МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
№ 6 • 1982

УДК 531.3

О ПРИНЦИПЕ ВИРТУАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

БЛЮМИН Г. Д.

Формулировка и доказательство принципа виртуальных перемещений обобщены на случай нестационарных и неголономных связей. Приведены примеры задач о равновесии систем с подобными связями.

1. В обширной литературе по аналитической механике можно встретить различные изложения принципа виртуальных перемещений и при том отличающиеся не только в деталях: различны формулировки принципа, способы его доказательства и, что особенно существенно, различны мнения о том к какому классу систем применим этот принцип.

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих это положение. В [1] принцип формулируется следующим образом: «Для того, чтобы система материальных точек, подчиненная идеальным стационарным и удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы работа всех активных сил на любом виртуальном перемещении системы и скорости всех ее точек в начальный момент времени равнялись нулю», т. е. чтобы выполнялись равенства

$$\sum_k \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0, \qquad \mathbf{v}_k(0) = 0 \tag{1.1}$$

В [2, с. 205] автор утверждает, что принцип виртуальных перемещений в стационарном случае устанавливает необходимое и достаточное условие равновесия, а при нестационарных связях — лишь необходимые условия равновесия. Доказательство этого утверждения не приводится.

В [3, с. 259] автор утверждает, что равновесие возможно лишь при условии, если уравнения связей не содержат явно время, а в уравнениях неголономных связей (они полагаются линейными) отсутствуют свободные члены.

В [4, с. 30] при формулировке принципа вовсе не накладываются какие-либо ограничения на связи помимо того, что они являются идеальными и удерживающими.

Имеются и различные подходы к доказательству принципа. Так, в [4] первое равенство (1.1) выведено из общего уравнения механики и повидимому полагается, что тем самым доказана и необходимость и достаточность условий (1.1) для равновесия системы. Большинство же авторов приводит доказательство и необходимости и достаточности условий (1.1), полагая связи стационарными и существенно используя при доказательстве это свойство связей.

Следует при этом отметить, что весьма распространено доказательство, страдающее существенной нестрогостью. Вот например, как выглядит доказательство достаточности условия (1.1) у Аппеля [5]. Пусть дано, что при любом виртуальном перемещении системы сумма виртуальных работ всех активных сил δA_a равна нулю. Докажем, что в таком случае система находится в равновесии. Допустим обратное, т. е. что какие-либо материальные точки системы, имея в начальный момент скорость равную нулю, пришли в движение. Тогда каждая из них переместится в направлении силы, являющейся равнодействующей активных сил и реакций связей, приложенных к точке; следовательно, сумма работ этих сил на предполагаемом действительном перемещении точки положительна. Взяв виртуальные перемещения точек равными их действительным перемещениям, получим, что $\delta A_a + \delta A_R > 0$, где δA_R – сумма виртуальных работ реакций связей. Но при идеальных связях $\delta A_R = 0$, следовательно $\delta A_a > 0$, что противоречит условию теоремы.

Как видим, доказательство основано на утверждении, что если начальная скорость материальной точки равна нулю, то ее перемещение происходит в направлении приложенной к точке силы.

Автор полагает это очевидным, употребляя при том термин «перемещение» в несколько неопределенном смысле. Однако с направлением силы непременно совпадает лишь направление сообщаемого ею ускорения. Что же касается перемещения точки, то следует прежде всего уточнить, о каком перемещении идет речь.

Перемещение точки за некоторый промежуток времени Δt выражается приращением $\Delta \mathbf{r}$ ее радиус-вектора, которое можно представить в виде бесконечного ряда

$$\Delta \mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} (\Delta t)^2 + \ldots \tag{1.2}$$

Здесь многоточием обозначены члены не ниже третьего порядка относительно Δt, а производные радиус-вектора взяты для начального момента времени. Если в этот момент скорость точки равна нулю, то первый член ряда (дифференциал радиус-вектора $d\mathbf{r}$) обращается в нуль.

В доказательстве Аппеля речь идет о работе сил на предполагаемом действительном перемещении, совершенном из положения, в котором скорости точек равны нулю. Если подразумевать здесь элементарные перемещения точек, т. е. вектора $d\mathbf{r}$, то указанная работа не больше нуля, как считает автор, а равна нулю. Если же допустить, что под перемещениями автор подразумевает вектора $\Delta \mathbf{r}$, то в общем случае их направления не совпадают с направлением сил (только второй член ряда (1.2) коллинеарен ускорению, а следовательно, и силе). Кроме того, вектора $\Delta \mathbf{r}$ не принадлежат к множеству виртуальных перемещений, и потому приравнивать последние векторам $\Delta \mathbf{r}$ нельзя.

Некоторые авторы доказывают достаточность условия (1.1), прибегая к теореме о кинетической энергии (см., например, [6, с. 154]. Допустим, полагают эти авторы, что система, несмотря на выполнение условия (1.1), пришла в движение. При этом сумма работ активных сил $\mathbf{F}_k$ и реакций связей $\mathbf{R}_k$ на предполагаемом действительном перемещении системы будет положительной, так как кинетическая энергия ее получила положительное приращение. Связи предполагаются стационарными. Тогда действительные перемещения точек системы принадлежат к множеству виртуальных, и, заменив в выражении работы вектора $d\mathbf{r}_k$ на $\delta \mathbf{r}_k$, получим $\sum (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$. Отсюда вследствие того, что $\sum \mathbf{R}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$, следует $\sum \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k > 0$. Получившееся противоречие свидетельствует о том, что в действительности система остается неподвижной.

Дефект этого доказательства в сущности тот же, что у предыдущего, так как в качестве приращения кинетической энергии здесь следует взять ее дифференциал и при этом то его значение, которое соответствует начальному моменту времени, а оно равно нулю. Действительно

$$dT = d\Sigma \left(\frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \Sigma m_k v_k \, dv_k = 0$$

так как все $v_k(0)$ равны нулю.

2. Покажем, что принцип виртуальных перемещений может быть строго доказан для систем с нестационарными и неголономными связями. Потребуем лишь, чтобы связи были идеальными и удерживающими.

Пусть на механическую систему наложены голономные связи

$$f_\alpha(x_\nu, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, a) \tag{2.1}$$

и неголономные

$$\varphi_\beta(x_\nu, \dot{x}_\nu, t) = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, b) \tag{2.2}$$

(Здесь и далее для сокращения записи все декартовы координаты точек обозначены x_ν, так что индекс ν принимает значения от 1 до $3N$, если число точек равно N). Функции f_α и φ_β полагаем дифференцируемыми по всем своим аргументам. Частным случаем связей (2.2) являются линейные неголономные связи [4]:

$$\Sigma A_{\beta\nu} \dot{x}_\nu + B_\beta = 0 \quad (\beta = 1, 2, \ldots, b)$$

Следуя [7], будем называть виртуальным перемещением системы любую совокупность векторов $\delta \mathbf{r}_k$, координаты которых δx_ν удовлетворяют равенствам

$$\sum_\nu \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}\delta x_\nu=0, \qquad \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\nu^{\cdot}}\delta x_\nu=0 \tag{2.3}$$

Очевидно, что если неголономные связи являются линейными относительно скоростей, то второе равенство (2.3) принимает общепринятый для таких связей вид

$$\sum_\nu A_{\beta\nu}\delta x_\nu=0 \quad (\beta=1,2,\ldots,b)$$

Будем говорить, что система находится в состоянии равновесия, если равнодействующие сил, приложенных к каждой точке системы, равны нулю на протяжении некоторого промежутка времени. Таким образом, при равновесии точки системы могут либо двигаться с постоянными по модулю и направлению (не обязательно одинаковыми) скоростями относительно какой-либо инерциальной системы отсчета, либо покоиться, если их начальные скорости равны нулю. В последнем случае имеется равновесие в обычном, общепринятом смысле слова.

Приведенное выше обобщенное понятие равновесия имеет важный практический смысл: такое состояние системы, когда точки ее движутся с постоянными скоростями, нередко встречается в задачах механики, обычно решаемых методами статики, т. е. составлением уравнений равновесия. Применим ли в данном случае принцип виртуальных перемещений? Положительный ответ на этот вопрос (а именно такой ответ дан в настоящей статье) не очевиден, если учесть, что известные до сих пор доказательства принципа исходят из предположения, что начальные скорости точек системы равны нулю.

Выясним условия, которым должны удовлетворять связи, допускающие равновесие системы. Продифференцировав по времени дважды уравнения (2.1) и один раз уравнения (2.2), получим

$$\begin{gathered}\sum_\nu \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu}x_\nu^{\cdot\cdot}+\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i\,\partial x_j}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}+2\sum_\nu\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\,\partial x_\nu}x_\nu^{\cdot}+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}=0\\ \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\nu^{\cdot}}x_\nu^{\cdot\cdot}+\sum_\nu\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\nu}x_\nu^{\cdot}+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t}=0\end{gathered} \tag{2.4}$$

При равновесии все $x_\nu^{\cdot\cdot}$ равны нулю, следовательно связи, допускающие равновесие, должны удовлетворять условиям

$$\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial x_i\,\partial x_j}x_i^{\cdot}x_j^{\cdot}+2\sum_\nu\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t\,\partial x_\nu}x_\nu^{\cdot}+\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial t^2}=0, \qquad \Sigma\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial x_\nu}x_\nu^{\cdot}+\frac{\partial\varphi_\beta}{\partial t}=0 \tag{2.5}$$

для любых значений t в некотором интервале.

В частности, для того чтобы система могла покоится в некотором положении, определяемом координатами x_ν°, необходимо, чтобы тождественно по t удовлетворялись уравнения

$$\partial f_\alpha(x_\nu^\circ,\ t)/\partial t=0,\ \partial\varphi_\beta(x_\nu^\circ,\ 0,\ t)/\partial t=0 \tag{2.6}$$

(Первое из условий (2.6) получится, если, продифференцировав один раз по времени равенство (2.1), положить скорости всех точек равными нулю.) Для того, чтобы система могла покоиться при наличии линейных неголономных связей не обязательно, чтобы в уравнениях этих связей отсутствовал свободный член B_β, достаточно его обращение в нуль при некоторых фиксированных значениях координат x_ν°.

Принцип виртуальных перемещений сформулируем в виде следующей теоремы.

Для равновесия системы, стесненной идеальными удерживающими связями, необходимо и достаточно, чтобы: (а) состояние равновесия допускалось связями; (б) сумма работ активных сил на любом виртуальном перемещении системы равнялась нулю в течение некоторого промежутка времени, т. е. чтобы выполнялось условие

$$\Sigma \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant t_1) \tag{2.7}$$

Необходимость. Доказательство необходимости условия (2.7) для равновесия системы не отличается от общепринятого. Пусть известно, что система находится в состоянии равновесия, т. е. для каждой ее точки выполняется равенство $\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = 0$. Тогда удовлетворяется и равенство $\Sigma(\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$ из которого ввиду идеальности связей следует $\Sigma \mathbf{F}_k \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0$.

Достаточность. Пусть для каких-либо положений системы и на протяжении некоторого интервала времени условия теоремы выполняются. Согласно условию (а) это означает, что связи допускают такое состояние системы, когда координаты и скорости ее точек удовлетворяют равенствам (2.5). В частном случае, если связи допускают покой системы, удовлетворяются условия (2.6). Будет ли осуществляться движение с такими (постоянными) скоростями это зависит еще и от сил, действующих на систему, а относительно них известно, что активные силы удовлетворяют условию (2.7). Докажем, что в таком случае равновесие имеется. Допустим противное, т. е., что для каких-либо точек системы сумма сил $F_k + R_k$, приложенных к ним, отлична от нуля. Так как связи идеальны, то сумма виртуальных работ активных сил равна

$$\delta A = \Sigma \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = \Sigma (\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k) \delta \mathbf{r}_k$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_k + \mathbf{R}_k = m_k \mathbf{w}_k$, получим

$$\delta A = \Sigma m_k \mathbf{w}_k \delta \mathbf{r}_k \tag{2.8}$$

Вместе с тем ускорения $\mathbf{w}_k$ точек системы должны удовлетворять и соотношениям, вытекающим из уравнений связей, т. е. уравнениям (2.4). Но так как вместе с тем выполняются и условия (2.5), то из (2.4) следует

$$\sum_\nu \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \ddot{x}_\nu = 0, \qquad \sum_\nu \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial x_\nu} \ddot{x}_\nu = 0 \tag{2.9}$$

Сравнив (2.9) с (2.3) убеждаемся, что ускорения точек удовлетворяют тем же соотношениям, что и их виртуальные перемещения; иными словами, всякая совокупность векторов вида $\varepsilon \mathbf{w}_k$ (ε — какое-либо число) будет представлять некоторое виртуальное перемещение системы. Подставив в (2.8) вместо $\delta \mathbf{r}_k$ вектора $\varepsilon \mathbf{w}_k$, получим $\delta A = \varepsilon \Sigma m_k w_k^2 \neq 0$, что противоречит условию (2.7) теоремы. Следовательно, в действительности равнодействующие сил, приложенных к каждой из точек системы, равны нулю. Теорема доказана [1].

Отметим некоторые особенности применения принципа к системам с нестационарными и неголономными связями. В случае нестационарных связей силы, удовлетворяющие условиям равновесия, могут оказаться зависящими от времени. Пример подобного рода приведен ниже.

Относительно равновесия при неголономных связях в монографии [3, с. 250] имеется замечание: «Задача о равновесии системы, подчиненной

[1] Аналогичный прием доказательства теоремы применен в [1], но для случая стационарных и голономных связей и в предположении, что начальные скорости всех точек системы равны нулю.

идеальным связям, является однозначной только при отсутствии неголономных связей». Следует заметить, что при этом подразумеваются неголономные связи только линейные и однородные относительно скоростей. Когда все $x_\nu^\cdot$ равны нулю и свободный член в уравнениях таких связей отсутствует, эти уравнения удовлетворяются при любых значениях x_ν, вследствие чего число уравнений, которыми определяются положение равновесия или неизвестные силы оказывается меньше числа искомых неизвестных. Однако в общем случае, когда неголономные связи имеют вид (2.2) подобной неопределенности нет, так как в общем случае уравнения (2.2) не удовлетворяются тождественно по x_ν.

3. Приведем примеры применения принципа виртуальных перемещений к системам с неголономными нестационарными связями.

Пример 1. Математический маятник длиной l подвешен в камере, вращающейся вокруг вертикальной оси Oz с угловой скоростью ω (фиг. 1). Положение материальной точки маятника M определим координатами x, y, z в неподвижной системе $Oxyz$. Тогда уравнения связей имеют вид

$$y \cos \omega t - x \sin \omega t = 0, \quad z^2 + y^2 + x^2 - l^2 = 0$$

Первое из этих уравнений означает, что маятник вынужден оставаться в плоскости, вращающейся с заданной угловой скоростью ω вокруг оси Oz. Ясно, что равновесие маятника в вертикальном положении допускается связью. Для того же, чтобы оно действительно осуществлялось, необходимо, чтобы силы, приложенные к маятнику (это могут быть не только силы тяжести), удовлетворяли условию $\Sigma \mathbf{F}_k \delta \mathbf{r}_k = 0$.

Пример 2. Прямолинейный стержень движется по волновой поверхности (фиг. 2), уравнение которой

$$z = A \sin \omega t \sin ky, \quad (A,\ \omega,\ k = \text{const}) \tag{3.1}$$

Поверхность с течением времени деформируется, но любая ее линия, параллельная оси x и отстоящая от этой оси на расстоянии $y = \pi n/k$, остается неподвижной (n — любое целое число); стержень, установленный на такой линии, будет оставаться в покое или двигаться вдоль нее с постоянной скоростью, если силы, действующие на него, подчиняются условию (2.7). Положим для упрощения задачи, что система сил приводится к одной силе $\mathbf{F}$, приложенной в некоторой точке с координатами x, y, z. Из условия (2.7) следует $F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = 0$.

Согласно уравнению связи (3.1) $\delta z = Ak \sin \omega t \cos \omega t \delta y$, следовательно

$$F_x \delta x + (F_y + Ak \sin \omega t \cos ky F_z) \delta y = 0 \tag{3.2}$$

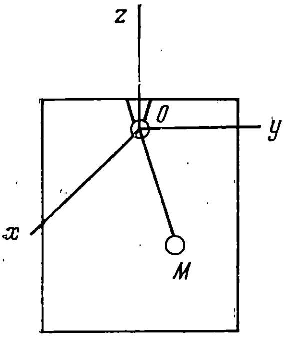
Так как δx и δy независимы, то из (3.2) следует $F_x = 0$, $F_y = -Ak \sin \omega t \cos ky F_z$, или $F_x = 0$, $F_y = \pm Ak \sin \omega t F_z$ при $y = n\pi/k$.

Таким образом, здесь имеет место упоминавшийся выше случай, когда при равновесии сила является функцией времени. Нетрудно видеть, что эта сила, вращаясь с угловой скоростью ω остается все время направленной по нормали к поверхности волны. При этом модуль силы может быть произвольным.

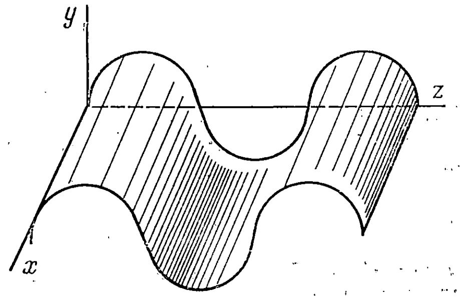
Пример 3. Твердое тело (фиг. 3) может катиться по плоскости без проскальзывания. В некоторый момент времени оно касается плоскости точкой P, в окрестности которой поверхность тела является сферической с центром в точке C и радиусом кривизны a. В качестве обобщенных координат тела возьмем декартовы координаты x_C, y_C точки C в неподвижной системе $Ox_0y_0z_0$ и углы Крылова α, β, γ, определяющие ориентацию связанных с телом осей $Cxyz$.

Уравнения связей имеют вид

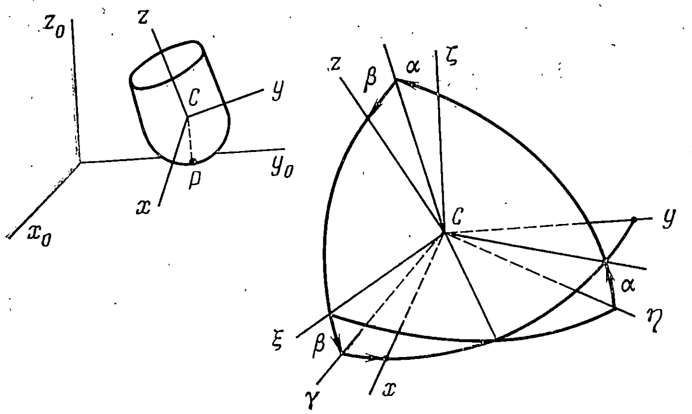
$$\begin{aligned} &x_C^\cdot - a(\beta^\cdot \cos \alpha - \gamma^\cdot \cos \beta \sin \alpha) = 0 \\ &y_C^\cdot + a(\alpha^\cdot + \gamma^\cdot \sin \beta) = 0, \quad z_C = a \end{aligned} \tag{3.3}$$



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Первые два уравнения (3.3) означают, что скорость точки P равна нулю. Вариации координат соответствующие любому виртуальному перемещению тела, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\delta x_C - a\cos\alpha\,\delta\beta + a\cos\beta\sin\alpha\,\delta\gamma = 0 \\ &\delta y_C + a\,\delta\alpha + a\sin\beta\,\delta\gamma = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Требуется найти положение равновесия тела при заданных активных силах, приложенных к нему. Пусть система этих сил характеризуется главным вектором $\mathbf{F}$ и главным моментом $\mathbf{M}$ относительно точки C. Согласно (2.7) в положении равновесия должно выполняться равенство

$$F_x\delta x_C + F_y\delta y_C + M_\alpha\delta\alpha + M_\beta\delta\beta + M_\gamma\delta\gamma = 0 \tag{3.5}$$

где F_x, F_y — проекции на оси x_0 и y_0 главного вектора, а M_α, M_β, M_γ — проекции главного момента на оси, вокруг которых совершаются элементарные повороты на углы $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.

Здесь обнаруживается особенность, присущая задаче о равновесии системы с неголономными связями: число уравнений равновесия, которые могут быть получены из (3.5), меньше числа обобщенных сил; объясняется это тем, что вариации координат в данном случае не являются независимыми и потому из (3.5) не следует, что все обобщенные силы равны нулю, как это было бы при голономных связях. Однако задача имеет определенное решение. Выразив с помощью (3.4) вариации δx_C и δy_C через $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ приведем уравнение (3.5) к виду

$$(M_\alpha - aF_y)\delta\alpha + (M_\beta + aF_x\cos\alpha)\delta\beta + (M_\gamma - aF_x\cos\beta\sin\alpha - aF_y\sin\beta)\delta\gamma = 0$$

из которого следует

$$M_\alpha - aF_y = 0, \quad aF_x \cos\alpha + M_\beta = 0$$

$$M_\gamma - aF_x \cos\beta \sin\alpha - aF_y \sin\beta = 0$$

Эти уравнения позволяют определить возможные положения равновесия тела. В частности, если силы не зависят от угла γ, то равновесие возможно при любом значении этого угла.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1971. 462 с.
2. *Айзерман М. А.* Классическая механика. М.: Наука, 1974. 367 с.
3. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
4. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика. Т. 1. М.: Физматгиз, 1960. 515 с.
6. *Кильчевский Н. А.* Основы теоретической механики. Киев: Техніка, 1961. 260 с.
7. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 535 с.

Москва

Поступила в редакцию
23.III.1981