МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 534.014.4

ГАШЕНИЕ ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАТФОРМЫ ПРИ ПОМОЩИ ДЕБАЛАНСНЫХ ГАСИТЕЛЕЙ

БАБИЦКИЙ В. И., БУРД В. Ш.

Изучаются возможности динамического гашения колебаний объекта путем присоединения к нему двух дебалансов. Отыскиваются условия настройки дебалансных гасителей.

Рассмотрим платформу, к которой шарнирно присоединены два одинаковых дебалансных гасителя (фигура) с осями вращения, перпендикулярными плоскости платформы, причём оси гасителей закреплены в одной и той же точке платформы.

Предполагается, что вдоль оси x на систему действует гармоническая сила $F\cos(\omega t+\theta)$ и платформа может совершать только поступательное движение в горизонтальной плоскости xy.

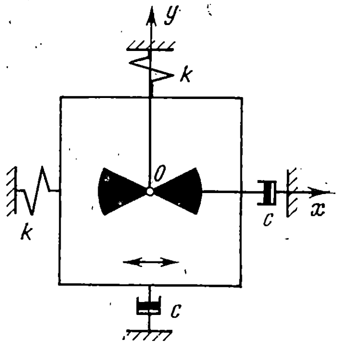
Найдены условия, при которых в системе существуют устойчивые, синхронные, противоположно направленные вращения дебалансов, приводящие к подавлению колебаний платформы [1].

Уравнения движения системы имеют вид

$$Mx^{\cdot\cdot}+cx^{\cdot}+kx=F\cos(\omega t+\theta)+ +mr\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^{\cdot 2}\cos\varphi_i+\varphi_i^{\cdot\cdot}\sin\varphi_i)$$

$$My^{\cdot\cdot}+cy^{\cdot}+ky= =mr\sum_{i=1}^{2}(-\varphi_i^{\cdot\cdot}\cos\varphi_i+\varphi_i^{\cdot 2}\sin\varphi_i) \qquad (1)$$

$$I\varphi_i^{\cdot\cdot}+c_1\varphi_i^{\cdot}=mr(x^{\cdot\cdot}\sin\varphi_i-y^{\cdot\cdot}\cos\varphi_i) \qquad (i=1,\ 2)$$



Здесь M – полная масса платформы, m – масса каждого дебаланса, c – коэффициент затухания колебаний платформы, c_1 – коэффициент вязкого сопротивления вращению гасителей, k – коэффициент жесткости симметричного упругого подвеса платформы, I – момент инерции дебалансного гасителя относительно его оси, φ_1 и φ_2 – углы поворота гасителя, отсчитываемые от положительного направления оси Ox по ходу часовой стрелки, r – эксцентриситет дебаланса.

Введем малый параметр ε, предполагая, что масса платформы велика по сравнению с массой дебалансов. Положим $\varepsilon=m/M\ll 1$. Далее введем обозначения $F/m=mF/(Mm)=\varepsilon\alpha$, $\alpha=F/m$, $\gamma=c/M$, $\omega_0^2=k/M$, $\lambda=c_1/I$. Система (1) перепишется в виде

$$x^{\cdot\cdot}+\gamma x^{\cdot}+\omega_0^2x=\varepsilon\alpha\cos(\omega t+\theta)+\varepsilon r\sum_{i=1}^{2}(\varphi_i^{\cdot 2}\cos\varphi_i+\varphi_i^{\cdot\cdot}\sin\varphi_i)$$

$$y^{\cdot\cdot}+\gamma y^{\cdot}+\omega_0^2y=\varepsilon r\sum_{i=1}^{2}-(\varphi_i^{\cdot\cdot}\cos\varphi_i+\varphi_i^{\cdot 2}\sin\varphi_i) \qquad (2)$$

$$\varphi_i^{\cdot\cdot}+\lambda\varphi_i^{\cdot}=(x^{\cdot\cdot}\sin\varphi_i-y^{\cdot\cdot}\cos\varphi_i)/r$$

Интересуясь вопросом о гашении колебаний платформы с помощью вращательных движений гасителей, сначала заметим, что первые два уравнения системы (2) имеют решение

$$x=0, \quad y=0, \quad \varphi_1=\theta_0+\omega t, \quad \varphi_2=-\theta_0-\omega t \tag{3}$$

если выполняются условия $\theta_0=\theta-\pi$, $mr/(2\omega^2)$, которые будем в дальнейшем предполагать выполненными. Решение (3) удовлетворяет третьему и четвертому уравнениям системы (2) только с точностью до члена $\lambda\omega$. Поэтому дальнейшая схема исследования такова. Система (2) преобразуется к виду $d\mathbf{z}/dt=\mathbf{X}(t, \mathbf{z})+\mathbf{R}(t, \mathbf{z})$, где для системы $d\mathbf{z}/dt=\mathbf{X}(t, \mathbf{z})$ при определенных условиях (3) является асимптотически устойчивым решением, а $\mathbf{R}(t, \mathbf{z})$ содержит члены более высокого порядка малости (в естественном смысле). Следовательно, гашение колебаний будет происходить в следующем смысле: колебания платформы не затухают полностью, но происходят в малой окрестности состояния равновесия $x=0$, $y=0$.

Чтобы свести задачу к исследованию нулевого решения, перейдем от переменных φ_1, φ_2 к переменным θ_1, θ_2 по формулам $\varphi_1=\theta_1+\theta_0+\omega t$, $\varphi_2=\theta_2-\theta_0-\omega t$ и сделаем замену времени $\tau=\omega t$.

Введем обозначения $\gamma_1=\gamma/\omega$, $\sigma=\omega_0/\omega$, $\alpha_1=\alpha/\omega^2$, $\lambda_1=\lambda/\omega$. В новых переменных и в новом времени система уравнений (2) будет иметь вид

$$\begin{gathered}
x^{\cdot\cdot}+\gamma_1 x^{\cdot}+\sigma^2 x=\varepsilon\alpha_1\cos(\tau+\theta)+\varepsilon r[\theta_1^{\cdot\cdot}\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)+\\
+\theta_2^{\cdot\cdot}\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)]+\varepsilon g_1(\theta_1, \theta_2, \tau)\\
y^{\cdot\cdot}+\gamma_1 y^{\cdot}+\sigma^2 y=\varepsilon r[-\theta_1^{\cdot\cdot}\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)-\theta_2^{\cdot\cdot}\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]+\varepsilon g_2(\theta_1, \theta_2, \tau) \qquad (4)\\
\theta_1^{\cdot\cdot}+\lambda_1(\theta_1^{\cdot}+1)=[x^{\cdot\cdot}\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)-y^{\cdot\cdot}\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)]/r\\
\theta_2^{\cdot\cdot}+\lambda_1(\theta_2^{\cdot}-1)=[x^{\cdot\cdot}\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)-y^{\cdot\cdot}\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]/r\\
g_1(\theta_1, \theta_2, \tau)=r[(\theta_1^{\cdot}+1)^2\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)+(\theta_2^{\cdot}-1)^2\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]\\
g_2(\theta_1, \theta_2, \tau)=r[(\theta_1^{\cdot}+1)^2\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)+(\theta_2^{\cdot}-1)^2\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)]
\end{gathered}$$

Будем искать решение в виде малых отклонений платформы от положения равновесия $x=\varepsilon u$, $y=\varepsilon v$ и новые переменные вновь обозначим x и y соответственно.

Относительно малости коэффициентов затухания сделаем следующие предположения. Пусть $\gamma_1\sim\varepsilon$, $\lambda_1=o(\varepsilon)$. С учетом изложенного систему (5), разрешенную относительно вторых производных $x^{\cdot\cdot}$, $y^{\cdot\cdot}$, $\theta_1^{\cdot\cdot}$, $\theta_2^{\cdot\cdot}$, можно записать в виде

$$\begin{gathered}
x^{\cdot\cdot}+\gamma_1 x^{\cdot}+\sigma^2 x=\alpha_1\cos(\tau+\theta)+g_1(\theta_1\ \theta_2, \tau)-{}^1/_2\varepsilon[a(\tau, x, \theta_1, \theta_2)f_1(\theta_1, \theta_2, \tau)+\\
+b(\tau, y, \theta_1, \theta_2)f_2(\theta_1, \theta_2, \tau)]-\lambda_1 g_2(\theta_1, \theta_2, \tau)+O(\varepsilon^2)\\
y^{\cdot\cdot}+\gamma_1 y^{\cdot}+\sigma^2 y=g_2(\theta_1, \theta_2, \tau)-{}^1/_2\varepsilon[b(\tau, \mathrm{y}, \theta_1, \theta_2)f_1(\theta_1, \theta_2, \tau)+\\
+a(\tau, x, \theta_1, \theta_2)f_2(\theta_1, \theta_2, \tau)]-\lambda_1 g_1(\theta_1, \theta_2, \tau)+O(\varepsilon^2)\\
\theta_1^{\cdot\cdot}+\lambda_1(\theta_1^{\cdot}+1)=\varepsilon r^{-1}[a(\tau, x, \theta_1, \theta_2)\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)- \qquad (5)\\
-b(\tau, y, \theta_1, \theta_2)\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)]+O(\varepsilon^2)\\
\theta_2^{\cdot\cdot}+\lambda_1(\theta_2^{\cdot}-1)=\varepsilon r^{-1}[a(\tau, x, \theta_1, \theta_2)\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)-\\
-b(\tau, y, \theta_1, \theta_2)\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]+O(\varepsilon^2)\\
f_1(\theta_1, \theta_2, \tau)=\cos 2(\theta_1+\theta_0+\tau)+\cos 2(\theta_2-\theta_0-\tau)\\
f_2(\theta_1, \theta_2, \tau)=\sin 2(\theta_1+\theta_0+\tau)+\sin 2(\theta_2-\theta_0-\tau)\\
a(\tau, x, \theta_1, \theta_2)=-\sigma^2 x+\alpha_1\cos(\tau+\theta)+g_1(\theta_1, \theta_2, \tau)\\
b(\tau, x, \theta_1, \theta_2)=-\sigma^2 y+g_2(\theta_1, \theta_2, \tau)
\end{gathered}$$

Преобразуем теперь два последних уравнения системы (5). От каждого из них перейдем к системе двух уравнений, вводя новые переменные

$$\theta_1^{\bullet}=\sqrt{\varepsilon}\psi_1, \quad \psi_1^{\bullet}=-\frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon}}-\lambda_1\psi_1+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}[-\sigma^2 x\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)+$$

$$+\sigma^2 y\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)]+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}[h_1(\theta_1,\theta_2,\tau)\sin(\theta_1+\theta_0+\tau)-$$

$$-g_2(\theta_1,\theta_2,\tau)\cos(\theta_1+\theta_0+\tau)]+O(\varepsilon\sqrt{\varepsilon}), \qquad \theta_2^{\bullet}=\sqrt{\varepsilon}\psi_2 \tag{6}$$

$$\psi_2^{\bullet}=\frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon}}-\lambda_1\psi_2+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}[-\sigma^2 x\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)+\sigma^2 y\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]+$$

$$+\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}[h_1(\theta_1,\theta_2,\tau)\sin(\theta_2-\theta_0-\tau)-g_2(\theta_1,\theta_2,\tau)\cos(\theta_2-\theta_0-\tau)]+O(\varepsilon\sqrt{\varepsilon})$$

$$h_1(\theta_1,\ \theta_2,\ \tau)=\alpha_1\cos(\tau+\theta)+g_1(\theta_1,\ \theta_2,\ \tau).$$

Пусть $f(\tau)$ — периодическая функция с периодом 2π. Обозначим через $\langle f(\tau)\rangle$ среднее значение функции $f(\tau)$ за период

$$\langle f(\tau)\rangle=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(s)\,ds$$

через $K[f(\tau)]$ — разность между функцией $f(\tau)$ и ее средним значением. В системе (6) сделаем замену

$$\begin{aligned}
\theta_1&=\xi_1+\sqrt{\varepsilon}u_{11}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)+\varepsilon u_{12}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)\\
\psi_1&=\eta_1+\sqrt{\varepsilon}v_{11}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)+\varepsilon v_{12}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)\\
\theta_2&=\xi_2+\sqrt{\varepsilon}u_{21}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)+\varepsilon u_{22}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)\\
\psi_2&=\eta_2+\sqrt{\varepsilon}v_{21}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)+\varepsilon v_{22}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)
\end{aligned} \tag{7}$$

где функции $u_{i1}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)$, $v_{i1}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)$, $u_{i2}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)$, $v_{i2}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \eta_1,\ \eta_2)$ $(i=1,\ 2)$ периодические по τ с периодом 2π и нулевым средним значением. Эти функции определяются из следующей системы уравнений:

$$\partial u_{11}/\partial\tau\equiv\partial u_{21}/\partial\tau\equiv 0$$

$$\frac{\partial v_{11}}{\partial\tau}=\frac{1}{r}K[h_1(\xi_1,\xi_2,\tau)\sin(\xi_1+\theta_0+\tau)-g_2(\xi_1,\xi_2,\tau)\cos(\xi_1+\theta_0+\tau)]$$

$$\frac{\partial v_{21}}{\partial\tau}=\frac{1}{r}K[h_1(\xi_1,\xi_2,\tau)\sin(\xi_2-\theta_0-\tau)-g_2(\xi_1,\xi_2,\tau)\cos(\xi_2-\theta_0-\tau)]$$

$$\partial u_{12}/\partial\tau=v_{11}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2), \qquad \partial u_{22}/\partial\tau=v_{21}(\tau,\ \xi_1,\ \xi_2)$$

$$\frac{\partial v_{12}}{\partial\tau}=-\frac{\partial v_{11}}{\partial\xi_1}\eta_1-\frac{\partial v_{11}}{\partial\xi_2}\eta \qquad \frac{\partial v_{22}}{\partial\tau}=-\frac{\partial v_{21}}{\partial\xi_1}\eta-\frac{\partial v_{21}}{\partial\xi_2}\eta$$

После замены (7), учитывая, что

$$\langle h_1(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)\sin(\xi_1+\theta_0+\tau)-g_2(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)\cos(\xi_1+\theta_0+\tau)\rangle={}^1/{}_2\alpha_1\sin\xi_1$$

$$\langle h_1(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)\sin(\xi_2-\theta_0-\tau)-g_2(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)\cos(\xi_2-\theta_0-\tau)\rangle={}^1/{}_2\alpha_1\sin\xi_2$$

с точностью до членов порядка $O(\varepsilon\sqrt{\varepsilon})$ получаем уравнения

$$\xi_1^{\bullet}=\sqrt{\varepsilon}\eta_1,$$

$$\eta_1^{\cdot} = -\frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon}\sin\xi_1 - \lambda_1\eta_1 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\sigma^2[-x\sin(\xi_1+\theta_0+\tau)+y\cos(\xi_1+\theta_0+\tau)]$$

$$\xi_2^{\cdot} = \sqrt{\varepsilon}\eta_2,$$

$$\eta_2^{\cdot} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\varepsilon}} - \sqrt{\varepsilon}\sin\xi_2 - \lambda_1\eta_2 + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\sigma^2[-x\sin(\xi_2-\theta_0-\tau)+y\cos(\xi_2-\theta_0-\tau)]$$

которые можно переписать в виде двух уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} &\xi_1^{\cdot\cdot}+\lambda_1\xi_1^{\cdot}+\varepsilon\sin\xi_1+\lambda_1=\varepsilon\frac{\sigma^2}{r}[-x\sin(\xi_1+\theta_0+\tau)+y\cos(\xi_1+\theta_0+\tau)] \\ &\xi_2^{\cdot\cdot}+\lambda_1\xi_2^{\cdot}+\varepsilon\sin\xi_2-\lambda_1=\varepsilon\frac{\sigma^2}{r}[-x\sin(\xi_2-\theta_0-\tau)+y\cos(\xi_2-\theta_0-\tau)] \end{aligned} \qquad (8)$$

Подставляя формулы замены (7) в первые два уравнения системы (5), получим

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}+\gamma_1x^{\cdot}+\sigma^2x=\alpha_1\cos(\tau+\theta)+r(\xi_1^{\cdot}+1)^2\cos(\xi_1+\theta_0+\tau)+ \\ &\quad +r(\xi_2^{\cdot}-1)^2\cos(\xi_2-\theta_0-\tau)+O(\varepsilon) \\ &y^{\cdot\cdot}+\gamma_1y^{\cdot}+\sigma^2y=r[(\xi_1^{\cdot}+1)^2\sin(\xi_1+\theta_0+\tau)+(\xi_2^{\cdot}-1)^2\sin(\xi_2-\theta_0-\tau)]+O(\varepsilon) \end{aligned} \qquad (9)$$

Система уравнений (8)—(9) с точностью до членов $\pm\lambda$ в уравнениях (8) имеет нулевое решение $x=y=\xi_1=\xi_2=0$. Исследуем устойчивость этого решения при малых ε. Линеаризуя систему, имеем

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}+\gamma_1x^{\cdot}+\sigma^2x=r(\xi_2-\xi_1)\sin(\theta_0+\tau)-2r(\xi_1^{\cdot}+\xi_2^{\cdot})\cos(\theta_0+\tau)+O(\varepsilon) \\ &y^{\cdot\cdot}+\gamma_1y^{\cdot}+\sigma^2y=r(\xi_1+\xi_2)\cos(\theta_0+\tau)+2r(\xi_1^{\cdot}-\xi_2^{\cdot})\sin(\theta_0+\tau)+O(\varepsilon) \\ &\xi_1^{\cdot\cdot}+\lambda_1\xi_1^{\cdot}+\varepsilon\xi_1=\varepsilon\sigma^2[-x\sin(\theta_0+\tau)+y\cos(\theta_0+\tau)]/r \\ &\xi_2^{\cdot\cdot}+\lambda_1\xi_2^{\cdot}+\varepsilon\xi_2=\varepsilon\sigma^2[x\sin(\theta_0+\tau)+y\cos(\theta_0+\tau)]/r \end{aligned} \qquad (10)$$

Положим $\xi_2-\xi_1=z$, $\xi_1+\xi_2=u$. Тогда систему уравнений (10) можно записать в виде системы относительно переменных x, y, z, u:

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}+\gamma_1x^{\cdot}+\sigma^2x=rz\sin(\theta_0+\tau)-2ru^{\cdot}\cos(\theta_0+\tau)+O(\varepsilon) \\ &y^{\cdot\cdot}+\gamma_1y^{\cdot}+\sigma^2y=ru\cos(\theta_0+\tau)-2rz^{\cdot}\sin(\theta_0+\tau)+O(\varepsilon) \\ &z^{\cdot\cdot}+\lambda_1z^{\cdot}+\varepsilon z=2\varepsilon\sigma^2x\sin(\theta_0+\tau)/r \\ &u^{\cdot\cdot}+\lambda_1u^{\cdot}+\varepsilon u=2\varepsilon\sigma^2y\cos(\theta_0+\tau)/r \end{aligned} \qquad (11)$$

При $\varepsilon=0$ получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &x^{\cdot\cdot}+\sigma^2x=rz\sin(\theta_0+\tau)-2ru^{\cdot}\cos(\theta_0+\tau), \quad y^{\cdot\cdot}+\sigma^2y=ru\cos(\theta_0+\tau)- \\ &\quad -2rz^{\cdot}\sin(\theta_0+\tau), \quad z^{\cdot\cdot}=0, \quad u^{\cdot\cdot}=0 \end{aligned} \qquad (12)$$

которая интегрируется. Матрица монодромии системы уравнений (12) имеет собственные значения $\lambda_{1,2}=\exp(\pm2\pi i\sigma)$, $\lambda_{3,4}=\exp(\pm2\pi i\sigma)$, $\lambda_{5,6,7,8}=1$. Таким образом, уравнения (12) имеют четыре чисто мнимых характеристических показателя и два кратных нулевых показателя. Для вычисления характеристических показателей системы уравнений (11) воспользуемся теорией возмущений. Видно, что для системы (11) ввиду условия $\gamma_1>0$ чисто мнимые характеристические показатели переходят в левую полуплоскость. Выясним, что происходит при возмущении с кратными нулевыми показателями. Для определенности возьмем первый из них. Решение уравнений (11) ищем в виде $x=e^{\alpha t}X$, $y=e^{\alpha t}Y$, $z=e^{\alpha t}Z$, $u=e^{\alpha t}U$, где $\alpha=\sqrt{\varepsilon}\alpha_1+\varepsilon\alpha_2+\ldots$, $X=X_0+\sqrt{\varepsilon}X_1+\ldots$, $Y=Y_0+\sqrt{\varepsilon}Y_1+\ldots$, $Z=Z_0+$

$+\sqrt{\varepsilon}Z_1+\ldots,\quad U=U_0+\sqrt{\varepsilon}U_1+\ldots$ Функции X_i, Y_i, Z_i, U_i $(i=0, 1, \ldots)$ – периодические функции τ с периодом 2π. Для вычисления X, Y, Z, U получаем уравнения

$$X^{\cdot\cdot}+2\alpha X^{\cdot}+\alpha^2X+\gamma_1(X^{\cdot}+\alpha X)+\sigma^2X=rZ\sin(\theta_0+\tau)-2rU^{\cdot}\cos(\theta_0+\tau)$$

$$Y^{\cdot\cdot}+2\alpha Y^{\cdot}+\alpha^2Y+\gamma_1(Y^{\cdot}+\alpha Y)+\sigma^2Y=rU\cos(\theta_0+\tau)-2rZ^{\cdot}\sin(\theta_0+\tau)$$

$$Z^{\cdot\cdot}+2\alpha Z^{\cdot}+\alpha^2Z+\lambda_1(Z^{\cdot}+\alpha Z)+\varepsilon Z=2\varepsilon\sigma^2X\sin(\theta_0+\tau)/r$$

$$U^{\cdot\cdot}+2\alpha U^{\cdot}+\alpha^2U+\lambda_1(U^{\cdot}+\alpha U)+\varepsilon U=2\varepsilon\sigma^2Y\cos(\theta_0+\tau)/r$$

Учитывая, что для первого из кратных показателей $Z_0=1$, $U_0=0$, находим $X_0^{\cdot\cdot}+\sigma^2X_0=r\sin(\theta_0+\tau)$, $Y_0^{\cdot\cdot}+\sigma^2Y_0=0$, откуда, при $\sigma\neq1$ $X_0=r\sin(\theta_0+\tau)/(\sigma^2-1)$, $Y_0=0$.

Далее, $Y_1=0$, $Z_1=0$, а для X_1 получаем уравнение

$$X_1^{\cdot\cdot}+\sigma^2X_1=-2\alpha r(\sigma^2-1)^{-1}\cos(\theta_0+\tau)+r\sin(\theta_0+\tau)$$

Следовательно

$$X_1=-2\alpha_1\frac{r}{(\sigma^2-1)^2}\cos(\theta_0+\tau)+\frac{r}{\sigma^2-1}\sin(\theta_0+\tau)$$

Уравнение для определения Z_2 имеет вид

$$Z_2^{\cdot\cdot}=-1-\alpha_1^2+\frac{\sigma^2}{\sigma^2-1}-\frac{\sigma^2}{\sigma^2-1}\cos2(\theta_0+\tau)$$

Для периодичности Z_2 необходимо, чтобы $-1-\alpha_1^2+\sigma^2/(\sigma^2-1)=0$, откуда $\alpha_1^2=1/(\sigma^2-1)$. Для устойчивости должно быть $\alpha_1^2<0$ и, следовательно, $\sigma^2<1$. Тогда α_1 будет чисто мнимым, а $Z_2=-\sigma^2\cos2(\theta_0+\tau)/4(\sigma^2-1)$.

Для Z_3 получаем уравнение

$$Z_3^{\cdot\cdot}+2\alpha_1Z_2^{\cdot\cdot}+\alpha_1^2Z_1+2\alpha_1\alpha_2Z_0+\alpha_1\lambda_1Z_0+Z_1=2\sigma^2X_1\sin(\theta_0+\tau)/r$$

Условие периодичности Z_3 будет следующим: $\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\lambda_1+1-\sigma^2/(\sigma^2-1)=0$ откуда $2\alpha_1\alpha_2=-\alpha_1^2-1-\alpha_1\lambda_1+\sigma^2/(\sigma^2-1)=-\alpha_1\lambda_1$. Из последнего соотношения вытекает $\alpha_2=-\lambda_1/2<0$.

Итак, при малых ε условие $\sigma^2<1$ $(\omega_0<\omega)$ обеспечивает устойчивость нулевого решения системы (10). Далее вектор $(0, 0, -\lambda_1, \lambda_1)$ будем рассматривать как вектор постоянно действующих возмущений на систему (10). Из условия $\lambda_1=o(\varepsilon)$ вытекает, что нулевое решение системы (10) устойчиво при постоянно действующих возмущениях (решение (0, 0, 0, 0) переходит в устойчивое решение $(0, 0, -\lambda_1/\varepsilon, \lambda_1/\varepsilon)$). Из теории устойчивости по первому приближению следует, что такое же утверждение справедливо и относительно нелинейной системы (8)–(9). Таким образом, при условии $\omega>\omega_0$ происходит гашение колебаний в описанном выше смысле. Полученный результат коррелирует с известными положениями теории синхронизации динамических систем [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабицкий В. И.* Принципы динамического гашения колебаний.– В кн.: Вибрации в технике. Т. 6. М.: Машиностроение, 1981, с. 326–345.
2. *Блехман И. И.* Синхронизация динамических систем. М.: Наука, 1971. 894 с.

Москва

Поступила в редакцию 30.XI.1981