частота, соответствующая свободным колебаниям упругих элементов при неподвижном несущем теле, H_i , I_i , τ_i , U_i^0 — соответственно кинетический момент, момент инерции относительно оси вращения, коэффициент трения и управляющий момент i -го гироскопа.

Остальные дифференциальные уравнения, определяющие динамику объекта, можно опустить, так как положение несущего тела полностью определяется законом $\varphi(t)$ и тремя направляющими косинусами оси $O\xi_i$ в осях $Ox_1^0 x_2^0 x_3^0$.

2. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: найти закон управления разворотом описанного объекта вокруг эйлеровой оси на заданный угол Φ , при котором выполняются краевые условия для фазовых переменных и в процессе разворота минимизируются динамические перегрузки упругих элементов.

Представим вектор упругих перемещений в виде

$$w = \sum_{\alpha=1}^N y_\alpha(t) W_\alpha(x_s)$$

Здесь N — число форм упругих колебаний, учитываемых в математической модели объекта, $W_\alpha = -U^\alpha$ в области, занимаемой элементом 1 и $W_\alpha = U^\alpha$ для элемента 2. Тогда для минимизации указанных динамических перегрузок критерий качества управления может быть выбран в виде

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \int_m (\dot{w})^2 dm dt = \frac{1}{2} \int_0^T \int_m \left(\sum_{\alpha=1}^N \dot{y}_\alpha \dot{W}_\alpha \right)^2 dm dt$$

В предположении взаимной ортогональности W_α и W_β при $\alpha \neq \beta$:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{\alpha=1}^N (\dot{y}_\alpha)^2 \int W_\alpha^2 dm dt = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{\alpha=1}^N (\dot{y}_\alpha)^2 W_{\alpha\alpha} dt \quad (2.1)$$

В качестве связей, налагаемых на фазовые переменные y_α , выступают уравнения движения (1.3), которые с учетом (1.2) представим следующим образом:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_\alpha + 2n_\alpha \dot{y}_\alpha + [\Omega_\alpha^2 - (\dot{\varphi})^2 (\gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2)] y_\alpha = \\ = 2R_\alpha [\ddot{\varphi} \gamma_{12} + (\dot{\varphi})^2 \gamma_{11} \gamma_{13}] \quad (\alpha=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Принимая в качестве управления $u = \ddot{\varphi}$, приходим к интегральному ограничению

$$\int_0^T \int_0^t u(\tau) d\tau dt = \Phi$$

Введем новые переменные

$$z_1 = \int_0^t \int_0^u u(\tau) dt d\tau, \quad z_2 = \int_0^t u(\tau) d\tau, \quad z_{2k+1} = y_k, \quad z_{2k+2} = \dot{y}_k \quad (k=1, \dots, N)$$

и обозначения $a_k = 2R_k \gamma_{12}$, $b_k = 2R_k \gamma_{11} \gamma_{13}$, $d = \gamma_{12}^2 + \gamma_{13}^2$. Для случая разворота объекта из одного неподвижного состояния в другое приходим к следующему

щей вариационной задаче с закрепленными границами:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = u, \quad \dot{z}_{2h+1} = z_{2h+2}, \quad \dot{z}_{2h+2} = -2n_k z_{2h+2} - \\ - \Omega_k^2 z_{2h+1} + b_k z_2^2 + d z_2^2 z_{2h+1} + a_k u \quad (k=1, \dots, N) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{h=1}^N (-2n_k z_{2h+2} - \Omega_k^2 z_{2h+1} + b_k z_2^2 + d z_2^2 z_{2h+1} + a_k u)^2 W_{hh} dt \quad (2.4)$$

$$z_i(0) = 0 \quad (i=1, \dots, 2N+2), \quad z_1(T) = \Phi, \quad z_j(T) = 0 \quad (j=2, \dots, 2N+2) \quad (2.5)$$

В зависимости от значений γ_{11} , γ_{12} , γ_{13} можно выделить следующие два частных случая этой задачи:

1. $\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0$ или $\gamma_{11} = \gamma_{12} = 0$. Ось Эйлера при этом совпадает с Ox_1 или с Ox_3 . Уравнение (2.2) становится однородным и рассмотрение задачи в указанной постановке теряет смысл.

2. $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{11} \neq 0$, $\gamma_{13} \neq 0$. Ось Эйлера при этом лежит в плоскости Ox_1x_2 , не совпадая ни с одной из главных осей. Такая задача требует отдельного рассмотрения. Для упрощения ее решения целесообразно изменить функционал (2.4), чтобы он оставался квадратичным относительно u .

В дальнейшем будем считать $\gamma_{12} \neq 0$.

Вопросы управляемости и наблюдаемости рассматриваемого объекта детально исследованы в работе [1], поэтому здесь на них останавливаться не будем.

3. Используя принцип максимума [2], приведем поставленную задачу оптимального управления к двухточечной краевой задаче для нелинейной системы $4(N+1)$ уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u(x), \quad \dot{x}_{2h+1} = x_{2h+2}, \quad \dot{x}_{2h+2} = G1_h(x) + a_k u(x) \\ \dot{x}_{M+1} = 0, \quad \dot{x}_{M+2} = -x_{M+1} - \sum_{i=1}^N G2(x) [x_{M+2i+2} + G1_i(x) + a_i u(x)] W_{ii} \\ x_{M+3+2h} = -G3(x) [x_{M+3+2h} + G1_h(x) + a_k u(x)] W_{hh} \\ \dot{x}_{M+4+2h} = -x_{M+3+2h} \quad (h=1, \dots, N) \quad M=2N+2 \\ G1_h(x) = -\Omega_h^2 x_{2h+1} - 2n_k x_{2h+2} + b_k x_2^2 + d x_2^2 x_{2h+1} \\ G2_k(x) = 2(b_k x_2 + d x_2 x_{2h+1}), \quad G3(x) = -\Omega_h^2 + d x_2^2 \\ u(x) = \left(\sum_{i=1}^N a_{ii} W_{ii} \right)^{-1} \left\{ x_{M+2} + \sum_{i=1}^N [x_{M+2i+2} + G1_i(x) W_{ii}] \right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Краевые условия задачи

$$x_i(0) = 0 \quad (i=1, \dots, M), \quad x_1(T) = \Phi, \quad x_j(T) = 0 \quad (j=2, \dots, M) \quad (3.2)$$

Точное аналитическое решение этой краевой задачи может быть построено лишь при $N=1$, $n_1=b_1=d=0$. В этом случае система (3.1) сводится к одному дифференциальному уравнению восьмого порядка $x^{(VIII)} = 0$, решение которого $x_i(t) = \sum C_i t^{(i-1)}$ ($i=1, 2, 3 \dots 8$). Краевые условия (3.2) принимают вид

$$\begin{aligned} x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \quad x_1''(0) + x_1^{(IV)} F + x_1^{(VI)}(0) D = 0 \\ x_1'''(0) + x_1^{(V)}(0) F + x_1^{(VII)}(0) D = 0, \quad x_1(T) = \Phi, \quad x_1'(T) = 0 \\ x_1''(T) + x_1^{(IV)}(T) F + x_1^{(VI)}(T) D = 0, \quad x_1'''(T) + x_1^{(V)}(T) F + x_1^{(VII)}(T) D = 0 \\ F = \Omega^{-2}, \quad D = \Omega^{-4}, \quad x_1^{(h)} = d^h x_1 / dt^h \end{aligned}$$

В общем случае решение краевой задачи (3.1), (3.2) может быть получено только численно. Одним из наиболее подходящих для решения данной задачи методов представляется метод последовательной линеаризации [3]. Метод заключается в сведении нелинейной краевой задачи к последовательности линейных краевых задач, методы решения которых разработаны достаточно подробно. Здесь применен метод переходной матрицы [4], основанный на построении матрицы фундаментальных решений.

Представим (3.1) в виде

$$\dot{x}_s = \varphi_s(x) \quad (s=1, \dots, 2M) \quad (3.3)$$

В качестве начального приближения $x^0(t)$ зададим решение краевой задачи, полученной из (3.1) отбрасыванием нелинейных членов. Линеаризованные уравнения для всех последующих приближений могут быть получены разложением правых частей (3.3) в ряд Тейлора в окрестностях решения, полученного из предыдущего приближения с удержанием членов до линейных включительно. Рекуррентные соотношения для соответствующих уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_s^{(n)} &= \sum_{p=1}^{2M} g_{sp}^{(n-1)} (x_p^{(n)} - x_p^{(n-1)}) + \varphi_s(x^{(n-1)}) \quad (s=1, \dots, 2M) \\ g_{sp}^{(n-1)} &= \partial \varphi_s / \partial x_p |_{x=x^{(n-1)}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

В результате системы уравнений для всех приближений, кроме начального, превращаются в неоднородные с переменными коэффициентами. Краевые условия (3.2) в силу их линейности сохраняются во всех итерациях.

При решении линейных неоднородных краевых задач методом переходной матрицы целесообразно искать $x^{(n)}(t)$ в виде суммы решения задачи Коши для неоднородной системы

$$\dot{z}_s^{(n)} = \sum_{p=1}^{2M} g_{sp}^{(n-1)} z_p^{(n)} + L_s^{(n-1)}(t); \quad z_s^{(n)}(0) = 0, \quad (s=1, \dots, 2M)$$

и решения краевой задачи для однородной системы

$$\begin{aligned} \dot{y}_s^{(n)} &= \sum_{p=1}^{2M} g_{sp}^{(n-1)} y_p^{(n)}, \quad y_i^{(n)}(0) = 0; \\ y_i^{(n)}(T) &= x_i^{(n)}(T) - z_i^{(n)}(T) \quad (s=1, \dots, 2M; i=1, \dots, M) \end{aligned}$$

4. В результате решения поставленной задачи оптимального управления определяется программное движение несущего тела, состоящее во вращении его вокруг эйлеровой оси по закону $\varphi(t)$. Для формирования программных управляющих моментов U_i^0 ($i=1, 2, 3$) воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы. При $t=t_0$ начальный кинетический момент имеет вид

$$K_0^0 = \sum_{k=1}^3 H_{k0} i_k^0 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 H_{k0} c_{kj} i_j$$

В процессе разворота

$$K^0 = \sum_{j=1}^3 (H_j + L_j) i_j, \quad L_i = C_i \omega_i + \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} \omega_{\alpha}$$

$$L_2 = C_2 \omega_2 - \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} \dot{\omega}_2 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} y_{\alpha}^2 \omega_2$$

$$L_3 = C_3 \omega_3 + \sum_{\alpha=1}^N R_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha} \omega_3 + \sum_{\alpha=1}^N \frac{m_{\alpha}}{2} y_{\alpha}^2 \omega_3$$

m_k — приведенная масса для k -й формы колебаний, C_i — главные центральные моменты инерции недеформированного объекта.

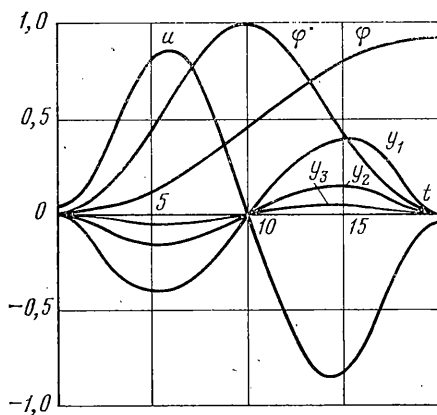
В силу предположения об отсутствии внешних моментов $K^0 = K_0^0$. Отсюда

$$H_j = \sum_{k=1}^3 H_{k0} c_{kj} + L_j, \quad H_j = \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 H_{k0} \gamma_{pq} b_{pq} \dot{\gamma}_{qj} + L_j \quad (4.1)$$

$$U_j^0 = \sum_{k=1}^3 H_{k0} \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^3 \gamma_{pq} (b_{pq} \dot{\gamma}_{qj} + \tau_k b_{pq}) \gamma_{qj} + L_j + \tau_j L_j + I_j \dot{\gamma}_{jj} \quad (j=1,2,3)$$

Поскольку неизвестными заранее в этих выражениях могут оказаться только H_{k0} , количество математических операций, необходимых для формирования U_j^0 , невелико.

Для стабилизации построенного оптимального программного движения к управляющим моментам (4.1) следует добавлять стабилизирующие. Задача нахождения их представляет самостоятельный интерес и здесь не исследуется.



Фиг. 2

5. В качестве примера рассмотрим объект со значениями параметров: $C_1 : C_2 : C_3 = 3 : 3,5 : 4$; $I : C_3 = 0,005$; $\gamma_{11} = 0,7267$, $\gamma_{12} = 0,6401$; $\gamma_{13} = 0,2490$; $\Phi = 0,9351$; $\Omega_1 = 3 \text{ c}^{-1}$; $\Omega_2 = 5 \text{ c}^{-1}$; $\Omega_3 = 7 \text{ c}^{-1}$; $m_1 R_1^2 : m_2 R_2^2 : m_3 R_3^2 : C_3 = 0,11 : 0,055 : 0,0275 : 1$.

Поведение фазовых переменных задачи и управления при $N=2$ показано на фиг. 2. Здесь же показано поведение обобщенной координаты, соответствующей третьей форме упругих перемещений (кривая 3), которая при построении управления не учитывалась. Все три обобщенные координаты (кривые 1, 2, 3) меняются плавно, обращаясь в нуль на конце интервала управления. Таким образом, построенное управление позволяет получить хорошее удовлетворение краевых условий для обобщенных координат упругих перемещений и для $\alpha > N$. Изменение управляющей переменной (кривая 4) носит плавный характер и определяется наличием участков разгона и торможения. Угловая скорость вращения вокруг оси Эйлера φ^* (кривая 5) также меняется плавно и достигает максимума в середине интервала. Угол поворота φ (кривая 6) возрастает монотонно. На фиг. 2 единице по оси ординат соответствует: для φ — рад, φ^* — 0,1 рад c^{-1} , u — 0,02 рад c^{-2} , y_{α} — 0,01 м.

Сравнение погрешностей удовлетворения краевых условий задачи при $N=2$ для первого и второго приближений приведено ниже

	$\varphi(T)$, рад	$\varphi^*(T)$, рад c^{-1}	$y_1(T)$, м	$y_1^*(T)$, м c^{-1}	$y_2(T)$, м	$y_2^*(T)$, м c^{-1}	J , м ² с ⁻¹
1	$1,05 \cdot 10^{-10}$	$3,36 \cdot 10^{-11}$	$4,63 \cdot 10^{-8}$	$2,03 \cdot 10^{-8}$	$9,01 \cdot 10^{-10}$	$1,94 \cdot 10^{-8}$	$2,671 \cdot 10^{-5}$
2	$3,09 \cdot 10^{-12}$	$1,74 \cdot 10^{-11}$	$2,93 \cdot 10^{-12}$	$3,74 \cdot 10^{-11}$	$7,46 \cdot 10^{-12}$	$1,08 \cdot 10^{-11}$	$2,662 \cdot 10^{-5}$

Эти данные наглядно показывают быструю сходимость примененного метода решения нелинейной краевой задачи как с точки зрения выполнения краевых условий, так и обеспечения стационарного значения функционала.

Автор благодарит Р. Ф. Ганиева и Ф. Л. Черноусько за полезные советы, полученные в процессе обсуждения постановки и методов решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Likins P., Ohkami Y., Wong Ch.* Appendage modal coordinate truncation criteria in hybrid coordinate dynamic analysis.— *J. Spacecraft and Rockets*, 1976, v. 13, No. 10, p. 611–617.
2. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
3. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
4. *Брайсон А., Хо Ю-ши.* Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.

Киев

Поступила в редакцию
14.VII.1980